УДК 512.544

Л. А. КУРДАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т),
Н. Ф. КУЗЕННЫЙ, канд. физ.-мат. наук (НПО «Горсистемотехника», Киев),
Н. Н. СЕМКО, канд. физ.-мат. наук (НИИ педагогики УССР, Киев)

Группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп

Конструктивно описаны локально почти разрешимые группы с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп.

Конструктивно описані локально майже розв'язні групи з щільною системою нескінченних майже нормальних підгруп.

Подгруппу H группы G будем называть почти нормальной в G, если H нормальна в некоторой подгруппе конечного индекса. Другими словами, подгруппа H тогда и только тогда почти нормальна, когда она имеет конечное множество сопряженных. Будем говорить, что группа G обладает плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп, если для любой пары подгрупп $A < B$, где A бесконечна и не максимальна в B, существует почти нормальная подгруппа C, расположенная между ними, т. е. $A \leqslant C \leqslant B$. Если отказаться от требования бесконечности подгруппы A, то получим определение групп с плотной системой почти нормальных подгрупп. Группы такого рода изучались в работе [1]. С другой стороны, класс групп с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп содержит группы, в которых всякая бесконечная подгруппа почти нормальна. Группы такого рода изучались в [2]. Ясно, что бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны, обладает плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп. Такие группы, лежащие за пределами класса локально почти разрешимых групп, могут быть устроены весьма сложно, как показывает работа А. Ю. Ольшанского [3], и пока нет подходов к их описанию. Поэтому в данной работе изучение групп с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп будем проводить при дополнительном условии их локальной почти разрешимости.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс групп с плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп, через $L(\sigma\mathfrak{F})$ — класс локально почти разрешимых групп. Если G — группа, то положим $FC(G) = \{x \in G \,\|\, G : C_G(X) \,\| < \infty\}$. Это множество является характеристической подгруппой G; ее называют FC-центром G (см., например, [4], § 4.3).

Лемма 1. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $g \in G$, $|g|$ бесконечен. Тогда $g \in FC(G)$.*

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 1 из работы [1].

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $H \lhd G$. Если H бесконечна, то G/H обладает плотной системой почти нормальных подгрупп.*

Утверждение леммы очевидно.

Лемма 3. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $g \in G$. Если G включает в себя подгруппу $A = \underset{\lambda\in\Lambda}{\times} F_\lambda$, $F_\lambda \neq \langle 1\rangle$, F_λ — $\langle g\rangle$-допустимая подгруппа, $\lambda \in \Lambda$, и множество Λ бесконечно, то $g \in FC(G)$.*

Доказательство. Пусть $\langle x\rangle = \langle g\rangle \cap A$, $\Lambda \setminus \operatorname{Supp} x = \Lambda_1$. Тогда $\langle g\rangle \cap A_1 = \langle 1\rangle$, где $A_1 = \underset{\lambda\in\Lambda_1}{\times} F_\lambda$ и множество Λ_1 бесконечно. Пусть M_1, M_2 — бесконечные подмножества Λ_1 со свойствами $M_1 \cup M_2 = \Lambda_1$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Далее, пусть M_3 (соответственно M_4) — бесконечное подмножество M_1 (соответственно M_2), для которого $M_1 \setminus M_3$ (соответственно $M_2 \setminus M_4$) бесконечно. Подгруппа $\langle g\rangle \underset{\lambda\in M_3}{\times} F_\lambda$ (соответственно $\langle g\rangle \underset{\lambda\in M_4}{\times} F_\lambda$) бесконечна и не максимальна в $\langle g\rangle \underset{\lambda\in M_1}{\times} F_\lambda$ (соответственно $\langle g\rangle \underset{\lambda\in M_2}{\times} F_\lambda$). Поэтому существует почти нормальная в G подгруппа H_1 (соответственно H_2), расположенная между ними. Имеем тогда $\langle g\rangle \leqslant H_1 \cap H_2 \leqslant \langle g\rangle \underset{\lambda\in M_1}{\times} F_\lambda \cap$

$\cap\langle g\rangle \underset{\lambda\in M_2}{\times} F_\lambda = \langle g\rangle$. Так как пересечение двух почти нормальных подгрупп является почти нормальной подгруппой, то $\langle g\rangle$ почти нормальна. Это означает, что индекс $|G:N_G(\langle g\rangle)|$ конечен. Поскольку конечен и $|N_G(\langle g\rangle):C_G(g)|$, то конечен индекс $|G:C_G(g)|$. Следовательно, $g\in FC(G)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G\in\mathfrak{X}\cap L(\mathfrak{S}\mathfrak{F})$. Если G включает в себя периодическую подгруппу, не являющуюся черниковской, то G — FC-группа.*

Доказательство. Из условий вытекает, что G включает в себя максимальную периодическую подгруппу T, не являющуюся черниковской. Из теоремы В. П. Шункова [5] следует тогда, что T включает в себя подгруппу $A = \underset{u\in\mathbb{N}}{\otimes}\langle a_n\rangle$, где a_n — простое число. Пусть C — максимальная абелева подгруппа T, включающая в себя A. Из леммы 3 получаем соотношение $C\leqslant FC(G)$, в частности $P = FC(G)\cap T$ не является черниковской. Предположим, что $T\leqslant FC(G)$. Выберем p-элемент $y\in T\setminus FC(G)$, p — простое число. Пусть R — максимальная нормальная локально разрешимая подгруппа P. Предположим сначала, что R не является черниковской. Из теоремы 1 работы Д. И. Зайцева [6] вытекает тогда существование в подгруппе R абелевой $\langle y\rangle$-допустимой подгруппы D, не являющейся черниковской. Тогда либо для некоторого простого числа qD включает в себя $\langle y\rangle$-допустимую счетную элементарную абелеву подгруппу E, либо D включает в себя $\langle y\rangle$-допустимую подгруппу $\underset{n\in\mathbb{N}}{\times} F_n$, где F_n — конечная элементарная абелева q_n-подгруппа, $q_n\neq q_k\neq p$. Рассмотрим первый случай. Если $q\neq p$, то используя теорему Машке (см. например, [7], теорема 20.2.2), нетрудно получить разложение $E=\underset{n\in\mathbb{N}}{\times} E_n$, где E_n — конечная $\langle y\rangle$-допустимая подгруппа. Пусть теперь $p=q$, $\alpha_1\in E$, $L_1 = \langle a_1\rangle^{\langle y\rangle}$. Тогда $E = L_1\times K_1$. Положим $Q_1 = \bigcap_{x\in\langle y\rangle} K_1^x$. Так как каждая из подгрупп K_1^x имеет в E конечный индекс, а $\langle y\rangle$ конечна, то индекс $|E:Q_1|$ конечен. В частности, Q_1 бесконечна. Так как $Q_1\leqslant K_1$, то $L_1\cap Q_1=\langle 1\rangle$. Пусть $a_2\in Q_1$, $L_2=\langle c_2\rangle^{\langle y\rangle}$. Тогда $L_1\cap L_2=\langle 1\rangle$. Снова $E = L_1L_2\times K_2$, индекс $|E:K_2|$ конечен, а потому и подгруппа $Q_2 = \bigcap_{x\in\langle y\rangle} K_2^x$ имеет в L конечный индекс. Аналогично рассуждая, получаем бесконечное семейство таких неединичных $\langle y\rangle$-допустимых подгруп $\{L_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, что $\langle L_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle = \underset{n\in\mathbb{N}}{\times} L_n$.

Таким образом, в любом из перечисленных случаев из леммы 3 получаем включение $y\in FC(G)$. Рассмотрим теперь случай, когда R — черниковская подгруппа. Так как все элементы конечного порядка FC-группы составляют в ней подгруппу (см., например, [4], теорема 4.32), то $P\lhd G$, а значит, и $R\lhd G$. Из условий вытекает, что фактор-группа P/R не является черниковской. Пусть $R\neq b_1R\in P/R$, $U_1/R=\langle b_1\rangle^T R/R$. Так как $U_1/R\cap C_{T/R}(U_1/R)$ — абелева T-допустимая подгруппа, то $C_{T/R}(U_1/R)\cap U_1/R=\langle 1\rangle$. Пусть $R\neq b_2R\in C_{T/R}(U_1/R)$, $U_2=\langle b_2\rangle^T R/R$. Имеем, $U_1\cap U_2 = R$ и $(U_1U_2/R)\cap C_{T/R}(U_1U_2/R)=\langle 1\rangle$. Рассуждая аналогично, построим такое семейство $\{U_n/R\mid n\in\mathbb{N}\}$ T-допустимых подгрупп, что $\langle U_n/R\mid n\in\mathbb{N}\rangle = \underset{n\in\mathbb{N}}{\times} U_n/R$. Из леммы 3 получаем включение $yR\in FC(G/R)$. В частности, подгруппа $C_1/R = G_{G/R}(yR)$ имеет в G/R конечный индекс. Положим $P_1 = P\cap C_1\cap C_P(R)$. Так как периодическая группа автоморфизмов черниковской группы является черниковской (см., например, [4], теорема 3.29), то P/P_1 — черниковская группа.

В частности, P_1 не является черниковской, а потому и P_1/R не будет черниковской. Но тогда P_1/R включает в себя абелеву подгруппу A_1/R, не являющуюся черниковской (В. П. Шунков [5]). Подгруппа A_1 является нильпотентной ступени $\leqslant 2$ и $\langle y\rangle$-допустимой. Используя опять теорему Д. И. Зайцева [6], получаем существование $\langle y\rangle$-допустимой абелевой подгруппы A_2, не являющейся черниковской. Как и выше, можно теперь докавать включение $y \in FC(G)$. Полученное противоречие доказывает включение $T \leqslant FC(G)$. Но тогда T — периодическая часть $FC(G)$, в частности $T \lhd G$. Отсюда следует, что всякий элемент конечного порядка группы G содержится в $FC(G)$. Вместе с леммой 1 это доказывает равенство $G = FC(G)$. Лемма доказана.

Следующие две леммы доказываются точно так же, как аналогичные леммы из работы [1].

Лемма 5. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если G — FC-группа, то G конечна над центром.*

Лемма 6. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $g \in G$, $|g|$ конечен. Если $C_G(g)$ содержит элементы бесконечного порядка, то $g \in FC(G)$.*

В дальнейшем через $t(G)$ будем обозначать наибольшую периодическую подгруппу G.

Следствие. *Если $G \in \mathfrak{X}$, $t(G) = \langle 1 \rangle$, то фактор-группа $G/FC(G)$ конечна.*

Пусть A — абелева группа, $G \leqslant \operatorname{Aut} A$. Будем говорить, что G — рационально неприводимая группа автоморфизмов A, если любая неединичная G-допустимая подгруппа A определяет периодическую фактор-группу (см., например, [4, с. 80]). Если $G = \langle \varphi \rangle$, то будем говорить, что φ — рационально неприводимый автоморфизм.

Лемма 7. *Пусть $G = A \leftthreetimes \langle g \rangle$, A — абелева группа без кручения, $|g| = p$ — простое число, $C_A(g) = \langle 1 \rangle$. Если $G \in \mathfrak{X}$, то A — свободная абелева подгруппа ранга $p-1$, а g индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм.*

Доказательство. Покажем, что G обладает плотной системой почти нормальных подгрупп, тогда это утверждение будет вытекать из леммы 7 работы [1]. Пусть $F < E$ — произвольные подгруппы G, причем F не максимальна в E. Если F бесконечна, то лемма доказана. Пусть F конечна, тогда $F = \langle y \rangle$, $|y| = p$. Так как $E \neq F$, то E содержит элемент a бесконечного порядка. Имеем, $y = bg^s$, где $b \in A$, $1 \leqslant s < p$. Тогда E включает в себя подгруппу $A_0 = \langle a \rangle^{\langle y \rangle} = \langle a \rangle^{\langle g \rangle} = \langle a \rangle^G$, причем A_0 — конечнопорожденная абелева подгруппа. Пусть $q \neq p$, q — простое число. E включает в себя бесконечную подгруппу $A_0^{q^2} \leftthreetimes \langle y \rangle$, которая не максимальна в $A_0 \leftthreetimes \langle y \rangle$, поэтому существует почти нормальная в G подгруппа H, расположенная между ними. Но тогда и $F \leqslant H \leqslant E$. Лемма доказана.

Как и в работе [1], отсюда можно получить следующий результат.

Лемма 8. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $t(G) = \langle 1 \rangle$, $G \neq FC(G)$. Тогда $G = A \leftthreetimes \langle g \rangle$, $|g| = p$ — простое число, $C_G(g) = \langle g \rangle$, A — свободная абелева группа ранга $p-1$, причем g индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм.*

Следствие. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $G \neq FC(G)$. Если G бесконечна, а всякая ее периодическая подгруппа конечна, то G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что $G/F = A/F \leftthreetimes \langle gF \rangle$ — группа из леммы 8. Наоборот, во всякой группе, имеющей такое строение, всякая бесконечная подгруппа почти нормальна.*

Второе утверждение следствия вытекает из теоремы 1 работы [2].

Лемма 9. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $G \neq FC(G)$, G — непериодическая группа, а всякая ее периодическая подгруппа является черниковской. Тогда $G = P \cdot B$, где $P \leqslant \xi(G)$, P — квазициклическая подгруппа, $H = P \cap B$ конечна, B/H — группа типа (3) из теоремы работы [1]. Обратно, всякая группа, имеющая такое строение, принадлежит классу $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Обозначим через T максимальную периодическую подгруппу G, а через P — ее делимую часть. Если a — элемент бесконечного порядка, то $C_G(a)$ имеет в G конечный индекс ввиду леммы 1, так что $P \leqslant C_G(a)$. Из леммы 6 следует тогда включение $P \leqslant FC(G)$. Пусть $g \in G$, $|g|$ конечен. Подгруппа $H = \langle a \rangle^G$ является конечнопорожденной FC-группой, поэтому она включает в себя G-допустимую подгруппу L без кручения. Фактор-группа G/L имеет, ввиду леммы 2, плотную систему почти нормальных подгрупп и включает в себя бесконечную периодическую подгруппу. Из леммы 3 работы [1] следует тогда, что G/L — FC-группа. Но тогда $PL/L \leqslant \xi(G/L)$. В частности, $[g, P] \leqslant L$. По P — характеристическая подгруппа $FC(G)$, т. е. $P \lhd G$, а потому $[g, P] \leqslant P$, значит, и $[g, P] \leqslant P \cap L = \langle 1 \rangle$. Таким образом, $P \leqslant \xi(G)$. Если P не квазициклическая, то $P = P_1 \times P_2$, где P_1, P_2 — бесконечны. Но тогда G/P_i — группа с плотной системой почти нормальных подгрупп, обладающая бесконечной периодической подгруппой. Из леммы 3 работы [1] следует тогда, что G/P_i — FC-группа. Из вложения $G \leqslant G/P_1 \times G/P_2$ получаем, что и G — FC-группа.

Фактор-группа G/P имеет плотную систему почти нормальных подгрупп, а потому будет группой типа (3) из теоремы работы [1]. В частности, G/P — конечнопорожденная почти абелева группа. Поэтому существует конечнопорожденная подгруппа B со свойством $G = P \cdot B$. Очевидно, $H = P \cap B$ конечна, $B/H = B/P \cap B \cong PB/P = G/P$.

Наоборот, пусть группа G имеет указанное строение, $A < B$, A бесконечна и не максимальна в B. Если $A \leqslant FC(G)$, то так как $FC(G)$ конечна над центром и индекс $|G : FC(G)|$ конечен, A почти нормальна в G. Если A содержит элементы бесконечного порядка, то A включает в себя G-допустимую конечнопорожденную подгруппу u, определяющую периодическую фактор-группу. Эта фактор-группа является конечным расширением квазициклической подгруппы, входящей в центр. В частности, всякая подгруппа G/U почти нормальна в G/U, т. е. почти нормальна и A. Если A периодическая, то $P \leqslant A$, а так как G/P обладает плотной системой почти нормальных подгрупп, то лемма доказана.

Если K — делимая черниковская группа, $G \leqslant \operatorname{Aut} K$. Назовем G p-адически неприводимой, если K не включает в себя собственных делимых G-допустимых подгрупп. Если $G = \langle \varphi \rangle$, то говорят, что φ действует на K p-адически неприводимо.

Л е м м а 10. *Пусть G — черниковская группа, K — ее делимая часть. Если $G \in \mathfrak{X}$, $FC(G) \neq G$, то $G \neq C_G(K)$. Если $g \in G \setminus C_G(K)$, то элемент g индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать, что $C_G(K) = FC(G)$. Предположим, что P — собственная $\langle g \rangle$-допустимая подгруппа K. Из теоремы 1 работы Д. И. Зайцева [8] следует существование такой $\langle g \rangle$-допустимой подгруппы R, что $K = PR$ и пересечение $P \cap R$ конечно. Фактор-группы $\langle g \rangle K/P$ и $\langle g \rangle K/R$ обладают, ввиду леммы 2, плотной системой почти нормальных подгрупп, и, будучи бесконечными периодическими, являются, ввиду леммы 3 работы [1], конечными над центрами. Из вложения $\langle g \rangle K/P \cap R \leqslant \langle g \rangle K/P \times \langle g \rangle K/R$ вытекает, что $\langle g \rangle K/P \cap R$ — FC-группа, а из конечности $P \cap R$ получаем, что и $\langle g \rangle K$ — FC-группа. Но тогда $K \leqslant \zeta(\langle g \rangle K)$, а это противоречит выбору элемента g. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть G — черниковская группа. Если $G \in \mathfrak{X}$, $G \neq FC(G)$, то всякая бесконечная подгруппа G почти нормальна.*

В самом деле, пусть H — бесконечная подгруппа G, K — делимая часть G. Если $H \leqslant C_G(K) = FC(G)$, то H почти нормальна в G. Если $H \nleqslant C_G(K)$, то из леммы 10 получаем $K \leqslant H$. В частности, индекс $|G : H|$ конечен.

С л е д с т в и е 2. *Пусть G — черниковская группа, K — ее делимая часть, $K = C_G^{\downarrow}(K)$. Если $G \in \mathfrak{X}$, $G \neq F((G)$, то G — группа одного из следующих типов:*

1) *$G = K\langle x \rangle$ — p-группа, p — простое число, $x^p \in K$, ранг K равен $p - 1$, x индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм;*

2) *$G = K \leftthreetimes F$, K — p-группа, p — простое число, F — циклическая подгруппа, порядок которой взаимно прост с p, каждый неединичный элемент F индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм, в частности ранг K не превышает $q - 1$ для любого $q \in \Pi(F)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 10 получаем, что K — p-подгруппа, p — простое число, и всякий элемент $G \setminus K$ индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм. Из теоремы 6.1 работы Хартли [9] получаем тогда, что G/K — циклическая группа и либо $|G/K| = p$, либо G/K — p'-группа. В первом случае $G = K\langle x \rangle$, $x^p \in K$, и из результатов работы

Д. И. Зайцева [8] (§ 3, п. 1) получаем, что ранг K равен $p-1$. Если G/K — p'-группа, то $G = K \leftthreetimes F$. Из леммы 3.6 работы Хартли [9] следует также, что каждый неединичный элемент F действует на нижнем слое K без неподвижных точек. Отсюда и получаем ограничение на ранг K. Следствие доказано.

Полученные выше результаты позволяют дать описание строения групп из класса $\mathfrak{X} \cap L(\mathfrak{S}\mathfrak{F})$.

Теорема. *Бесконечная локально почти разрешимая группа тогда и только тогда обладает плотной системой бесконечных почти нормальных подгрупп, когда* G — *группа одного из следующих типов*:

1) G *конечна над центром*;

2) $G = K\langle x\rangle$ — *черниковская p-группа, p — простое число,* $x^p \in K$, x *индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм, ранг K равен* $p-1$;

3) $G = K \leftthreetimes F$ — *черниковская группа, K — p-группа, F — циклическая p'-подгруппа, каждый неединичный элемент F индуцирует на K p-адически неприводимый автоморфизм, в частности ранг K не превышает* $q-1$ *для любого* $q \in \Pi(F)$.

4) $G = A \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|b| = p$ — *простое число,* $C_G(b) = \langle b\rangle$, A — *свободная абелева группа ранга* $p-1$, b *индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм*;

5) G *включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что* G/F — *группа типов 2—4*;

6) $G = P\cdot B$, $P \leqslant \zeta(G)$, P — *квазициклическая подгруппа,* $H = P \cap B$ *конечна,* $B/H = L$ *включает в себя такую конечную нормальную подгруппу* U, *что* $L/U = V/U \leftthreetimes \langle gU\rangle$ — *группа типа* (4), *любая циклическая подгруппа* $W = \langle g, U\rangle$, *не входящая в* U, *максимальна в* W, *в частности* W — *группа одного из следующих типов*:

а) W — *p-группа с циклической максимальной подгруппой*;

б) $W = \langle a\rangle\langle c\rangle$, $a^q = c^{p^n} = 1$, $\langle c\rangle \lhd W$;

в) $W = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle c\rangle$, $a^q = c^{p^n} = 1$, $C_W(c) = \langle c\rangle$;

г) $W = D \leftthreetimes \langle c\rangle$, *$D$-элементарная абелева q-подгруппа,* $c^{p^n} = 1$, c *действует на D неприводимо; p, q — различные простые числа.*

1. *Курдаченко Л. А., Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 1. — С. 42—46.
2. *Семко Н. Н., Левищенко С. С., Курдаченко Л. А.* О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика.— 1983.— № 10.— С. 57—63.
3. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— 44, № 2.— С. 309—321.
4. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt. I.— Berlin: Springer, 1972.— 210 p.
5. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— 9, № 5.— С. 579—615.
6. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР.— 1974.— 214, № 6.— С. 1250—1253.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
8. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исслед. групп по заданным свойствам подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 72—130.
9. *Hartley B.* A dual approach to Cernikov modules // Math. Proc. Gambridge Phil. Soc.— 1977.— 82, N 2.— P. 215—239.
10. *Черников С. Н.* О бесконечных специальных группах с конечным центром // Мат. сб.— 1945.— 17, № 1.— С. 106—130.

Получено 07.08.90