УДК 517.54

В. А. ПОХИЛЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

О подклассах регулярных и однолистных функций с фиксированным коэффициентом

На классе регулярных в $E = \{z, |z| < 1\}$ функций $q(z) = 1 + 2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}z^n + 2p_{n+k}z^{n+k} + \ldots$, $\operatorname{Re} q(z) > \beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ и фиксированы, n, $k \in N$, при фиксированном $z \in E$ построена область значений функционала $I_0 = q(z)$. Найден аналог вариационной формулы В. А. Зморовича для выражения $zp'(z)$. Указаны некоторые приложения.

На класі регулярних в $E = \{z, |z| < 1\}$ функцій $q(z) = 1 + 2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}z^n + 2p_{n+k}z^{n+k} + \ldots$, $\operatorname{Re} q(z) > \beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ і фіксовані, n, $k \in N$, при фіксованому $z \in E$ побудована область значень функціоналу $I_0 = q(z)$. Знайдено аналог варіаційної формули В. А. Зморовича для виразу $zp'(z)$. Указані деякі застосування.

1. Введем основные классы регулярных и однолистных в единичном круге $E = \{z, |z| < 1\}$ функций. Пусть α, $\beta \in [0, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, n и k — целые положительные числа, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$.

Обозначим через $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ класс регулярных в круге E функций $q(z)$, удовлетворяющих в E условию $\operatorname{Re} q(z) > \beta$, $\beta \in [0, 1)$, нормированных разложением

$$q(z) = 1 + 2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}z^n + 2p_{n+k}z^{n+k} + \ldots, \tag{1}$$

в котором фиксирован коэффициент $2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}$ при z^n. При $\beta = 0$ соответствующий класс функций $p(z)$ обозначим через $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$. Очевидно, класс $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k) \subset P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$ при $\beta \in (0, 1)$ и функции $q(z)$ и $p(z)$ связаны соотношением

$$q(z) = (1-\beta)p(z) + \beta. \tag{2}$$

Если в (1) α и β фиксированы, а θ произвольно, то соответствующий класс будем называть классом регулярных функций с фиксированным модулем $2\alpha(1-\beta)$ коэффициента при z^n и обозначать через $\widetilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$. Пусть $S^*\left[\frac{2\alpha(1-\beta)}{n}e^{i\theta}, n+1, n+1+k\right]$ — подкласс звездообразных в круге E с фиксированным коэффициентом (при z^{n+1}) функций

$$f(z)=z+\frac{2\alpha(1-\beta)}{n}e^{i\theta}z^{n+1}+c_{n+k+1}z^{n+k+1}+\dots, \tag{3}$$

определяемый условием: $f\in S^*[\dots]$ тогда и только тогда, когда $zf'/f=q\in\in P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$. Определим теперь подкласс класса почти выпуклых в E [1] функций с фиксированным коэффициентом. Именно: будем говорить, что регулярная в E функция $f(z)\in C\left[\frac{2\alpha}{n+1}\left(\frac{1-\beta}{n}e^{i\theta}-1\right), n, n+k+1\right]$, если [2]

$$zf'/\varphi\in P(-2\alpha, n, n+k), \tag{4}$$

где $\varphi\in S^*\left(\frac{2\alpha(1-\beta)}{n}\varepsilon^{i\theta}, n+1, n+k+1\right)$. Очевидно, класс $C[\dots]$ состоит из однолистных в E функций. В настоящей работе основное внимание уделяется некоторым экстремальным свойствам классов $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ и $\widetilde{P}(\dots)$. Отметим основные результаты работы.

Получено необходимое и достаточное представление функций, нормированных разложением (1).

При фиксированных $z\in E$, α, $\beta\in[0, 1)$, $\theta\in[0, 2\pi]$ построена область значений функционала $I_0=p(z)$ на классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$. Как следствия получены точные оценки снизу и сверху для $\operatorname{Re}p(z)$, когда фиксировано $z\in E$ и, в частности, в круге $|z|\leqslant r$.

С помощью метода работы [3] получена область значений функционала $I_0'=p(z)$ на классе $\widetilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$, а также показано, как этот результат можно получить методом нахождения огибающих к однопараметрическому семейству кругов.

Получена вариационная формула для $zp'(z)$ в классе $P(\dots)$, представляющая собой аналог вариационной формулы В. А. Зморича [4], а также теорема об экстремизации функционала $\Phi(p(z), zp'(z))$ на классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$, где $\Phi(\xi, w)$ — вещественная однозначная и непрерывная функция в области $\operatorname{Re}\xi>0$, $|w|<\infty$.

Ряд результатов был получен автором в работах [2, 5]. На основании этих результатов найдена граница выпуклости класса

$$C\left[\frac{2\alpha}{n+1}\left(\frac{1-\beta}{n}e^{i\theta}-1\right), n+1, n+k+1\right].$$

2. Теорема 1. *Для того чтобы $p(z)\in P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $p(z)$ имела представление*

$$p(z)=\frac{1+\alpha e^{i\theta}z^n+(\alpha e^{-i\theta}+z^n)\,\omega(z)}{1-\alpha e^{i\theta}z^n+(\alpha e^{-i\theta}-z^n)\,\omega(z)}, \tag{5}$$

где $\omega(z)=c_kz^k+\dots$, *регулярна в круге* E, $|\omega|<1$, $k\geqslant1$*—натуральное.*

Доказательство аналогично случаю $\theta=0$, приведенному в [5].

Замечание 1. Используя связь (2) между функциями

$$q\in P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k) \text{ и } p\in P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k),$$

легко получить представление для функций $q(z)\in P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$.

Теорема 2. *При фиксированном значении $z \in E$ область значений $I_0 = p(z)$ на классе $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$ представляет собой круг с центром в точке $A(z)$ радиуса $\rho(z)$, где*

$$A(z) = 1 + C(z); \qquad C(z) = \frac{2z^n}{B(z)}\left[\frac{1-\alpha^2}{1-|z|^{2k}}\vec{z}^n + \alpha e^{i\theta} - z^{-n}\right].$$

$$\rho(z) = \frac{2(1-\alpha^2)|z|^{n+k}}{(1-|z|^{2k})B(z)},$$

$$B(z) = \frac{1-|z|^{2(n+k)}}{1-|z|^{2k}} - 2\alpha \operatorname{Re}(e^{i\theta}z^n) - \alpha^2\frac{|z|^{2k}-|z|^{2n}}{1-|z|^{2k}}.$$

Каждой граничной точке круга соответствует только одна функция класса $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$, определяемая формулой (5) *при* $\omega(z) = \eta z^k$, $|\eta| = 1$.

Замечание 2. В силу (2) для класса $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ центр $A_1(z)$ и радиус $\rho_1(z)$ будут выражаться формулами

$$A_1(z) = 1 + (1-\beta)C(z); \qquad \rho_1(z) = (1-\beta)\rho(z).$$

Доказательство теоремы 2. Представим $p(z)$ в виде $p(z) = A(z, \varepsilon) + p(z) - A(z, \varepsilon)$, где

$$A(z,\varepsilon) = \frac{1-\alpha^2 e^{2i\theta}z^{2n} - (\alpha^2 e^{-2i\theta} - z^{2n})\varepsilon^2 z^{2k}}{(1-\alpha e^{i\theta}z^n)^2 - (\alpha e^{-i\theta} - z^n)^2\varepsilon^2 z^{2k}}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

аргумент ε пока произволен. С использованием (5) получаем

$$p(z) = A(z,\varepsilon) + \frac{2(1-\alpha^2)z^n[(1-\alpha e^{i\theta}z^n)\omega + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\varepsilon^2 z^{2k}]}{[1-\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\omega][(1-\alpha e^{i\theta}z^n)^2 - (\alpha e^{-i\theta} - z^n)^2\varepsilon^2 z^{2k}]}.$$

Отсюда следует

$$|p(z) - A(z,\varepsilon)| = \frac{2(1-\alpha^2)|z|^n|(1-\alpha e^{i\theta}z^n)\omega + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\varepsilon^2 z^{2k}|}{|1-\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\omega\|(1-\alpha e^{i\theta}z^n)^2 - (\alpha e^{-i\theta} - z^n)^2\varepsilon^2 z^{2k}}.$$

Используя неравенства $|z_1 - z_2| \geqslant \|z_1| - |z_2\|$, имеем

$$p(z) - A(z,\varepsilon)| = \frac{2(1-\alpha^2)|(1-\alpha e^{i\theta}z^n)\omega + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\varepsilon^2 z^{2k}|}{|1-\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\omega|[|1-\alpha e^{i\theta}z^n|^2 - |\alpha e^{-i\theta} - z^n|^2|z|^{2k}}. \tag{6}$$

Знак равенства в (6) будет тогда, когда

$$\arg \varepsilon z^k = \arg[(1-\alpha e^{i\theta}z^n)/(\alpha e^{-i\theta} - z^n)].$$

При выбранном таким образом ε можно убедиться, что $A(z, \varepsilon)$ принимает значение $A(z)$, указанное в формулировке теоремы, и тогда неравенство (6) принимает вид

$$\frac{2(1-\alpha^2)|z|^n||1-\alpha e^{i\theta}z^n|\omega + |\alpha e^{-i\theta} - z^n|e^{i\arg \varepsilon z^k}|z|^{2k}|}{\|1-\alpha e^{i\theta}z^n| + \omega|\alpha e^{-i\theta} - z^n|e^{-i\arg\varepsilon z^k}|[|1-\alpha e^{i\theta}z^n|^2 - \alpha e^{i\theta} - z^n|^2|z|^{2k}]}. \tag{7}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $|\omega(z)| \leqslant |z|^k$ выполняется неравенство

$$\frac{\|1-\alpha e^{i\theta}z^n|\omega(z) + |\alpha e^{-i\theta} - z^n||z|^{2k}e^{i\arg\varepsilon z^k}|}{\|1-\alpha e^{i\theta}z^n| + |\alpha e^{-i\theta} - z^n|\omega(z)e^{-i\arg\varepsilon z^k}|} \leqslant |z|^k, \tag{8}$$

причем знак равенства в (8) достигается при $\omega(z) = \eta z^k$, $|\eta| = 1$.

Таким образом, на основании (8) из (7) следует

$$|p(z)-A(z)|\leqslant\frac{2(1-\alpha^2)|z|^{n+k}}{|1-\alpha e^{i\theta}z^n|^2-|\alpha e^{-i\theta}-z^n|^2|z|^{2k}}, \tag{9}$$

причем знак равенства в (9) достигается при $\omega(z)=\eta z^k$, $\eta=1$. Перепишем (9) в виде $p(z)=A(z)+t\rho(z)e^{-i\psi}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\psi\in[0, 2\pi]$.

Следствие 1. *При $k=n$ получается область значений $I_0=p(z)$ на классе функций $p(z)$, нормированных разложением*

$$p(z)=1+2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}z^n+2p_{2n}z^{2n}+2p_{2n+1}z^{2n+1}+\ldots.$$

В этом случае центр $A(z)$ и радиус $\rho(z)$ соответственно равны (в классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, 2n)$

$$\rho(z)=\frac{2(1-\alpha^2)(1-\beta)|z|^{2n}}{(1-|z|^{2n})[1-2\alpha\operatorname{Re}(e^{i\theta}z^n)+|z|^{2n}]},$$

$$A(z)=1+\frac{2(1-\beta)z^n[((1-\alpha^2)/(1-|z|^{2n}))z^{-n}+\alpha e^{i\theta}-\bar{z}^d]}{1-2\alpha\operatorname{Re}(e^{i\theta}z^n)+|z|^{2n}}.$$

Граничные точки достигаются в соответствующем классе n-кратно-симметричных функций.

Другим методом этот результат (в случае $n=k=1$) был получен Е. Г. Голузиной (см. следствие 4 и 7 из [6]).

Следствие 2. *При фиксированном $z\in E$ в классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ для $\operatorname{Re}p(z)$ выполняются соответственно точные оценки*

$$\operatorname{Re}A(z)-\rho\leqslant\operatorname{Re}\rho(z)\leqslant\operatorname{Re}A(z)+\rho(z).$$

В развернутом виде аналогичные оценки при $\theta=0$ приведены в [2, 5].

Следствие 3. *На окружности $|z|=r$ или, что равносильно, в круге $|z|\leqslant r$ на классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ для $\operatorname{Re}p(z)$ справедливы точные оценки*

$$\frac{(1-\beta)[1-\alpha r^n+(\alpha-r^n)r^k]}{1+\alpha r^n+(\alpha+r^n)r^k}+\beta\leqslant\operatorname{Re}p(z)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1-\beta)[1+\alpha r^n+(\alpha+r^n)r^k]}{1-\alpha r^n+(\alpha-r^n)r^k}+\beta.$$

Найдем область значений функционала $I_0'=q(z)$ на классе $\tilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$ функций $q(z)$ с фиксированным модулем коэффициента при z^n (в разложении (1)). Такой класс функций, очевидно, представляется формулой

$$q(z)=[1+(1-2\beta)\omega_\alpha(z)]/(1-\omega_\alpha(z)),$$

где $\omega_\alpha(z)=\alpha z^n+c_{k+n}z^{n+k}+\ldots$ — регулярная в круге E функция и $|\omega_\alpha(z)|<1$, $z\in E$. Очевидно, $|\omega_\alpha(z)|\leqslant\alpha|z|^n$. В свою очередь $\omega_\alpha(z)=z^ne^{i\gamma}(\alpha+\omega(z))/(1+\alpha\omega(z))$, где $\omega(z)=c_kz^k+c_{k+1}z^{k+1}+\ldots$ — регулярная в E функция, $|\omega|<1$, $z\in E$ и $|\omega(z)|\leqslant|z|^k$.

Повторяя рассуждения работы [3, с. 548], легко получить следующий результат.

Теорема 3. *Область значений функционала $I_0'=q(z)$ на классе $\tilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$ представляет собой замкнутое ограниченное множество, граница которого в общем случае состоит из пары неконцентрических окружностей, определяемых следующим образом:*

$$|q-a(\sigma_j)|=\rho(\sigma_j),\quad i=1,2,$$

где

$$a(\sigma) = [1 + (1-2\beta)\sigma^2]/(1-\sigma^2); \qquad \rho(\sigma) = 2(1-\beta)\sigma/(1-\sigma^2);$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dfrac{r^n(\alpha - r^k)}{1-\alpha r^k} & \text{при } 0 < r < \alpha^{1/k}, \\ 0 & \text{при } \alpha^{1/k} \leqslant r < 1; \end{cases} \qquad \sigma_2 = r^n(\alpha + r^k)/(1+\alpha r^k).$$

Функция, реализующая граничные точки соответственно внешней и внутренней окружности, имеет вид

$$q(z) = \frac{1 \pm \alpha z^k + \alpha(1-2\beta)e^{i\gamma}z^n + (1-2\beta)e^{i\gamma}z^{n+k}}{1 \pm \alpha z^k - \alpha e^{i\gamma}z^n - e^{i\gamma}z^{n+k}} =$$

$$= 1 + 2\alpha(1-\beta)e^{i\gamma}z^n + 2(1-\alpha^2)(1-\beta)e^{i\gamma}z^{n+k} + \ldots, \tag{10}$$

где знак (—) при αz^k относится к внутренней окружности. К этому же результату можно прийти и другим методом, применяя теорему 2, который является довольно громоздким.

Приведем краткое доказательство этого замечания. Прежде всего заметим, что в этом случае (с фиксированным модулем коэффициента) область значений функционала $I_0' = q(z)$ не зависит от $\arg z$. Полагая в теореме 2 $z = r > 0$, в случае $q(z) \in P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ для центра $A(r, \theta)$ и радиуса $p(r, \theta)$ получаем следующие формулы:

$$A(r,\theta) = \frac{c_1 - \beta c_3\cos\theta + (1-\beta)c_3\sin\theta\cdot i}{c_2 - c_3\cos\theta}; \qquad \rho(r,\theta) = \frac{(1-\beta)c_4}{c_2 - c_3\cos\theta},$$

где

$$c_1 = 1 + (1-2\beta)r^{2(n+k)} - \alpha^2[r^{2k} + (1-2\beta)r^{2n}],$$

$$c_2 = 1 - r^{2(n+k)} - \alpha^2(r^{2k} - r^{2n}), \quad c_3 = 2\alpha(1-r^{2k})r^n,$$

$$c_4 = 2(1-\alpha^2)r^{n+k}.$$

Уравнение окружности запишем в виде

$$\left(x - \frac{c_1 - \beta c_3\cos\theta}{c_2 - c_3\cos\theta}\right)^2 + \left(y - \frac{(1-\beta)c_3\sin\theta}{c_2 - c_3\cos\theta}\right)^2 = \frac{(1-\beta)^2c_4^2}{(c_2 - c_3\cos\theta)^2}. \tag{11}$$

Можно показать, что если θ изменяется от 0 до 2π, то центр $A(r, \theta, \beta)$ круга (11) опишет при этом эллипс

$$\frac{(x-a_1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_1 = \frac{c_1c_2 - \beta c_3}{c_2^2 - c_3^2},$$

$$a = \frac{(c_1 - \beta c_2)c_3}{c_2^2 - c_3^2}, \quad b = \frac{(1-\beta)c_3}{\sqrt{c_2^2 - c_3^2}}. \tag{12}$$

Чтобы найти область значений функционала $\overline{I} = q = u + iv$ на классе $\widetilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$, надо найти уравнение огибающих к однопараметрическому семейству кругов (11), когда θ изменяется от 0 до 2π (очевидно, область симметрична относительно вещественной оси). Ради простоты ограничимся случаем $\beta = 0$.

Докажем, что окружность Γ с центром в точке

$$A_1 = \frac{1}{2}[A(r,0) + \rho(r,0) + A(r,\pi) - \rho(r,\pi)] = (c_1c_2 + c_3c_4)/(c_2^2 - c_3^2)$$

радиуса

$$\rho_1 = \frac{1}{2}[A(r,0) + \rho(r,0) + \rho(r,\pi) - A(r,\pi)] = (c_1c_3 + c_2c_4)/(c_2^2 - c_3^2)$$

является внешней огибающей. Докажем сначала, что

$$(|A - A_1| + \rho)^2 = \rho_1^2 \tag{13}$$

или, что равносильно,

$$|A|^2 - 2A_1 \operatorname{Re} A + 2\rho\rho_1 - \rho^2 = \rho_1^2 - A_1^2; \quad (A = A(r, \theta)). \tag{14}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$|A|^2 - 2A_1 \operatorname{Re} A + 2\rho\rho_1 - \rho^2 = -\frac{c_1^2 - c_4^2}{c_2^2 - c_3^2} + \frac{c_3^2 \sin^2\theta}{c_2 - c_3 \sin\theta}\left(1 - \frac{c_1^2 - c_4^2}{c_2^2 - c_3^2}\right).$$

В свою очередь нетрудно проверить, что $(c_1^2 - c_4^2)/(c_2^2 - c_3^2) = 1$, т. е. доказано (14), а следовательно, и (13). Заметим, что соотношению (13) удовлетворяет любая точка окружности с центром в точке $A(r, \theta)$ радиуса $\rho(r, \theta)$ и единственная точка этой окружности при

$$u = \frac{c_1}{c_2 - c_3\cos\theta} + \rho\cos\chi; \qquad v = \frac{c_3\sin\theta}{c_2 - c_3\cos\theta} + \rho\sin\chi,$$

где

$$x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{Im} A(r, \theta)}{\operatorname{Re} A(n, \theta) - A_1} & \text{при } \operatorname{Re} A > A_1; \\ \pi - \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{Im} A(r, \theta)}{A_1 - \operatorname{Re} A(r, \theta)} & \text{при } \operatorname{Re} A < A_1, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению окружности $\Gamma: (u - A_1)^2 + v^2 = \rho_1^2$, т. е. окружность Γ является внешней огибающей для семейства кругов (11). Аналогично можно привести доказательство для внутренней огибающей.

Следствие 4. *В классе* $\tilde{P}(2\alpha(1-\beta), n, n+k)$ *с фиксированным модулем* $2\alpha(1-\beta)$ *при* z^n *для* $\operatorname{Re} p(z)$, $\operatorname{Im} p(z)$ *в круге* $|z| < r$ *справедливы точные оценки*:

$$\frac{c_1 + \beta c_3 - (1-\beta)c_4}{c_2 + c_3} \leqslant \operatorname{Re} p(z) \leqslant \frac{c_1 - \beta c_3 + (1-\beta)c_4}{c_2 - c_3},$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Im} p(z)| \leqslant \frac{(1-\beta)[c_3\sqrt{c_2^2 - c_3^2} + c_2c_4]}{c_2^2 - c_3^2}, \tag{15}$$

где $c_i = c_i(r)$, $i = 1, 4$, *(см. выше). Экстремальная функция имеет вид* (10).

Очевидно, оценки (15) совпадают с оценками, указанными в следствии 3.

3. Обозначим через $\tilde{P}(n)$ подкласс класса Каратеодори функций $p(z)$, нормированных разложением $p(z) = 1 + 2p_nz^n + 2p_{n+1}z^{n+1} + \ldots$.

Далее установим вариационную формулу в классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$, представляющую собой аналог вариационной формулы для $zp'(z)$ в классе $\tilde{P}(n)$, приведенную в работе [4]. Доказательство этой формулы в $\tilde{P}(n)$ дано в работе [3].

Поскольку область значений $I_0 = p(z)$ найдена, естественно получить вариационную формулу для $zp'(z)$ в классе $P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$. Это позволит исследовать на экстремум некоторые функционалы вида $\Phi(p(z), zp'(z))$ непосредственно в классе $P(\ldots)$, $\Phi(\xi, w)$ — вещественная однозначная и непрерывная функция в области $\operatorname{Re}\xi > 0, |w| < +\infty$.

Введем следующие обозначения:

$$A^{\pm}(z) = \alpha k e^{-i\theta} z^{-n} \pm (n + k - (n-k)\alpha^2) + \alpha k e^{i\theta} z^n,$$

$$\lambda = \lambda(z) = [|1 - \alpha e^{i\theta} z^n|^2 - |\alpha e^{-i\theta} - z^n|^2 |z|^{2k}/|z|^{n+k+1}(1 - |z|^2),$$

$$2B(z) = 2\alpha k(e^{-i\theta} - e^{i\theta}z^{2k})z^{-n}, \quad \gamma = (2(1-\alpha^2))^{-1}.$$

Теорема 4. *Если зафиксировать точку* z_0, *то значения функций* $p(z) \in P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$ *в этой точке заполняют круг, указанный в теореме 2. Если в точке* z_0 *фиксировать значение* ξ_0 *функции* $\xi = p(z) \in P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$ *в указанном круге и заставить* $p(z)$ *пробегать тот подкласс* $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k, \xi_0)$ *класса* $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$ *все функции которого удовлетворяют условию* $\xi_0 = p(z_0)$, *то значения* $w = z_0 p'(z_0)$ *заполняют круг* $|w - C(\xi_0)| \leqslant R(\xi_0)$, *где* $C(\zeta_0) = \gamma[-A^- \zeta_0^2 + 2B\zeta_0 - A^+]$, $R(\xi_0) = \gamma\lambda[\rho^2 - |\xi_0 - A|^2]$, *причем окружность этого круга покрывается значениями только функций вида* (5), *в котором* $\omega = e^{i\nu}\dfrac{c-z}{1-cz}z^k$. *Параметры* ν *и* c *связаны условием* $\xi_0 = p(z_0)$.

Доказательство этой теоремы основывается на применении соответствующей теоремы В. А. Зморовича, но довольно громоздко, а потому опустим его. При $\theta = 0$ оно приведено в [2].

Замечание 4. Чтобы получить эту теорему в классе $P(2\alpha, (1 - \beta)e^{i\theta}, n, n+k)$, можно воспользоваться равенством (2) и подставить в формулу $zp'(z) = \gamma[-\bar{A}p^2 + 2Bp - A^+ + \lambda(\rho^2 - |p - A|^2)\varepsilon e^{i\psi}]$ вместо p и p' по (2) соответственно выражения $(q - \beta)/(1 - \beta)$ и $q'/(1-\beta)$ и произвести упрощения. В результате получим для zq', $q \in P(2\alpha(1-\beta)e^{i\theta}, n, n+k)$ следующее равенство:

$$zq' = \frac{\gamma}{1-\beta}\{-\bar{A}q^2 + 2B_1 q - c_1 + \lambda[\rho_1^2 - |q - A_1|^2]\varepsilon e^{i\psi}\},$$

где

$$2B_1 = 2(1-\beta)B + 2\beta A^-, \quad c_1 = A^-\beta^2 + 2\beta(1-\beta)B + A^+(1-\beta),$$
$$\rho_1 = (1-\beta)\rho, \quad A_1 = (1-\beta)A + \beta.$$

Условимся обозначать через M класс вещественных функций $\Phi(\xi, w)$, однозначных и непрерывных в области $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\xi > 0$. Будем говорить, что $\Phi(z, \xi, w) \in \underline{M}$, если в каждом круге $|w - w_0| < R$ функция $\Phi(z, \xi, w)$ достигает своего минимума в этом круге при любых фиксированных z и $\operatorname{Re}\xi > 0$, $|z| < 1$, на окружности этого круга. Смысл записи $\Phi(z, \xi, w) \in \overline{M}$ аналогичен. Вместо минимума здесь имеется в виду максимум.

Пусть $\Phi(z, \xi, w) \in \underline{M}$. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{F}(p) = \Phi(z, p(z), zp'(z)), \quad p \in P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Минимум* $\mathcal{F}(p)$ *в любой фиксированной точке* $z \in E$, *когда* $p(z)$ *пробегает класс* $P(2\alpha e^{i\theta}, n, n+k)$, *совпадает с минимумом* $\Phi(\xi, z, w)$ *в области* $|\xi - A| < \rho$, $\psi \in [0, 2\pi]$, *где*

$$w = \gamma[-A^-\xi^2 + 2B\xi - A^+ + \lambda[\rho^2 - |\xi - A|^2]e^{i\psi}].$$

Если указанный минимум реализуется при $\xi = \xi_0$ и $\psi = \psi_0$, то следует различать два случая: 1) $|\xi_0 - A| = \rho$; 2) $|\xi_0 - A| < \rho$. В первом случае экстремальная функция $p(z)$ такая же, как и в теореме 2, во втором — как в теореме 3. Параметры ν и c функции $\omega(z)$, входящей в формулу экстремальной функции, в каждом случае определяются однозначно по ξ_0 и ψ_0.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы 4. Действительно, поскольку z фиксировано, то, полагая $\xi = p(z)$, из теоремы 4 получаем $w = zp' = \gamma\{-A^-\xi^2 + 2B\xi - A^+ + \lambda[\rho^2 - |\xi - A|^2]\varepsilon e^{i\psi}\}$. Отсюда следует

$$|w - \gamma[-A^-\xi^2 + 2B\xi - A^+]| \leqslant \lambda\gamma[\rho^2 - |\xi - A|^2].$$

Поскольку $\Phi(z, \xi, w) \in \underline{M}$, то в предположении, что ξ фиксировано, в последнем неравенстве имеем знак равенства, т. е. $\varepsilon = 1$. Остается провести исследование на экстремум $\Phi(z, \xi, w)$ по ξ и ψ и рассмотреть два случая, указанные в формулировке теоремы, относительно экстремальных функций.

4. Пусть теперь $f(z) \in C\left[\frac{2\alpha}{n+1}\left(\frac{1-\beta}{n}e^{i\theta}-1\right)\right]$, где $C[\ldots]$ — подкласс класса почти-выпуклых функций, приведенный в п. 1. Исходя из определения этого класса функций, нетрудно получить следующую оценку:

$$\operatorname{Re}(1 + zf''/f') \geqslant \beta + (1-\beta)\frac{1-\alpha r^n + (\alpha - r^n) r^n}{1+\alpha r^n + (\alpha + r^n) r^k} -$$

$$- \frac{2r^n[n\alpha + (n+k+(n-k)\alpha^2) r^k + n\alpha r^{2k}]}{[1+\alpha r^n + (\alpha + r^n) r^k][1-\alpha r^n + (\alpha - r^n) r^k]}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Граница выпуклости класса* $C\left[\frac{2\alpha}{n+1}\left(\frac{1-\beta}{n}e^{i\theta}-1\right), n+1, n+k+1\right]$ *определяется как наименьший на интервале* $(0, 1)$ *корень уравнения*

$$[1-\alpha r^n + (\alpha - r^n) r^k][1+\alpha r^k - (\alpha + r^k)(1-2\beta) r^{n+k}] -$$

$$- 2r^n[n\alpha + (n+k+(n-k)\alpha^2] r^k + n\alpha r^{2k}] = 0. \qquad (16)$$

Экстремальная функция имеет вид

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,\frac{1+\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} + z^n) z^n \eta}{1-\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\eta z^k} + \beta, \quad |\eta| = 1,$$

где $\varphi(z)$, *в свою очередь, находится из равенства*

$$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} = (1-\beta)\,\frac{1+\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} + z^n) z^k \eta_1}{1-\alpha e^{i\theta}z^n + (\alpha e^{-i\theta} - z^n)\eta_1 z^k} + \beta, \quad |\eta_1| = 1.$$

В заключении заметим, что некоторые результаты настоящей статьи анонсированы в [7].

1. *Kaplan W*. Close to convex schlicht functions // Mich. Math. J.— 1952.— 1, N 2.— P. 169—185.
2. *Похилевич В. А*. Области значений некоторых функционалов на подклассах регулярных и однолистных функций с фиксированным коэффициентом.— Киев, деп. в УкрНИИНТИ, № 2175 — Ук88., 35 с.
3. *Зморович В. А*., *Коробкова И. К*. К теории аналитических функций с положительной вещественной частью в круге // Укр. мат. журн.— 1974.— 26, № 4.— С. 545—549.
4. *Зморович В. А*. Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1965.— № 8.— С. 980—983.
5. *Похилевич В. А*. О подклассах регулярных и однолистных функций с фиксированным коэффициентом.— Киев, 1988.— 32 с.— (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 88.5).
6. *Голузина Е. Г*. Об областях значений систем функционалов в классах функций с положительной вещественной частью // Зап. науч. Ленингр. отд-я Мат. ин-та АН СССР.— 1980.— Вып. 3 (100).— С. 17—25.
7. *Похилевич В. А*. О подклассах регулярных и однолистных функций с фиксированным коэффициентом.— Киев, 1989.— 17 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 549 — Ук89.

Получено 26.07.89