

УДК 519.41/47

В. А. КРЕКНИИ, И. И. МЕЛЬНИК, А. В. СПИВАКОВСКИЙ,
кандидаты физ.-мат. наук (Херсон. пед. ин-т)

Конечные 2-группы со сверхдополняемой циклической подгруппой

Дано описание конечных 2-групп, для которых некоторая циклическая подгруппа сверхдополняема и имеет инвариантное абелево дополнение во всей группе.

Дано опис скінченних 2-груп, для яких деяка циклічна підгрупа наддоповнювана, причому вона має інваріантне абелеве доповнення у всій групі.

Подгруппу B группы G будем называть сверхдополняемой в G , если любая подгруппа, содержащая B , имеет в G дополнение. Если группа G содержит сверхдополняемую циклическую подгруппу X , то будем называть G X -факторизуемой группой. Ввиду [4] конечная p -группа ($p > 2$) является X -фак-

© В. А. КРЕКНИИ, И. И. МЕЛЬНИК, А. В. СПИВАКОВСКИЙ, 1991

торизуемой тогда и только тогда, когда для X существует элементарное абелево дополнение. Оказалось, что для $p = 2$ X -факторизуемые группы имеют довольно сложное строение.

Конечную X -факторизуемую 2-группу G будем называть XA -факторизуемой, если в G существует инвариантное абелево дополнение к X . Таким образом, всякая XA -факторизуемая 2-группа G имеет вид $G = A \times X$, где A — абелева подгруппа.

В настоящей работе дается описание конечных XA -факторизуемых 2-групп. Основные результаты изложены в теоремах 1—3. Все неопределяемые понятия и обозначения см. в [1, 3].

1. **Примеры XA -факторизуемых групп.** Всякое полупрямое произведение конечной элементарной группы D на циклическую группу X является XA -факторизуемой группой. В частности, группа диэдра 8-го порядка — XA -факторизуемая группа. Примером X -факторизуемой группы, но не являющейся XA -факторизуемой, служит группа диэдра 16-го порядка. Следующая группа будет играть особую роль в дальнейшем изложении.

Пусть $R = \langle a, x \rangle$ — группа 64-го порядка, заданная определяющими соотношениями $a^4 = x^4 = b^4 = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^2 \cdot b^3$, $[a, b] = 1$. Подгруппа $A = \langle a, b \rangle$ является абелевой и инвариантной в R , причем $R = A \times X$, где $X = \langle x \rangle$. В группе R лишь три подгруппы $M = \langle x, b \rangle$, $N = \langle x, a^2 \rangle$ и $L = \langle x, b^2 \rangle$ содержат X . Легко видеть, что дополнением к M в группе R является циклическая подгруппа $\langle a^3 \cdot x^2 \rangle$; дополнением к N — циклическая подгруппа 4-го порядка $\langle a \cdot x \rangle$ и, наконец, дополнением к подгруппе L в группе R является подгруппа 8-го порядка $\langle a, bx^2 \rangle$. Следовательно, подгруппа X — сверхдополняема в группе R .

Покажем теперь, что подгруппа X не имеет в R элементарного дополнения. Допустим, что $R = D \cdot X$, где D — элементарная подгруппа. Так как инволюция x^2 из X не принадлежит центру группы R , то D является инвариантной в R . Но тогда коммутант $R' \subset D$. Отсюда вытекает, что $b = [a, x] \in D$. Но так как $o(b) = 4$, то получаем противоречие.

2. **Свойства XA -факторизуемых групп.** Пусть G — произвольная XA -факторизуемая группа. Выбираем систему образующих в G так, что $G = \langle a_1, \dots, a_i, x \rangle$, $a_i \in A$ и $X = \langle x \rangle$. Коммутаторы вида $[a, x^k] = [a, x, \dots, x]$ будем называть простейшими коммутаторами. Если для любого i элемент $[a_i, x]$ является инволюцией, то коммутант G' — элементарная подгруппа.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/G'$ и обозначим через \bar{g} образ элемента $g \in G$ при указанной факторизации. Так как \bar{G} — абелева группа, то $\bar{G} = \bar{A} \times \bar{X}$, причем \bar{A} — элементарная подгруппа. Отсюда получаем $A = \langle a_1, \dots, a_i \rangle \cdot G'$. Из этого равенства вытекает, что если для каждого i элемент a_i является инволюцией, то A — элементарная подгруппа.

Пусть G — произвольная XA -факторизуемая группа с двумя образующими. Так как \bar{X} — сверхдополняемая подгруппа в \bar{G} , то \bar{A} является элементарной подгруппой 2-го порядка. Отсюда вытекает, что G' максимальна в A и $G' \cdot X$ максимальна в G . Следующее очевидное утверждение будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть произвольная конечная 2-группа K представима в виде $K = F \cdot Z$, где Z — циклическая, а F — инвариантная в K . Тогда любая подгруппа M из K , имеющая с F тривиальное пересечение, является циклической, причем $|M| \leq |Z|$.

Пусть $G = A \times X$ — произвольная конечная XA -факторизуемая 2-группа. Допустим, что подгруппа A содержит элемент a 4-го порядка. Рассмотрим дополнение D к подгруппе $\Omega_1(A) \cdot X$ в группе G . Согласно лемме 1 $D = \langle d \rangle$ — циклическая подгруппа. Пусть $d = a \cdot x^a$, где $a \in A$. Тогда $G = \langle a, \Omega_1(A), X \rangle$, причем $o(a) \geq 4$, ибо в противном случае A — элементарная подгруппа. С помощью элементов из $\Omega_1(A)$ множество $\{a, x\}$ дополняем до минимальной системы образующих $\{a, u_1, \dots, u_i, x\}$ группы G .

Такую систему образующих будем называть приведенной системой образующих. Положим $A(l) = (a, u_1, \dots, u_l)$, тогда $A = A(l) \cdot G'$.

Лемма 2. Пусть $G = \langle a, x \rangle$ — ХА-факторизуемая группа с двумя образующими, причем $o(a) \geq 4$. Тогда элемент a можно выбрать в A так, что $uyu = a^{-1}$, где y — инволюция подгруппы X .

Доказательство. Рассмотрим факторизацию группы $G = G' \times X \times M$, где $M = \langle u \rangle$ и $u^2 = 1$. Для элемента a получаем равенство $a = ug \cdot x^\alpha$, поэтому $u = g \cdot x^\alpha \cdot a^{-1}$. Отсюда выводим $1 = u^2 = x^{2\alpha} \cdot a_1$, где $a_1 \in A$. Но тогда $x^{2\alpha} = 1$, т. е. $x^\alpha \in \langle y \rangle$. Если $x^\alpha = 1$, то $u \in A$ и $G = \langle u, x \rangle$. Но тогда A — элементарная подгруппа, что недопустимо.

Допустим, что $a = ug \cdot y$, тогда $1 = u^2 = auyg^{-1} \cdot auyg^{-1} = ag_1 \cdot y \cdot ag_1 \cdot y$, где $g, g_1 \in G'$. Поэтому, если $t = a \cdot g_1$, то $yty = t^{-1}$, причем $o(t) \geq 4$. Действительно, $G = \langle t, x \rangle$, и если бы $t^2 = 1$, то подгруппа A была бы элементарной, что невозможно. Лемма доказана.

Будем предполагать, что G — произвольная ХА-факторизуемая группа.

Теорема 1. Подгруппа A ХА-факторизуемой группы G не содержит элементов 8-го порядка.

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример и пусть $\{a, u_1, \dots, u_l, x\}$ — приведенная система образующих группы G , причем $o(a) \geq 8$ и $l \geq 1$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle a, x \rangle$ и пусть $F = D \cap A$, тогда $F \triangleleft G$ и $D = F \times X$. Так как D — ХА-факторизуемая группа и $|D| \leq |G|$, то получаем противоречие с минимальностью группы G . Поэтому в приведенной системе образующих группы G не должно быть инволюций, т. е. G порождается элементами a и x , причем $o(a) \geq 8$. Подгруппа $H = G' \cdot X$ является ХА-факторизуемой и $H \neq G$, поэтому $\text{exr } G' \leq 4$. А так как $a^2 \in G'$, то получаем $o(a) = 8$ и $\text{exr } G' = 4$.

Докажем, что $o(x) \geq 4$. Допустим, что $x^2 = 1$. Тогда по лемме 2 $axa = a^{-1}$, поэтому $T = \langle a \rangle \triangleleft G$. Отсюда следует, что $G = T \times X$, причем $\Omega_1(T) = \langle a^4 \rangle$. Пусть M — дополнение к подгруппе $\langle a^4 \rangle \cdot X$ в группе G . По лемме 1 M — циклическая подгруппа и $|M| \leq |X| \leq 2$. А так как $|M| = 4$, то получили противоречие. Следовательно, в минимальном контрпримере $o(x) = 2^m$, $m > 1$.

Для завершения доказательства теоремы необходимо установить следующие вспомогательные утверждения:

а). Пусть $K = M \times X$ — ХА-факторизуемая группа и M — циклическая подгруппа. Если $|M| > 2$, то $|X| = 2$.

б). Пусть K — произвольная конечная 2-группа. Если коммутант K' абелев, то верно тождество

$$[t, z^n] = [t, z]^n \cdot [t, z^{(2)}]^{C_n^2} \dots [t, z^{(n-1)}]^{C_n^{n-1}} \cdot [t, z^{(n)}].$$

в). Пусть $K = F \times X$ — произвольная конечная 2-группа и $F \neq \{1\}$ — элементарная, а X — циклическая подгруппы. Тогда ранг F не меньше класса nilпотентности группы K .

Доказательство а). Допустим, что $M = \langle f \rangle$ и $X = \langle x \rangle$, причем $o(f) = 2^k$, $k > 1$, и $o(x) = 2^m$, $m > 1$. Так как K — ХА-факторизуемая группа, то на основании леммы 2 получаем равенство $yfy = f^{-1}$, где y — инволюция из X . С другой стороны, $x^{-1} \cdot f \cdot x = f^{1+2^e}$ и по индукции получаем равенство $y \cdot f \cdot y = f^r$, где $r = 1 + 2^m \cdot \delta$, $\delta \in N$. Следовательно, $f^{-1} = f^r$, что дает сравнение $-1 \equiv r \pmod{2^k}$, т. е. $2^m \cdot \delta + 2 \equiv 0 \pmod{2^k}$. Если $m \geq 2$, то получаем противоречие.

б). Используя тождество для коммутаторов $[t, xy] = [t, y] \cdot [t, x] \times [t, x, y]$, методом математической индукции получаем требуемое равенство.

в). Обозначим через $c(K)$ класс nilпотентности группы K . Пусть $c(K) = 2$, тогда если ранг $F = 1$, то $K = F \times X$ и поэтому $c(K) = 1$, что невозможно. Допустим, что утверждение в) верно для любой группы K с условием: $c(K) \leq n$. Рассмотрим группу K , для которой $c(K) = n + 1$.

Пусть ее нижний центральный ряд имеет вид $K = K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_{n+1} \supset K_{n+2} = \{1\}$. Фактор-группа $K/K_{n+1} = \bar{F} \times \bar{X}$ имеет класс нильпотентности n . По индукционной посылке ранг $\bar{F} \geq n$. А так как $K_{n+1} \subset F$ и $K_{n+1} \neq \{1\}$, то ранг $F \geq n + 1$. Утверждение доказано.

Возвратимся теперь к рассмотрению контрпримера $G = \langle a, x \rangle$, где $o(\bar{a}) = 8$, $o(x) = 2^m$, $m > 1$. Пусть $n = 2^{m-1}$, тогда коммутатор $t = [a, x^{(n)}]^2 \neq 1$. Действительно, на основании леммы 2 $[a, y]^2 = (a^{-1}yay)^2 = a^4 \neq 1$. С другой стороны, согласно утверждению б) получаем равенство

$$[a, y]^2 = [a, x^{(n)}]^2 = ([a, x]^2 \cdot [a, x^{(2)}]^{c_n^2} \dots [a, x^{(n-1)}]^{c_n^{n-1}} \cdot [a, x^{(n)}])^2.$$

Так как $m > 1$, то все показатели коммутаторов в скобках, кроме последнего, четные. А поскольку $\text{exp } G' \leq 4$, то при возведении в квадрат все множители, кроме последнего, равны единице, поэтому элемент $t \neq 1$.

Подгруппа $H = G' \cdot X$ порождается элементами $[a, x]$ и x . Тогда класс нильпотентности фактор-группы $\bar{H} = H/\Omega_1(G')$ не меньше числа n . Далее, $\bar{H} = \bar{G}' \times \bar{X}$, где \bar{G}' и \bar{X} — образы подгрупп G' и X при указанной факторизации. Так как $\text{exp } G' \leq 4$, то \bar{G}' — элементарная подгруппа, причем \bar{X} изоморфна X . В силу утверждения в) $\text{rang } \bar{G}' \geq c(\bar{H}) \geq n$, следовательно $|\bar{G}'| \geq 2^n$, поэтому $[G : \Omega_1(G')] \geq 2^n$. Далее, $A = \langle a \rangle \cdot G'$, $a^2 \in G'$, $o(a) = 8$ и $\text{exp } G' = 4$, поэтому $\Omega_1(A) = \Omega_1(G')$, причем $[A : G'] = 2$. Таким образом, $[A : \Omega_1(A)] \geq 2^{n+1} = h$. Обозначим $N = \Omega_1(A) \cdot X$ и пусть M — дополнение к подгруппе N в группе G . Так как $M \cap A = \{1\}$, то по лемме 1 $|M| \leq |X|$. С другой стороны, $[G : N] \geq h$, поэтому $h \leq 2^m$, т. е. $n \leq m - 1$, что невозможно для $m > 1$. Таким образом, при условии существования минимального контрпримера, приходим к противоречию. Теорема 1 доказана.

Лемма 3. Для любой XA -факторизуемой группы $G = A \times X$ подгруппа A представима в виде $A = A(l) \times B$, где $B \subset G'$ и $A(l) = \langle a, u_1, \dots, u_l \rangle$.

Доказательство. Так как $A = A(l) \cdot G'$, то достаточно показать, что в G' подгруппа $S = G' \cap A(l)$ имеет дополнение. На основании теоремы 1 $\text{exp } A \leq 4$. Если $a^2 = 1$, то подгруппа A является элементарной. Поэтому будем предполагать, что приведенная система образующих группы G имеет вид $\{a, u_1, \dots, u_l, x\}$, где $o(a) = 4$.

Покажем, что $S = \langle a^2 \rangle$. Пусть $g \in S$, тогда для элемента g рассмотрим разложение $g = a^\alpha \cdot u_1^{\alpha_1} \dots u_l^{\alpha_l}$. Если α — нечетное число, то $G = \langle u_1, \dots, u_l, x \rangle$, что противоречит выбору системы образующих. Таким образом, α — четное число. Аналогично показывается, что и все другие показатели — четные числа, поэтому $g = a^{\alpha} \in \langle a^2 \rangle$. С другой стороны, $a^2 \in \Phi(A) \subset G'$ и тем самым доказано равенство $S = \langle a^2 \rangle$.

Обозначим через B подгруппу наибольшего порядка из коммутанта G' , имеющую с S тривиальное пересечение. Покажем, что $G' = S \times B$. Допустим, что существует элемент g из $G' \setminus S \cdot B$. Если $g^2 = 1$, то подгруппа $M = \langle g \rangle \cdot B$ имеет с S тривиальное пересечение. Действительно, пусть $a^2 = g \cdot b$, где $b \in B$. Тогда $g \in S \cdot B$, что невозможно. Так как $|M| > |B|$, получаем противоречие.

Пусть $o(g) = 4$, тогда по доказанному инволюция $g^2 \in S \cdot B$, поэтому $g^2 = s \cdot b$, где $s \in S$, $b \in B$. Ясно, что $b^2 = 1$. Покажем, что b не является квадратом никакого элемента из G' . Пусть $b = v^2$ и $v \in G'$. Тогда $s = g^2 \cdot v^2$. Если $s = 1$, то подгруппа M имеет тривиальное пересечение с S , и приходим к противоречию. Следовательно, $s = a^2$. В этом случае для группы G имеем систему образующих $\{agv, u_1, \dots, u_l, x\}$, в которой все элементы, кроме x , являются инволюциями из A , что невозможно. Теперь легко показать, что подгруппа $\langle b \rangle$ выделяется в B прямым множителем: $B = \langle b \rangle \times \langle v_2 \rangle \times \dots \times \langle v_k \rangle$.

Рассмотрим теперь подгруппу $L = \langle g, v_2, \dots, v_k \rangle$. Так как $g^2 = a^2 \cdot b$, то $g^2 \notin H = \langle v_2, \dots, v_k \rangle$, ибо в противном случае $a^2 \in B$. Таким образом,

$\langle g \rangle \cap H = \{1\}$. Допустим, что $\langle v_k \rangle \cap \langle g, v_2, \dots, v_{k-1} \rangle \neq \{1\}$. Тогда существует элемент $v_k^\alpha = g^\nu \cdot v_2^\delta \dots v_{k-1}^\beta \neq 1$. Если $g^\nu = 1$, то получаем противоречие. Поэтому $1 \neq g^\nu \in H$. Отсюда вытекает, что и $g^2 \in H$, что невозможно. Аналогично, для любого $i \in \{2, \dots, k-1\}$ получаем, что подгруппа $\langle v_i \rangle$ имеет тривиальное пересечение с подгруппой, порожденной всеми остальными элементами. Таким образом, $L = \langle g \rangle \times H$, где $o(g) = 4$. Следовательно, $|L| > |B|$.

Допустим, что $a^2 \in L$, тогда $a^2 = g^\nu \cdot v_2^\delta \dots v_k^\beta$. Ясно, что $\nu = 2$ и $b \in \langle H \rangle$, что по ранее доказанному невозможно. Получим $L \cap S = \{1\}$ и тем самым существование подгруппы L противоречит выбору подгруппы B . Таким образом, доказано равенство $G' = S \times B$, причем подгруппа $A = A(1) \times B$ и $B \subset G'$. Лемма доказана.

3. Строение XA -факторизуемых групп с двумя образующими. Пусть $G = A \rtimes X$ — произвольная XA -факторизуемая группа с двумя образующими $a \in A$ и $x \in X$. Будем предполагать, что $o(a) = 4$, так как в противном случае подгруппа A будет элементарной. На основании леммы 3 имеем равенства $A = \langle a \rangle \times B$ и $G' = \langle a^2 \rangle \times B$.

Лемма 4. Если $\exp B = 4$, то $o(x) = 2^k$, где k — число циклических сомножителей 4-го порядка в прямом разложении подгруппы A , причем $k \leq 2$.

Доказательство. Пусть D — дополнение к подгруппе $\Omega_1(A) \cdot X$ в группе G . Тогда порядок D равен 2^k . Согласно лемме 1 подгруппа D является циклической, причем $2^k = |D| \leq |X| = 2^m$. Допустим, что $|D| < |X|$, $D = \langle u \rangle$ и пусть $u = a_1 \cdot x^\alpha$, где $a_1 \in A$. Так как $o(u) = o(x^\alpha)$, то пусть $\alpha = r \cdot 2^{m-k}$, где r — нечетное число. Учитывая включение $\Omega_1(A) \subset G'$, получаем представление $G = \langle a_1, x^r \rangle$. Следовательно, не теряя общности, можно предполагать, что $u = a \cdot x^\alpha$, где $\alpha = 2^{m-k}$, $m > k$. Обозначим $b = [a, x]$, $z = x^\alpha$. Если $b^2 = 1$, то и коммутант G' является элементарной подгруппой. Так как $B \subset G'$, то получаем противоречие. Таким образом, $o(b) = 4$.

Рассмотрим подгруппу $H = G' \cdot X = \langle b, x \rangle$. Так как H — XA -факторизуемая группа, то по лемме 3 $H' = \langle b^2 \rangle \times B_1$ и $G' = \langle b \rangle \times L$. А так как $b^2 = [a^2, x] \neq a^2$, то $L = \langle a^2 \rangle \times B_1$, где $B_1 \subset B$. С другой стороны, $H' = [G', X]$, так как G' и X — абелевы подгруппы. Далее, $G_3 = [G', G] = [G', X] = H'$. Таким образом, $G_3 = \langle a^2 \rangle \times \langle b^2 \rangle \times B_1$, причем $b \notin G_3$. Отсюда вытекает, что $\Omega_1(A) \subset G_3$. Элемент b представим в виде $b = u^\nu \times v \times x^\delta$, где v — инволюция из A . Если ν — нечетное число, то $G = H$, что невозможно. Таким образом, $\nu = 2 \cdot t$. Далее, $[a, z^{-1}] \in G_3$ и $u = a \cdot z$, поэтому $u^2 \equiv z^2 \pmod{G_3}$, тогда $b \equiv z^{2t} \cdot x^\delta \pmod{G_3}$. Учитывая, что $G_3 \subset A$ и $b \in A$, имеем $z^{2t} \cdot x^\delta \in A \cap X = \{1\}$, т. е. $b \equiv 1 \pmod{G_3}$ или $b \in G_3$. Получили противоречие. Поэтому $o(x) = 2^k$.

Допустим, что $k \geq 3$. Подгруппа $G' \cdot X$ порождается элементами b и x , где $b = [a, x]$, причем $o(b) = 4$ и $G = \langle a, x \rangle$. Так как $G' = \langle a^2 \rangle \times B$, то группа G' содержит $k-1$ прямых циклических множителей 4-го порядка. Поэтому $o(x) = 2^{k-1}$, т. е. пришли к противоречию. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь группу 64-го порядка R , определение которой дано в п. 1. Там же показано, что R является XA -факторизуемой группой.

Теорема 2. Пусть G — конечная XA -факторизуемая 2-группа с двумя образующими. Тогда G изоморфна R или для подгруппы X имеется в G элементарное инвариантное дополнение.

Доказательство. Полагаем $G = A \rtimes X = \langle a, x \rangle$, где $a \in A$ и $X = \langle x \rangle$. Если $a^2 = 1$, то A — элементарная подгруппа, и теорема доказана. Допустим, что $o(a) = 4$. Рассмотрим случай, когда число циклических множителей 4-го порядка в прямом разложении подгруппы A равно 2. Тогда $o(b) = 4$ и получаем разложение $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times D$, где D — элементарная подгруппа. Согласно лемме 4 $o(x) = 4$. Пусть $y = x^2$, тогда на основании леммы 2 $ya y = a^{-1}$ и поэтому $[a, x, x] = a^2 \cdot b^2$. Покажем, что $G' \subset \langle a \rangle \times \langle b \rangle = L$. Коммутант G' порождается всеми своими простейшими коммутаторами. Имеем $b, [b, x] \in L$. Допустим, что $[b, x^{(n)}] \in L$. Тогда $[b,$

$x^{(n+1)} = [b, x^{(n)}, x] = [a^{2^n} \cdot b^{2^0}, x] = b^{2^n} \cdot [b, x]^{2^0} \in L$ и включение доказано. Далее, $A = \langle a \rangle \cdot G' \subset L$, т. е. $A = L$ и $D = \{1\}$. Получим $G = L \times X$, где $|G| = 64$, причем образующие a и x удовлетворяют соотношениям $a^4 = b^4 = x^4 = 1$, $[a, b] = 1$, $[b, x] = a^2 \cdot b^2$ и $b = [a, x]$, т. е. группа G изоморфна группе R .

Допустим теперь, что $k = 1$. Тогда $A = \langle a \rangle \times B$, причем B — элементарная подгруппа. Индукцией по n проверяется равенство $[a, x^{(n)}, y] = 1$. Отсюда вытекает, что коммутант G' содержится в централизаторе элемента y . Рассмотрим подгруппу $T = \langle a \cdot y \rangle \cdot G'$. Так как $(ay)^2 = 1$, то T — элементарная подгруппа. Далее, $T \triangleleft G$, $G = T \cdot X$, причем $T \cap X = \{1\}$. Действительно, пусть инволюция $y \in T$. Тогда $y = a \cdot y \cdot g$, где $g \in G'$. Поэтому $a = g$ и $a^2 = 1$, что невозможно. На основании установленного вытекает, что подгруппа T является инвариантным абелевым дополнением к подгруппе X . Теорема доказана.

4. Описание произвольных конечных ХА-факторизуемых 2-групп. Пусть $G = A \times X$ — произвольная ХА-факторизуемая группа и $\{a, u_1, \dots, u_l, x\}$ — ее приведенная система образующих, причем $o(a) = 4$. Согласно установленному ранее $A = A(l) \times B$ и $G' = \langle a^2 \rangle \times B$, причем подгруппа $A(l)$ порождается элементами a, u_1, \dots, u_l .

Рассмотрим подгруппы $H = \langle a, x \rangle$, $K = \langle u_1, \dots, u_l, x \rangle$, $F = H \cap A$ и $S = K \cap A$. Ясно, что $F, S \triangleleft G$, причем $H = F \times X$ и $K = S \times X$. Подгруппа $A = F \times T$, где T — элементарная подгруппа. Действительно, S — элементарная подгруппа, причем $A = F \cdot S$. Если T — дополнение к $F \cap S$ в подгруппе S , то тогда T является дополнением к подгруппе F в группе A .

Лемма 5. Если подгруппа F содержит не менее 2-х прямых циклических сомножителей 4-го порядка, то $A = F \times W$, W содержится в централизаторе элемента y .

Доказательство. Пусть C — централизатор элемента x в подгруппе A . Достаточно показать, что C — элементарная подгруппа и $A = F \cdot C$. Допустим, что в C существует элемент 4-го порядка z . Рассмотрим дополнение D к подгруппе $N = \langle z^2 \rangle \times X$ в группе $P = \langle z \rangle \cdot X$. Ясно, что $D = \langle d \rangle$ и $d^2 = 1$. Из разложения $P = N \cdot D$ получаем $z = z^{2^\alpha} \cdot x^\delta \cdot d^\alpha$. Отсюда $1 = d^{2^\alpha} = x^{2^\delta} \cdot z^2$, т. е. $x^{2^\delta} = z^2 = 1$, что противоречит условию. Таким образом, z — инволюция. Допустим, что для группы G параметр $l = 1$, т. е. $G = \langle a, u_1, x \rangle$. Тогда $G \neq H$ и $T \neq \{1\}$. Через V обозначим максимальную подгруппу в $K = \langle u_1, x \rangle$, не содержащую элемент u_1 . Тогда подгруппа $U = V \cap S$ является максимальной в S , причем $U \triangleleft G$. Подгруппа $M = \Omega_1(F) \cdot U$ инвариантна в G и $\Phi(A) \subset M$. Рассмотрим дополнение L к подгруппе $M \cdot X$ в группе G . Непосредственно проверяется, что $M \cdot u_1 \cap L \neq \{1\}$ и $M \cdot \{x, x^{-1}\} \cdot a \cap L \neq \{1\}$. Найдутся элементы $v, n \in L$ такие, что $v = m_1 \cdot u_1$ и $n = x \cdot m_2 \cdot a$ или $n = x^{-1} \cdot m_2 \cdot a$, где $m_1, m_2 \in M$. Если $n = x \times m_2 \cdot a$, то $[v, n] = [v, x] = [m_1, x] \cdot [u_1, x] \in M \cap L = \{1\}$. Поэтому $[a, x] = 1$, т. е. $v \in Z(G)$. Группа G порождается элементами a, v и x , поэтому $G = H \times \langle v \rangle = (F \times X) \times \langle v \rangle = \langle F \times \langle v \rangle \rangle \times X$, причем $A = F \times \langle v \rangle$ и $v \in C$.

Рассмотрим теперь произвольную ХА-факторизуемую группу G и определим для нее подгруппы $H_i = \langle a, u_i, x \rangle$, $i = 1, \dots, l$. По доказанному, для каждой группы H_i имеем разложение $H_i = A_i \times X$, где $A_i = H_i \cap A$, причем $A_i = F \cdot C_i$, где C_i — централизатор X в подгруппе A_i . Ясно, что $G = (A_1 \dots A_l) \times X$, поэтому $A = A_1 \cdot A_2 \dots A_l$. Но тогда $A \subset F \cdot C$, т. е. $A = F \cdot C$. Лемма доказана.

Лемма 6. Если подгруппа F содержит только один прямой циклический множитель 4-го порядка, то $\Omega_1(A)$ содержится в централизаторе $C(y)$ элемента y .

Доказательство. Так как $b = [a, x] \in F$ и $a^2 \neq b^2$, причем $\exp F = 4$, то $b^2 = 1$. Отсюда вытекает, что любой простейший коммутатор является инволюцией. А так как коммутант G' порождается всеми простейшими коммутаторами, то он является элементарной подгруппой. Заметим, что $\Phi(A) = \langle a^2 \rangle$ и поэтому элемент a^2 принадлежит центру $Z(G)$ группы G .

Подгруппа $H = F \times X$ является XA -факторизуемой группой с двумя образующими, поэтому для X существует элементарное дополнение D в H . Но тогда $F \subset D \cdot \langle y \rangle$, откуда следует, что $ay \in D$. Поэтому $(ay)^2 = 1$, т. е. $ay = ya^{-1}$.

Рассмотрим подгруппу $H_1 = \langle a, u_1, x \rangle$. Как и при доказательстве леммы 5, определяем подгруппы M и L . Непосредственно проверяется, что $My \cdot a \cap L \neq \{1\}$ и $M \cdot u_1 \cap L \neq \{1\}$. Пусть $v_1 = m_1 \cdot u_1$ и $n = y \cdot m_2 \cdot a$. Тогда имеем равенства $[n, v_1] = [y, v_1] = [y, m_1] \cdot [y, u_1] \in L \cap M = \{1\}$, т. е. $v_1 \in C(y)$. Подгруппа H_1 порождается элементами a, v_1 и x , причем $a^2, v_1 \in C(y)$. Покажем, что $H_1' \subset C(y)$. Так как коммутант H_1' порождается всеми своими простейшими коммутаторами, то достаточно показать, что $[a, x] \in C(y)$. Имеем $[a, x] \cdot y = y \cdot [a^{-1}, x] = y \cdot [a, x]$. Аналогично, рассматривая подгруппы $H_i = \langle a, u_i, x \rangle$, строим элементы v_i такие, что $H_i = \langle a, v_i, x \rangle$ и $v_i \in C(y)$, причем $H_i' \subset C(y)$. Получаем $G = \langle a, v_1, \dots, v_l, x \rangle$ и $A = A_1 \cdot A_2 \dots A_l$, где $A_i = \langle a, v_i \rangle \cdot H_i'$. Каждая подгруппа A_i представима в виде $A_i = \langle a, v_i \rangle \cdot B_i$, где $B_i \subset H_i'$. Но тогда $A = \langle a, v_1, \dots, v_l \rangle \cdot B_1 \cdot B_2 \dots B_l$. Так как произведение $P = B_1 \cdot B_2 \dots B_l$ — элементарная подгруппа, то существует такая подгруппа $B \subset P$, что $A = \langle a, v_1, \dots, v_l \rangle \times B$, где $B \subset C(y)$; далее, $\Omega_1(A) \subset \langle a^2, v_1, \dots, v_l \rangle \times B \subset C(y)$. Лемма доказана.

Полное описание произвольных XA -факторизуемых 2-групп дает следующая теорема.

Теорема 3. *Конечная 2-группа G является XA -факторизуемой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*

- 1) $G = D \times Z$, где D — элементарная, а Z — циклическая подгруппы;
- 2) $G = R$ — XA -факторизуемая группа 64-го порядка;
- 3) $G = R \times D$, где D — элементарная подгруппа.

Доказательство. Пусть $G = A \times X$ — произвольная XA -факторизуемая конечная 2-группа и $\{a, u_1, \dots, u_l, x\}$ — ее приведенная система образующих. Подгруппа $A = F \times T$, где T — элементарная подгруппа, и $H = F \times X = \langle a, x \rangle$ — XA -факторизуемая группа с двумя образующими. На основании леммы 4 число h прямых циклических сомножителей 4-го порядка не превышает 2. Допустим, что $h = 1$, тогда по лемме 6 $\Omega_1(A) \subset C(y)$. Следовательно, $A = \langle a \rangle \times W$, где W — элементарная подгруппа из $C(y)$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle ay \rangle \times \langle a^2 \rangle \times W$. Ясно, что D — элементарная подгруппа, имеющая с X тривиальное пересечение. Подгруппа $L = \Omega_1(A) \cdot X$ является максимальной в G , поэтому она содержит коммутант G' . Но так как $G' \subset A$ и $\Omega_1(A) = A \cap L$, то $G' \subset \Omega_1(A) \subset C(y)$, поэтому $D \triangleleft G$. Учитывая, что $\langle a^2 \rangle \cdot W \subset C(y)$, получаем коммутативность подгруппы D . А так как $|D| = |A|$, то $G = D \times X$.

Допустим теперь, что $h = 2$. На основании леммы 5 подгруппа $A = F \times W$, где W содержится в центре группы G . Так как подгруппа $H = F \times X$ — XA -факторизуемая группа с двумя образующими, причем F содержит два прямых циклических множителя 4-го порядка, то на основании теоремы 2 $H = R$. Далее, $F \triangleleft G$, поэтому $G = (F \times W) \times X = (F \times X) \times W = R \times W$ и тем самым необходимость доказана.

Пусть теперь группа G принадлежит одному из указанных типов. Докажем, что она является XA -факторизуемой группой. Если $G = D \times Z$ и D — элементарная подгруппа, то подгруппа Z является сверхдополняемой и поэтому группа G является XA -факторизуемой. Далее, из описания группы R следует, что она является XA -факторизуемой группой.

Допустим теперь, что $G = R \times H$, где H — элементарная подгруппа. Рассмотрим произвольную подгруппу D из G , которая содержит подгруппу X из R . Если $G = R \cdot D$, то для подгруппы $R \cap D$ существует дополнение T в группе R . Но тогда $T \cdot D = T \cdot (R \cap D) \cdot D = R \cdot D = G$, причем $T \cap D = \{1\}$. Пусть $G \neq R \cdot D$. В этом случае рассмотрим подгруппу $H_1 = R \cdot D \cap H$ и пусть H_2 — дополнение к H_1 в подгруппе H . Обозначим через T_2 дополнение к подгруппе $T_1 = R \cap D$ в подгруппе R . Докажем, что $T_2 \cdot H_2$ является дополнением к подгруппе D в группе G . Имеем $T_2 \cdot H_2 \cdot D = T_2 \cdot T_1 \cdot D \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H_1 \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H = G$. С другой стороны, пусть $z \in T_2 \cdot H_2 \cap D$, тогда $z = t \cdot h = d$, где $t \in T_2$, $h \in H_2$ и $d \in D$.

Отсюда вытекает, что элемент $h = t^{-1} \cdot d \in H_2 \cap R \cdot D \subset H \cap R \cdot D = H_1$, поэтому $h = 1$ и $t = d$. Следовательно, $z \in T_2 \cap D \subset R \cap D = T_1$, поэтому $z = 1$. Таким образом, $T_2 \cdot H_2 \cap D = \{1\}$, т. е. $T_2 \cdot H_2$ — дополнение к подгруппе D в группе G . Теорема доказана.

1. Холл М. Теория групп.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
3. Черников Н. С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев: Наук. думка, 1987.— 208 с.
4. Крекнин В. А., Спиваковский А. В. Конечные p -группы с матрешками дополняемых подгрупп // X Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл.— Минск, 1986.— С. 128.
5. Huppert B. Endliche Gruppen. I.— Berlin etc.: Springer, 1967.— 793 S.

Получено 11.12.90