УДК 512.554

А. П. ПЕТРАВЧУК, канд. физ.-мат. наук (Киев. высш. танк. инж. уч-ще)

О разрешимости алгебры Ли, разложимой в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр

Доказана разрешимость алгебр Ли, разложимых в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, над полем характеристики $\neq 2$.

Доведена розв'язність алгебр Лі, що розкладаються в суму абелевої та нільпотентної підалгебр, над полем характеристики $\neq 2$.

Конечномерные алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр над полем характеристики > 2, изучались в работе А. И. Кострикина [1], где была доказана их разрешимость при некотором ограничении на размерность абелева слагаемого. В работе Пиллена [2] это ограничение было снято и доказан более общий результат: если алгебра Ли — сумма абелевой конечномерной и нильпонентной подалгебр, то она разрешима над полем характеристики $\neq 2$. В конечномерном случае в характеристике $\neq 2$ положительно решен [3] и более общий вопрос, поставленный О. Кегелем: будет ли алгебра Ли разрешимой, если она — сумма двух нильпотентных подалгебр. Эти результаты перестают быть верными для алгебр Ли над полем характеристики 2 [4].

Цель настоящей работы — доказать разрешимость алгебры Ли L, разложимой в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, над полем характеристики $\neq 2$. Если оба слагаемые абелевы, то L разрешима в любой характеристике и ступень разрешимости ее не превышает двух (замечание принадлежит Я. С. Крылюку и отмечено в [1]).

В настоящей работе используются левонормированные произведения. Если X — подпространство некоторой алгебры Ли, то $X^1 = X$, $X^n =$

$=[X^{n-1}, X]$. Через $c(L)$ будем обозначать ступень нильпотентности нильпотентной алгебры Ли L.

Лемма 1. *Пусть L — алгебра Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом R с единицей, разложимая в сумму $L = A + B$ абелевой подалгебры A и некоторой подалгебры B. Тогда*

а) *для любых натуральных i, j выполняются соотношения*

$$[[A, B^i], [A, B^j]] \subseteq [A, B^{i+1}] + [A, B^{j+1}] + [A, B^{i+j}, L] + B^2, \qquad (1)$$

$$[A, B^i, B] \subseteq [A, B^i] + B^{i+1}; \qquad (2)$$

б) *для любого натурального i R-подмодуль $[A, B^i] + B$ является подалгеброй алгебры L;*

в) *если L_0 — подалгебра из L, содержащая B, то $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = L_0 \cap A$ и подалгебра L_0 содержит идеал I алгебры L такой, что $A_0 \subseteq I$.*

Доказательство. а). Соотношение (1) доказано в лемме 1 из работы [4]. Далее, $[A, B^i, B] \subseteq [B^i, B, A] + [B, A, B^i]$ и $[B^i, B, A] \subseteq [A, B^{i+1}]$, $[B, A, B^i] \subseteq [A+B, B^i] \subseteq [A, B^i] + B^{i+1}$. Но тогда $[A, B^i, B] \subseteq [A, B^i] + B^{i+1}$, что доказывает (2).

б). Пусть $L_i = [A, B^i] + B$ и n_1, n_2 — произвольные элементы из R-подмодуля $[A, B^i]$ алгебры L. Так как $L = A + B$, то $n_1 = a_1 + b_1$, $n_2 = a_2 + b_2$ для некоторых элементов a_1, a_2 из A и b_1, b_2 из B. Ввиду соотношения (2) имеем $[n_1, b_2] \in L_i$, $[n_2, b_1] \in L_i$ и потому из легко проверяемого равенства

$$[n_1, n_2] = [n_1, b_2] - [n_2, b_1] - [b_1, b_2] \qquad (3)$$

следует, что $[n_1, n_2] \in L_i$. Поскольку элементы n_1, n_2 из $[A, B^i]$ выбиралось произвольно, то $[[A, B^i], [A, B^i]] \subseteq L_i$. Далее, ввиду (2) $[[A, B^i], B] \subseteq [A, B^i] + B^{i+1} \subseteq L_i$. Отсюда очевидно, следует, что L_i — подалгебра из L для любого натурального числа i.

в). Если L_0 — подалгебра из L и $B \subseteq L_0$, то, очевидно, $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = L_0 \cap A$. Следуя [1], построим фильтрацию алгебры L по подалгебре $L_0 = A_0 + B$:

$$L = L_{-1} \supseteq A_0 + B = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq L_{k+1} \supseteq \ldots,$$

где $L_{i+1} = \{x \in L_i \mid [x, L] \subseteq L_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Ввиду коммутативности подалгебры A для любого $i \geqslant 0$ $L_i \supseteq A_0$. Тогда $I = \bigcap_{i \geqslant 0} L_i$ — идеал алгебры L, содержащий подалгебру A_0 и содержащийся в L_0. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть L — алгебра Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом R с единицей, разложимая в сумму абелевой подалгебры A и некоторой подалгебры B. Пусть, кроме того, для некоторого R-подмодуля N алгебры L выполняются соотношения*

$$L = N + B,\ N \cap B = 0,\ [N, N] \subseteq B,\ [N, B] \subseteq N.$$

Возьмем произвольные элементы n_1, n_2 из N и пусть $n_1 = a_1 + b_1$, $n_2 = a_2 + b_2$ для некоторых элементов a_1, a_2 из A, b_1, b_2 из B. Тогда справедливы следующие равенства:

$$[n_1, b_2] = [n_2, b_1], \qquad (4)$$

$$[n_1, n_2] = -[b_1, b_2]. \qquad (5)$$

Доказательство. По условию леммы $[n_1, n_2] \in B$ и так как $[b_1, b_2] \in B$, то из равенства (3) следует $[n_1, b_2] - [n_2, b_1] \in B$. Ввиду включения $[N, B] \subseteq N$ и равенства $N \cap B = 0$ отсюда следует, что $[n_1, b_2] -$

$-[n_2, b_1] = 0$, т. е. $[n_1, b_2] = [n_2, b_1]$. Но тогда $[n_1, n_2] = -[b_1, b_2]$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть L — алгебра Ли над полем K, характеристики $\neq 2$, разложимая в сумму абелевой подалгебры A и нильпотентной подалгебры B. Если для некоторого K-подпространства N алгебры L выполняются соотношения*

$$L = N + B, \ [N, N] \subseteq B, \ [N, B] \subseteq N,$$

то алгебра L разрешима.

Доказательство. Если ступень нильпотентности $c(B) = 1$, то алгебра L разрешима ввиду [1] (это вытекает также из соотношения (1)). Пусть лемма верна для алгебр Ли, удовлетворяющих ее условиям, с $c(B) \leqslant n-1$. Докажем утверждение леммы для алгебры Ли $L = A + B$ с $c(B) = n$. Заметим, что ввиду условий леммы пересечение $T = N \cap B$ является идеалом алгебры L. При этом фактор-алгебра $\overline{L} = L/T$, очевидно, удовлетворяет всем условиям леммы и, кроме того, $\overline{N} \cap \overline{B} = 0$, где $\overline{N} = N/T$, $\overline{B} = B/T$. Так как T — разрешимый идеал, то, не теряя общности, можно считать в дальнейшем, что $N \cap B = 0$.

Пусть m — произвольный элемент из K-подпространства N. Поскольку $L = A + B$, то $m = a + b$ для некоторых элементов $a \in B$, $b \in B$. Элемент b будем называть для удобства B-компонентой элемента m (очевидно, B-компонента определена с точностью до слагаемого из $A \cap B$).

Рассмотрим сначала случай, когда подалгебра B порождается всеми B-компонентами элементов из N. Покажем, что в алгебре L справедливо включение

$$[[N, B^n], \ [N, B^n]] \subseteq B^3. \tag{6}$$

Пусть n_1, n_2 — произвольные элементы из N и b — произвольный элемент из подалгебры B^n. Тогда $n_1 = a_1 + b_1$, $n_2 = a_2 + b_2$ для некоторых элементов $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. Поскольку $b \in B^n$ и $B^n \subseteq Z(B)$ (по предположению $c(B) = n$), то

$$[n_1, b_2, b] = [n_1, b, b_2].$$

Пусть $[n_1, b] = n_3 = a_3 + b_3$ для некоторых элементов $a_3 \in A$, $b_3 \in B$. Заменяя в равенстве (4) элементы n_1, n_2 на n_2 и n_3, получаем $[n_1, b, b_2] = [a_3 + b_3, b_2] = [n_2, b_3]$. Аналогично получим $[[n_1, b_2], b] = [[n_2, b_1], b]$ и потому из равенства $[n_1, b_2, b] = [n_1, b, b_2]$ следует

$$[n_2, b_1, b] = [n_2, b_3]. \tag{7}$$

Пусть теперь m — еще один произвольно выбранный элемент из K-подпространства N. Тогда

$$[n_2, b_1, b, m] = [n_2, b_1, m, b] - [n_2, b_1, [m, b]].$$

Так как $[n_2, b_1] \in N$, $[N, N] \subseteq B$ и $b \in Z(B)$, то $[n_2, b_1, m, b] = 0$ и, значит, $[n_2, b_1, b, m] = -[n_2, b_1, [m, b]]$. Далее, $-[n_2, b_1, [m, b]] = [n_2, [m, b, b_1]] - [n_2, [m, b], b_1]$. Поскольку мы предположили, что $N \cap B = 0$, то ввиду (5)

$$[N, N] \subseteq B^2. \tag{8}$$

Но в таком случае элемент $[n_2, [m, b], b_1]$ (обозначим его через d) принадлежит подалгебре B^3. Из предыдущих двух равенств для элементов алгебры L следует

$$[n_2, b_1, b, m] = [n_2, [m, b, b_1]] - d, \ d \in B^3. \tag{9}$$

Как и выше, можно показать, что элемент $[n_2, m, b_3]$ (обозначим его через c) принадлежит подалгебре B^3. В этих обозначениях имеем

$$[n_2, b_3, m] = -[n_2, [m, b_3]] + c, \ c \in B^3. \tag{10}$$

Левые части равенств (9) и (10) совпадают ввиду (7) и потому, вычитая почленно из равенства (9) равенство (10), получим

$$0 = [n_2, [m, b, b_1]] - d + [n_2, [m, b_3]] - c.$$

Отсюда следует

$$[n_2, [m, b, b_1] + [m, b_3]] = c + d \in B^3.$$

Заменяя в равенстве (7) элемент n_2 на m, получаем $[m, b_1, b] = [m, b_3]$ и, значит, $2\,[n_2, [m, b, b_1]] = c + d \in B^3$.

Так как характеристика поля K отлична от 2 и элементы $n_1 = a_1 + b_1$, n_2, m из N и элемент b из B^n выбирались произвольно, то

$$[N, [N, B^n, b_1]] \subseteq B_3, \tag{11}$$

где b_1 — произвольный элемент из подалгебры B, являющийся B-компонентой элемента из N. Нетрудно убедиться, что соотношение (11) остается справедливым, если элемент b_1 заменить на произведение любого числа B-компонент элементов из N. В рассматриваемом случае подалгебра B порождается B-компонентами элементов из N и потому

$$[N, [N, B^n, B]] \subseteq B^3. \tag{12}$$

Поскольку $[[N, B^n], [N, B]] \subseteq [N, B^n, N, B] + [N, B^n, B, N]$ и $[N, B^n, N, B] \subseteq [N, N, B] \subseteq B^3$ ввиду (8), $[N, B^n, B, N] = [N, [N, B^n, B]] \subseteq B^3$ ввиду (12), то $[[N, B^n], [N, B]] \subseteq B^3$. Отсюда следует (6).

Покажем теперь, что $[N, B^n] + B$ — разрешимая подалгебра алгебры L. Действительно,

$$[[N, B^n], B] \subseteq [N, B, B^n] \subseteq [N, B^n].$$

Кроме того, $[[N, B^n], [N, B^n]] \subseteq B^3 \subseteq B$ ввиду (6). Итак, $[N, B^n] + B$ — подалгебра из L. Обозначим через B_1 подалгебру из B, порожденную всеми B-компонентами элементов из $[N, B^n]$. Ввиду (5) $[[N, B^n], [N, B^n]] \subseteq B_1^2$ и потому, как нетрудно видеть, $[N, B^n] + B_1$ — подалгебра из L. Пусть $A_1 = A_n([N, B^n] + B_1)$. Тогда, как легко видеть, $[N, B^n] + B_1 = A_1 + B_1$. Так как произведение любых двух образующих элементов подалгебры B_1 содержится в подалгебре B^3 (ввиду (6), то $B_1^2 \subseteq B^3$. Отсюда следует, что $B_1^n = 0$ и потому по индуктивному предположению подалгебра $[N, B^n] + B_1 = A_1 + B_1$ (очевидно, удовлетворяющая условиям леммы) разрешима. Покажем, что тогда и подалгебра $[N, B^n] + B$ разрешима. Действительно, определим для $i = 1, 2, \ldots, n+1$ подалгебру $S_i = [N, B^n] + B_1 + B^i$. Нетрудно убедиться, что подалгебра S_{i+1} является идеалом в S_i для $i = 1, 2, \ldots, n$ и фактор-алгебра S_i/S_{i+1} абелева. При этом $S_{n+1} = [N, B^n] + B_1$ и $S_1 = [N, B^n] + B$. Поскольку подалгебра S_{n+1} разрешима, то отсюда следует разрешимость подалгебры $S_1 = [N, B^n] + B$.

Подалгебра $[N, B^n] + B$ ввиду леммы 1 разлагается в сумму $[N, B^n] + B = A_0 + B$, где $A_0 \subseteq A$. По этой же лемме подалгебра $A_0 + B$ содержит идеал I алгебры L такой, что $A_0 \subseteq I$. По доказанному выше подалгебра $A_0 + B$ разрешима и потому I — разрешимый идеал алгебры L. Так как фактор-алгебра L/I удовлетворяет всем условиям леммы, то, не теряя общности, можно считать, что $I = 0$. Но тогда $A_0 = 0$ и, значит, $[N, B^n] \subseteq B$. По условиям леммы $[N, B] \subseteq N$ и потому, очевидно, $[N, B^n] \subseteq N \cap B$. Выше отмечалось, что, не теряя общности, можно считать выполненным равенство $N \cap B = 0$. Отсюда и из предыдущего включения следует, что $[N, B^n] = 0$. Поскольку $L = N + B$ и $B^n \subseteq Z(B)$, то, очевидно, $B^n \subseteq Z(L)$. Фактор-алгебра $\overline{L} = L/B^n = \overline{A} + \overline{B}$ удовлетворяет условиям леммы и ступень нильпотентности подалгебры $\overline{B} = B/B^n$ не превышает $n - 1$. По индуктивному предположению алгебра $\overline{L}$ разрешима, а потому разрешима и алгебра L.

Рассмотрим теперь случай, когда подалгебра B не порождается B-компонентами элементов из N. Обозначим через B_0 подалгебру, порожденную всеми B-компонентами элементов из N. Нетрудно видеть, что $N + B_0$ —

подалгебра алгебры L. По доказанному выше подалгебра $N + B_0$ разрешима и потому, определив последовательность подалгебр $N + B_0 + B^i$ для $i = 1, \ldots, n + 1$, можно, как и ранее, убедиться, что из разрешимости подалгебры $N + B_0$ вытекает разрешимость алгебры $N + B = L$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть L — алгебра Ли над полем K характеристики отличной от 2, разложимая в сумму $L = A + B$ абелевой подалгебры A и нильпотентной подалгебры B. Тогда алгебра L разрешима.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно и n — наименьшее число, для которого существуют неразрешимые алгебры Ли вида $L = A + B$ с $A^2 = 0$, $B^{n+1} = 0$. Среди неразрешимых алгебр Ли указанного вида выберем такую алгебру $L = A + B$, для которой число i, выделяемое условиями $[A, B^i] \not\subseteq B$, $[A, B^{i+1}] \subseteq B$ минимально. Построим последовательность подалгебр $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$. Положим $L_0 = [A, B^i] + B$. Ввиду леммы 1 это действительно подалгебра алгебры L и $L_0 = A_0 + B$, где $A_0 = L_0 \cap A$. Если уже определена подалгебра $L_{k-1} = A_{k-1} + B$, то подалгебру L_k, $k \geqslant 1$, определим следующим образом: $L_k = [A_{k-1}, B^i] + B$. Ввиду леммы 1 L_k — подалгебра (содержащаяся в L_{k-1}) и $L_k = A_k + B$, где $A_k = L_k \cap A_{k-1}$. При таком построении, очевидно, $A \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_{k-1} \supseteq A_k \supseteq \ldots$.

Покажем, что для любого $k \geqslant 0$ подалгебра L_k неразрешима. Рассмотрим сначала подалгебру $L_0 = [A, B^i] + B = A_0 + B$. Если подалгебра L_0 разрешима, то ввиду леммы 1 она содержит (разрешимый) идеал I_0 алгебры L такой, что $A_0 \subseteq I_0$. Фактор-алгебра $\overline{L} = L/I_0$ удовлетворяет, очевидно, условиям теоремы и для нее справедливо соотношение $[\overline{A}, \overline{B}^i] \subseteq \overline{B}$, где $\overline{A} = (A + I_0)/I_0$, $\overline{B} = (B + I_0)/I_0$. Но тогда ввиду выбора числа i алгебра L/I_0 разрешима. Поскольку идеал I_0 разрешим, то разрешимой будет и алгебра L, что невозможно. Докажем теперь, что подалгебра L_k неразрешима, считая доказанной неразрешимость подалгебры L_{k-1}. Пусть, напротив, подалгебра L_k разрешима. Ввиду леммы 1 подалгебра $L_k = A_k + B = [A_{k-1}, B^i] + B$ содержит (разрешимый) идеал I_k алгебры L такой, что $A_k \subseteq I_k$. В фактор-алгебре $\overline{L} = L/I_k$ выполняется, очевидно, соотношение $[\overline{A}_{k-1}, \overline{B}^i] \subseteq \overline{B}$, где $\overline{A}_{k-1} = (A_{k-1} + I_k)/I_k$, $\overline{B} = (B + I_k)/I_k$. Отсюда следует, что подалгебра L_{k-1} разрешима (ввиду выбора числа i). Это противоречит индуктивному предположению о неразрешимости L_{k-1}.

Покажем теперь, что

$$[[A_{k-1}, B^i], [A_{k-1}, B^i]] \subseteq [A_{k-s}, B^{(s+1)i}, A_{k-s}] + B, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{13}$$

Для подалгебры $L_{k-1} = A_{k-1} + B$ в силу соотношения (1) имеем

$$[[A_{k-1}, B^i], [A_{k-1}, B^i]] \subseteq [A_{k-1}, B^{i+1}] + [A_{k-1}, B^{2i}, L_{k-1}] + B^2.$$

Далее, $[A_{k-1}, B^{2i}, L_{k-1}] = [A_{k-1}, B^{2i}, A_{k-1} + B] \subseteq [A_{k-1}, B^{2i}, A_{k-1}] + [A_{k-1}, B^{2i}, B]$. Однако $[A_{k-1}, B^{i+1}] \subseteq [A, B^{i+1}] \subseteq B$ и аналогично $[A_{k-1}, B^{2i}] \subseteq B$ (так как $2i \geqslant i + 1$). Но тогда из предыдущих включений получим $[[A_{k-1}, B^i], [A_{k-1}, B^i]] \subseteq [A_{k-1}, B^{2i}, A_{k-1}] + B$, что доказывает соотношение (13) для $s = 1$. Пусть соотношение (13) доказано для $s - 1$, т. е.

$$[[A_{k-1}, B^i], [A_{k-1}, B^i]] \subseteq [A_{k-(s-1)}, B^{si}, A_{k-(s-1)}] + B.$$

Так как $A_{k-(s-1)} \subseteq [A_{k-s}, B^i] + B$, то

$$[A_{k-(s-1)}, B^{si}, A_{k-(s-1)}] \subseteq [A_{k-(s-1)}, B^{si}, [A_{k-s}, B^i] + B].$$

Правая часть этого соотношения, очевидно содержится в сумме

$$[A_{k-(s-1)}, B^{si}, [A_{k-s}, B^i]] + [A_{k-(s-1)}, B^{si}, B]. \tag{14}$$

Заметим, что ввиду (1)

$$[[A_{k-(s-1)}, B^{si}], [A_{k-s}, B^{i}]] \subseteq [A_{k-s}, B^{si+1}] + [A_{k-s}, B^{i+1}] + \\ + [A_{k-s}, B^{si+i}, L_{k-s}] + B^2$$

(здесь мы учли, что $A_{k-s} \supseteq A_{k-(s-1)}$). Поскольку $[A_{k-s}, B^{si+1}] \subseteq B$, $[A_{k-s}, B^{i+1}] \subseteq B$, $L_{k-s} = A_{k-s} + B$, то

$$[[A_{k-(s-1)}, B^{si}], [A_{k-s}, B^{i}]] \subseteq B + [A_{k-s}, B^{si+i}, A_{k-s}] + [A_{k-s}, B^{si+i}, B].$$

Последнее слагаемое этой суммы содержится в B и потому

$$[[A_{k-(s-1)}, B^{si}], [A_{k-s}, B^{i}]] \subseteq B + [A_{k-s}, B^{i(s+1)}, A_{k-s}].$$

Поскольку второе слагаемое из суммы (14) содержится в подалгебре B, то из предыдущих соотношений получим (13).

При $s = k$ из (13) получим соотношение

$$[[A_{k-1}, B^{i}], [A_{k-1}, B^{i}]] \subseteq [A_0, B^{(k+1)i}, A_0] + B.$$

Выберем число k так, чтобы $(k+1)i > c(B)$. Тогда из предыдущего включения следует $[[A_{k-1}, B^{i}], [A_{k-1}, B^{i}]] \subseteq B$. Отсюда вытекает, что в подалгебре $L_k = [A_{k-1}, B^{i}] + B$ для K-подпространства $N = [A_{k-1}, B^{i}] + B^{i+1}$ и подалгебры B выполняются соотношения $[N, N] \subseteq B$, $[N, B] \subseteq N$, $L_k = N + B$. В силу леммы 3 подалгебра L_k разрешима, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Примечание. В лемме 3 и в теореме основное поле K можно, очевидно, заменить на ассоциативно-коммутативное кольцо R с единицей, элемент 2 которого обратим.

В связи с доказанной теоремой и упомянутыми выше результатами работ [1—4] отметим, что в теории групп активно разрабатывается аналогичная проблематика, связанная с изучением групп, разложимых в произведение двух или большего числа перестановочных нильпотентных подгрупп (по этому поводу см. [5]).

1. *Кострикин А. И.* Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1982.— № 2.— С. 5—8.
2. *Pillen C.* Die Summe einer abelschen und einer nilpotenten Lie—Algebra ist auslösbar/Results Math.— 1987.— **11**, N 1—2.— S. 117—121.
3. *Панюков В. В.* О разрешимости конечномерной алгебры Ли положительной характеристики // Успехи мат. наук.— 1990.— **45**, № 4.— С. 163—164.
4. *Петравчук А. П.* Алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 3.— С. 385—388.
5. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1987.— 206 с.

Получено 26.04.91