УДК 512.542

А. Н. СКИБА, канд. физ.-мат. наук,
Л. А. ШЕМЕТКОВ, чл.-корр. АН БССР (Гомел. ун-т)

Формации алгебр с дополняемыми подформациями

Рассматриваются формации универсальных алгебр с системами дополняемых подформаций. В частности, получено описание мальцевских формаций, у которых все подформации дополняемы.

Розглядаються формації універсальних алгебр з системами доповнюваних підформацій. Зокрема, одержано опис мальцевських формацій, у яких всі підформації доповнювані.

Понятие формации, введенное Гашюцом в 1963 г., сыграло значительную роль в развитии теории групп. В последние годы это понятие существенно используется при изучении не только групп, но и других систем. Некоторые итоги в этом направлении подведены в работе [1].

В настоящей работе рассматриваются формации алгебр. Под алгеброй понимается универсальная алгебра, т. е. непустое множество с произвольной системой алгебраических операций. Все рассматриваемые алгебры имеют одну и ту же сигнатуру. Напомним, что класс алгебр $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия: 1) для любой алгебры $A \in \mathfrak{F}$ и любого ее гомоморфизма φ справедливо $A^{\varphi} \in \mathfrak{F}$; 2) если α_1 и α_2 — конгруэнции на алгебре A, причем $A/\alpha_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, то $A/\alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathfrak{F}$. Через $\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ обозначим наименьшую (по включению) формацию, содержащую класс $\mathfrak{X}$. Формацию одноэлементных алгебр обозначим $\mathfrak{E}$. Все другие используемые нами определения можно найти в книге [1]. Все рассматриваемые в статье алгебры предполагаются входящими в некоторое фиксированное мальцевское многообразие.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — подформации формации $\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{H}$ дополняет формацию $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. В книге [1, с. 106] приведено (без доказательства) описание конечных мальцевских формаций, у которых все подформации дополняемы. В данной статье этот результат доказан в расширенном варианте.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, причем каждая алгебра из $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию максимальности для конгруэнций. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *каждая подформация из $\mathfrak{F}$ имеет в $\mathfrak{F}$ дополнение*;

2) *решетка конгруэнций каждой $\mathfrak{F}$-алгебры является решеткой с дополнениями*;

3) *всякая неединичная $\mathfrak{F}$-алгебра является прямым произведением конечного числа простых алгебр*;

4) *для каждой собственной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ дополняема в $\mathfrak{H}$*.

Доказательство. Докажем, что 1) влечет 2). Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех простых $\mathfrak{F}$-алгебр, $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$. Пусть A — неединичная алгебра из $\mathfrak{H}$. Поскольку по условию A удовлетворяет условию максимальности для конгруэнций, то на A имеется такая конгруэнция π, что A/π — простая алгебра. Тогда $A/\pi \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Пусть теперь B — произвольная неединичная $\mathfrak{F}$-алгебра. Согласно лемме 3.2 из [1] $\mathfrak{F} = \mathrm{HR}_0\,\mathfrak{X}$. Значит, $B = H/\varphi$ для некоторой конгруэнции φ на $H \in R_0\,\mathfrak{X}$. По лемме 3.16 из [1] $H = A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1, \ldots A_t$ — некоторые простые алгебры. Следовательно, ввиду леммы 3.18 из [1] имеем $\mathrm{soc}\,(H) = H \times H$. Пусть $\bar{\tau}$ — произвольная конгруэнция на B и τ — такая конгруэнция на H, что $\varphi \subseteq \tau$ и $\tau/\varphi = \bar{\tau}$. Ввиду леммы 3.14 из [1] алгебра H обладает такой конгруэнцией ψ, что $\psi \cap \tau = \Delta$ и $\psi\tau = H \times H$. Заметим, что поскольку $\psi\varphi \cap \tau = \varphi\,(\psi \cap \tau) = \varphi$, то

$$\psi\varphi/\varphi \cap \tau/\varphi = (\psi\varphi \cap \tau)/\varphi = \varphi/\varphi.$$

С другой стороны,

$$(\psi\varphi/\varphi)\,(\tau/\varphi) = \psi\tau/\varphi = H \times H/\varphi = (H/\varphi) \times (H/\varphi).$$

Таким образом, решетка конгруэнций алгебры B есть решетка с дополнениями.

Докажем, что 2) влечет 3). Пусть A — произвольная неединичная алгебра из $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 3.14 из [1] $\mathrm{soc}\,(A) = A \times A$. Понятно, что найдется такое конечное множество минимальных конгруэнций $\pi_1, \ldots, \pi_t$, что $A \times A = \pi_1 \ldots \pi_t$. Значит, A обладает главным рядом конгруэнций и поэтому удовлетворяет одновременно условию максимальности и условию минимальности для конгруэнций.

Пусть $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ — множество всех таких конгруэнций на A, что A/φ_i — простая алгебра. Обозначим через φ пересечение $\bigcap\limits_{i \in I} \varphi_i$. Допустим, что $\varphi \neq \Delta$, и пусть π — минимальная конгруэнция на A, удовлетворяющая включению $\pi \subseteq \varphi$. Согласно условию на A имеется такая конгруэнция ψ, что $\psi \cap \pi = \Delta$ и $\psi\pi = A \times A$. Предположим, что имеется такая конгруэнция τ, что $\psi \subset \tau \subset A \times A$. Тогда $\pi \nsubseteq \tau$ и поэтому

$$\tau = \tau \cap \pi\psi = \psi\,(\tau \cap \pi) = \psi.$$

Полученное противоречие показывает, что A/ψ — простая алгебра. Следовательно, $\pi \subseteq \psi$. Но $\pi \cap \psi = \Delta$ и $\pi \neq \Delta$. Противоречие. Таким образом, $\varphi = \Delta$. Нетрудно заметить, однако, что в действительности в $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ найдется такое конечное подмножество $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$, что $\varphi_{i_1} \cap \ldots \cap \varphi_{i_n} = \Delta$. Таким образом, A — поддекартово произведение конечного числа простых алгебр. Но по лемме 3.16 из [1] это означает, что A — прямое произведение некоторого конечного числа простых алгебр.

Докажем, что 3) влечет 4). Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ дополняема в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех простых $\mathfrak{F}$-алгебр, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ формацию $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}_2$. Понятно, что $\mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$, и пусть A_1 — неединичная алгебра из $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, $A_1/\pi = A$ — простая алгебра. Тогда $A \in \mathrm{form}\,(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)$, т. е. $A = H/\pi_1$ для некоторой конгруэнции π_1 алгебры $H \in \mathrm{R}_0\,(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)$. Ввиду леммы 3.16 из [1] $H = A_1 \times \ldots \times A_t \times B_1 \times \ldots \times B_r$, где $A_1, \ldots, A_t \in \mathfrak{X}_1$, $B_1, \ldots, B_r \in \mathfrak{X}_2$. Нетрудно показать, что H имеет такое разложение $H = D_1 \times \ldots \times D_n$, что D_i — простая алгебра и $D_1 \simeq A$. Применяя теперь теорему 6.16 из [2], видим, что либо $A \simeq A_i$ для некоторого i, либо $A \simeq B_j$ для некоторого j. Пусть, например, имеет место первое. Тогда $A \in \mathfrak{X}_1$. Значит, $A \notin \mathfrak{X}_2$. Но $A \in \mathfrak{H} = \mathrm{HR}_0\mathfrak{X}_2$. Снова применяя теорему 6.16 из [2], видим, что $A \in \mathfrak{X}_2$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, т. е. $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$.

Докажем, что 4) влечет 1). Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — класс всех простых $\mathfrak{F}$-алгебр. Допустим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Тогда по условию в $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ дополняема в $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$. Тогда очевидно $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{E}$. Пусть A — произвольная простая алгебра из $\mathfrak{H}_1$. Тогда $A \in \mathfrak{X}$. Значит, $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_1$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0\mathfrak{X}$. Теперь, рассуждая, как и выше, можно показать, что каждая подформация из $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть конгруэнции φ и π алгебры A таковы, что $\pi \cap \varphi = \Delta$. Тогда для любого элемента $a \in A$ справедливо $([a]_\varphi)^2 \cap \pi = \Delta$.*

Лемма 2. *Пусть π и φ — такие конгруэнции алгебры A, что $\varphi \subseteq \pi$. Тогда $[a]_{\pi/\varphi} = [a]_\pi/\varphi$ для любого $a \in A$.*

Лемма 3. *Для всякого $a \in A$ и любых конгруэнций π и φ алгебры A справедливо равенство $[a]_{\pi\varphi} = \varphi([a]_\pi)$.*

Доказательство лемм 1—3 осуществляется прямой проверкой.

Лемма 4. *Для всякого $a \in A$ и любых конгруэнций π и φ алгебры A справедлив изоморфизм*

$$[a]_{\pi\varphi/\pi} \simeq [a]_\varphi/\pi \cap ([a]_\varphi)^2.$$

Доказательство. По лемме 2 имеем $[a]_{\pi\varphi/\pi} = [a]_{\pi\varphi}/\pi$. С другой стороны, согласно лемме 3 имеем $[a]_{\pi\varphi} = \pi([a]_\varphi)$. Значит, ввиду теоремы 2 из [3] существует изоморфизм

$$[a]_{\pi\varphi/\pi} = \pi([a]_\varphi)/\pi \simeq [a]_\varphi/\pi \cap ([a]_\varphi)^2.$$

Лемма доказана.

Формация $\mathfrak{F}$ называется мальцевской [4], если она поляризована [5] и во всех $\mathfrak{F}$-алгебрах конгруэнции перестановочны. Формация называется конечной, если она состоит из конечных алгебр.

Лемма 5. *Пусть алгебра A принадлежит некоторой конечной мальцевской формации. Тогда если φ и π — такие конгруэнции на A, что $\varphi \cap \pi = \Delta$, то каждый композиционный фактор алгебры A изоморфен одному из композиционных факторов алгебр A/π или A/φ.*

Доказательство. Алгебра A имеет нормальный ряд

$$[e]_\varphi \subseteq [e]_{\pi\varphi} \subseteq A.$$

Заметим, что по лемме 4 имеет место изоморфизм

$$[e]_{\pi\varphi/\pi} \simeq [e]_\varphi/\pi \cap ([e]_\varphi)^2.$$

Но по лемме 1 $([e]_\varphi)^2 \cap \pi = \Delta$. Значит, $[e]_\varphi \simeq [e]_{\pi\varphi/\pi}$. Таким образом, уплотнение ниже $[e]_\varphi$ до композиционного ряда алгебры A изоморфно соответствующему уплотнению для $[e]_{\pi\varphi/\pi}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ — формации, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{H}_1$ — дополнение к $\mathfrak{H}$* в $\mathfrak{F}$, *то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_1$ — дополнение к $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 9.8 из [1] справедливо равенство

$$\mathfrak{M} \cap \mathrm{form}(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}_1) = \mathrm{form}(\mathfrak{H} \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_1)).$$

Но $\mathrm{form}(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(\mathfrak{H} \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_1))$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_1$ — дополнение к $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — конечная формация, то $L(\mathfrak{F})$ — решетка всех подформаций из $\mathfrak{F}$.

Лемма 7. *Пусть $A \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — некоторая конечная мальцевская формация. Тогда в $\mathrm{form}\, A$ имеется лишь конечное множество минимальных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная минимальная подформация из $\mathrm{form}\, A$. Тогда очевидно $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, T$, где T — некоторая простая алгебра. Так как $T \in \mathrm{HR}_0(A)$, то $T \simeq H/\pi$, где H — подпрямое произведение некоторого конечного числа изоморфных копий алгебры A. Ввиду леммы 5 T изоморфна некоторому композиционному фактору алгебры A. Но A — конечная алгебра. Таким образом, в $\mathrm{form}\, A$ имеется лишь конечное множество минимальных подформаций. Лемма доказана.

Определение. *Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ имеет конечную длину n, если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = \varnothing$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная подформация $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

По определению, единичная формация $\mathfrak{E}$ имеет длину 1. Понятно также, что формация длины 2 — это формация, порожденная простой алгеброй.

Будем говорить также, что формация $\mathfrak{F}$ имеет бесконечную длину, если она не является формацией конечной длины t при любом натуральном t.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — конечная мальцевская формация длины $n > 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *решетка $L(\mathfrak{F})$ булева;*

2) *решетка конгруэнций любой $\mathfrak{F}$-алгебры есть решетка с дополнениями;*

3) *для некоторого $1 < k < n$ всякая подформация длины k дополняема в $\mathfrak{F}$;*

4) *в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{F}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_i$ — атом решетки $L(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу минимальных подформаций. Ввиду теоремы 1 из условия 1 вытекают условия 2—4. Покажем, что 3) влечет 2).

Пусть $G \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\, G$ и длина формации $\mathfrak{M}$ не меньше, чем $k + 1$. Ввиду леммы 6 каждая подформация из $\mathfrak{M}$, имеющая длину k, дополняема в $\mathfrak{M}$. Таким образом, если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ имеет длину k, то в $\mathfrak{M}$ найдется такая подформация $\mathfrak{M}_2$, что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)$. Ввиду леммы 7 число m всех минимальных подформаций, входящих в $\mathfrak{M}$, конечно. Понятно, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{E}$ и поэтому число минимальных подформаций, входящих в $\mathfrak{M}_2$, не превышает $m - 1$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $\mathfrak{M}_2$ имеет длину $\geqslant k + 1$. Ввиду леммы 6 каждая подформация длины k дополняема в $\mathfrak{M}_2$. Следовательно, ввиду индукции и теоремы 1 каждая $\mathfrak{M}_2$-алгебра есть прямое произведение некоторого конечного числа простых алгебр. Пусть A — произвольная простая $\mathfrak{M}_2$-алгебра, $\mathfrak{M}_3 = \mathrm{form}\, A$. Легко убедиться, что $\mathfrak{M}_4 = \mathrm{form}\{\mathfrak{M}_1 \cup \{A\}\} \neq \mathfrak{F}$, длина $\mathfrak{M}_4$ не меньше чем $k + 1$ и число минимальных подформаций, входящих в $\mathfrak{M}_4$, не превышает $m - 1$. Значит по индукции каждая $\mathfrak{M}_4$-алгебра есть прямое произведение конечного числа простых алгебр. Так как $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(\mathfrak{M}_4 \cup \mathfrak{M}_2)$, то из последнего ввиду теоремы 3.21 из [1] заключаем, что каждая $\mathfrak{M}$-алгебра есть прямое произведение некоторого конечного числа простых алгебр.

2. $\mathfrak{M}_2$ имеет длину $\leqslant k$. Тогда ввиду модулярности решетки $L(\mathfrak{M})$ длина формации $\mathfrak{M}$ не превышает $2k$. Воспользуемся индукцией по длине формации $\mathfrak{M}$. В предельном случае $\mathfrak{M}$ имеет длину $k + 1$. Пусть $A_1, \ldots, A_t$ — набор всех неизоморфных простых $\mathfrak{M}$-алгебр. Допустим $t + 1 < k$. Легко убедиться, что длина формации $\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}\{A_1, \ldots, A_t\}$ равна $t + 1$. Значит, $\mathfrak{F}_1$ содержится в такой подформации $\mathfrak{F}_2$ из $\mathfrak{M}$, длина которой равна $k + 1$. Пусть $\mathfrak{F}_3$ — дополнение к $\mathfrak{F}_2$ в $\mathfrak{M}$. Тогда в $\mathfrak{F}_3$ найдется простая алгебра, не изоморфная ни одной алгебре из $\{A_1, \ldots, A_t\}$. Противоречие. Итак, $k - 1 \leqslant t$. Пусть $\mathfrak{F}_4 = \mathrm{form}\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ и $\mathfrak{F}_5$ — дополнение к $\mathfrak{F}_4$ в $\mathfrak{M}$. И пусть T — произвольная простая алгебра из $\mathfrak{F}_5$. Тогда поскольку $\mathfrak{F}_4$ — максимальная подформация в $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\{A_1, \ldots, A_{k-1}, T\}$. Снова применяя теорему 3.21 из [1] видим, что каждая $\mathfrak{M}$-

алгебра — прямое произведение некоторого конечного числа простых алгебр.

Допустим теперь, что длина $\mathfrak{M} \leqslant k$. Покажем, что в $\mathfrak{F}$ найдется такая однопорожденная подформация $\mathfrak{H}$ длины $\geqslant k+1$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть T_1 — произвольная алгебра из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{form}\{T_1, G\}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}_1$ и длина $\mathfrak{H}_1$ больше, чем длина $\mathfrak{M}$. Если длина $\mathfrak{H}_1$ равна $l \geqslant k+1$, то в качестве $\mathfrak{H}$ берем $\mathfrak{H}_1$, в противном случае возьмем $T_2 \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}_1$ и пусть $\mathfrak{H}_2 = \mathrm{form}\{T_2, T_1, G\}$ и т. д. В результате придем к такой однопорожденной формации $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\{T_l, T_{l-1}, \ldots, T_1, G\} = \mathrm{form}\{T_l \times T_{l-1} \times \ldots \times T_1 \times G\}$, длина которой $\geqslant k+1$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, имеем уже рассмотренный случай. Следовательно, любая алгебра G из $\mathfrak{F}$ есть прямое произведение конечного числа некоторых простых алгебр. Ввиду теоремы 1 это доказывает справедливость утверждения 2.

Нам остается доказать, что 4) влечет 1). Используя рассуждения, близкие приведенным выше, можно показать, что каждая $\mathfrak{F}$-алгебра является прямым произведением некоторого конечного числа простых алгебр. Ввиду теоремы 1 это означает, что решетка $L(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Формация $\mathfrak{E}$ — нуль, а $\mathfrak{F}$ — единица этой решетки. Для доказательства дистрибутивности решетки $L(\mathfrak{F})$ рассмотрим три произвольные подформации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{F}$. Ясно, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \vee (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N} \vee \mathfrak{H})$. Предположим, что обратное включение неверно, и пусть A — алгебра минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N} \vee \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \vee (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Алгебра A очевидно монолитичная и поэтому она проста. Так как

$$A \in \mathfrak{N} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{form}(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{H}) = \mathrm{HR}_0(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{H}),$$

то $A \simeq \mathrm{H}/\pi$ для некоторой конгруэнции π алгебры $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Ввиду сделанного выше замечания каждая подформация из $\mathfrak{F}$ порождается классом своих простых алгебр. Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — классы простых алгебр формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда очевидно

$$\mathfrak{N} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{form}(\mathfrak{N} \cup \mathfrak{H}) = \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2).$$

Значит, ввиду леммы 3.16 из [1],

$$A \simeq A_1 \times \ldots \times A_t \times B_1 \times \ldots \times B_2,$$

где $A_i \in \mathfrak{N}$, $B_j \in \mathfrak{H}$; $i = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, r$.

Следовательно, либо $A \simeq A_i$ для некоторого i, либо $A \simeq B_j$ для некоторого j. Пусть, например, имеет место первое. Тогда $A \in \mathfrak{N}$ и поэтому $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \subseteq (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \vee (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Противоречие. Аналогично получаем противоречие и в случае, когда $A \simeq B_j$. Таким образом,

$$\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N} \vee \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \vee (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Теорема доказана.

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем.— М. : Наука, 1989.— 252 с.
2. *Кон П.* Универсальная алгебра.— М. : Мир, 1968.— 351 с.
3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М. : Наука, 1970.— 392 с.
4. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций алгебраических систем // Алгебра и логика.— 1984.— 23, № 6.— С. 721—729.
5. *Мальцев А. И.* Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. мат. журн.— 1967.— 8, № 2.— С. 346—365.

Получено 11.01.91