УДК 512

С. П. СТРУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (Моск. инж.-физ. ин-т)

# Об одном представлении конечных групп, порожденных инволюциями

Построено представление произвольной конечной группы $G$, порожденной инволюциями, в группу движений некоторого двумерного замкнутого многообразия и вычислен характер соответствующего представления группы $G$ на первой группе гомологий этого многообразия с коэффициентами в поле рациональных чисел в теоретико-групповых терминах.

Побудовано зображення довільної скінченної групи $G$, що породжена інволюціями, в групу рухів деякого двовимірного замкненого багатовиду та обчислено характер відповідного зображення групи $G$ на першій групі гомологій цього багатовиду з коефіцієнтами у полі раціональних чисел в теоретико-групових термінах.

Понятие образующих — одно из старейших в теории групп, однако часто естественные и просто формулируемые вопросы, относящиеся к этому понятию, являются очень сложными. Основная причина этого заключается в том, что в теории групп почти отсутствует информация относительно вхождения образующих в группу, другими словами, сам по себе один факт, что группа порождена данной системой элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет мало следствий. Целью настоящей работы является получение такой информации для конечных групп, порожденных некоторой системой инволюций.

Через $1_H^G$ обозначим характер представления группы $G$ сдвигами в пространстве комплексных линейных комбинаций правых смежных классов группы $G$ по подгруппе $H$. В частности, $1_1^G = 1^G$ — характер регулярного представления группы $G$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $G$ — конечная группа, порожденная инволюциями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$, некоторые из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ или даже все могут совпадать). Тогда $G$ имеет такой линейный характер $\lambda(x)$, что функция на группе $G$*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) - 1^G(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i, a_{i+1} \rangle}(x) + 1 + \lambda(x)$$

*является характером группы $G$ (в этом выражении элемент $a_{n+1}$ считается равным элементу $a_1$).*

Доказательство этой теоремы, как и основной теоремы работы [1], использует методы комбинаторной топологии. Так как эти методы редко используются в теории групп, приведем здесь необходимые определения.

Конечное множество $W$ вместе с системой отмеченных подмножеств в нем (называемых симплексами) называется абстрактным симплициальным комплексом, если

1) каждый элемент множества $W$ является симплексом;
2) любое подмножество симплекса также является симплексом.

Если симплекс состоит из $n + 1$ точки, то он называется $n$-мерным. Симплекс ненулевой размерности называется ориентированным, если задан какой-нибудь порядок его вершин и при этом четная перестановка вершин не меняет ориентации, а нечетная — меняет ее на противоположную. Если $E$ — ориентированный симплекс, то этот же симплекс, но ориентированный противоположно, обозначается $-E$. Упорядочив множество $W$, можно задать ориентацию на всех симплексах одновременно. Полученные таким способом ориентации будем называть здесь стандартными. Множество всех линейных комбинаций $n$-мерных ориентированных симплексов с рациональными коэффициентами называется группой $n$-мерных цепей и обозначается через $C_n$. При этом считается, что $\alpha(-E) = -\alpha E$ для любого рационального числа $\alpha$ и любого симплекса $E$. Определим отображение $\partial_n$ группы $C_n$ в группу $C_{n-1}$. Если $E = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный положительно ориентированный симплекс при некоторой заданной стандартной ориентации комплекса, то положим

$$\partial_n E = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_i (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для $n > 0$ и $\partial_0 (x_0) = 0$ для $n = 0$, где $\varepsilon_i = 1$, если ориентация симплекса $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ совпадает с первоначально заданной ориентацией, и $\varepsilon_i = -1$ — в противном случае. Для остальных элементов группы $C_n$ отображение $\partial_n$ определяется с помощью линейного продложения. Легко проверяется, что $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ для любого номера $n$. Фактор-группа $\mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ называется $n$-мерной группой гомологий симплициального комлекса $W$ и обозначается через $H_n(W)$. Каждая группа $H_n(W)$ представляет собой линейное пространство над полем рациональных чисел.

Если группа $G$ действует как группа перестановок на множестве $W$ и каждый элемент группы $G$ переводит любой симплекс комплекса $W$ в симплекс (такие перестановки называются симплициальными отображениями комплекса $W$), то естественным образом возникают линейные представления группы $G$ на всех линейных пространствах $H_n(W)$. Характеры этих представлений будем обозначать через $\tilde{t}_n(g)$, где $t_n$ — характер представления группы $G$ перестановками на множестве $n$-мерных симплексов комплекса $W$.

Доказательство теоремы. Введем конкретную структуру абстрактного симплициального комплекса для рассматриваемой конечной группы $G$. Пусть $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — заданная конечная группа, $| a_i | = 2$ для всех $i$ и пусть вначале $n \geqslant 3$. В качестве основных вершин симплициального комплекса $W$ возьмем все элементы группы $G$. Два различных элемента $x, y$ группы $G$ соединим ребром, если $x^{-1}y = a_i$ для некоторого номера $i$. При этом если $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_k} = a$, то элементы $x$ и $y = xa$ соединим $k$ ребрами, которые пометим парами индексов $(a, i_s)$, где $s = 1, 2, \ldots, k$.

Затем определим на построенной системе вершин и ребер структуру двумерной поверхности. Для этого назовем многоугольниками следующие циклически упорядоченные множества элементов группы $G$:

$$M_i(g) = \{g, ga_i, ga_ia_{i+1}, ga_ia_{i+1}a_i, \ldots, g(a_ia_{i+1})^{|a_ia_{i+1}|-1}a_i\}.$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ (при этом считаем, что $a_{n+1} = a_1$). Если $a_i = a_{i+1}$, то многоугольники $M_i(g)$ являются двуугольниками. Сторонами этих многоугольников будут ребра между соседними вершинами, а также между первой и последней вершинами. При этом, так как не исключается случай равенства $a_i = a_j$ при $i \neq j$, т. е. между двумя вершинами может проходить несколько ребер, то в качестве стороны между вершинами $x$ и $xa$ в многоугольниках $M_i(g)$, $M_{i-1}(g)$ возьмем ребро с меткой $(a_i, i)$. Два многоугольника считаем совпадающими, если циклической перестановкой вершин в одном из них можно добиться того, чтобы соответствующие вершины этих многоугольников совпадали и ребра между соответствующими соседними и крайними вершинами имели одинаковые метки. Поэтому, например, если даже $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}$, но $i \neq j$, то $M_i(g) \neq M_j(g)$, так как стороны этих многоугольников имеют разные метки.

Приступим к непосредственному построению комплекса $W$. Добавим к основным вершинам, т. е. элементам группы $G$, еще центры многоугольников $M_i(g)$ (в качестве такого центра можно взять любую внутреннюю точку многоугольника) и соединим их с основными вершинами своих многоугольников так, чтобы все уже имеющиеся стороны в каждом многоугольнике являлись основаниями треугольников с вершиной в только что построенном центре. Другими словами, разобьем каждый многоугольник на элементарные треугольники. Этот процесс, обычно называемый триангуляцией, может пока еще не привести в симплициальному комплексу, так как в случае $a_t = a_j$ две точки могут быть соединены несколькими ребрами (т. е. пересечение таких двух ребер не будет нульмерным симплексом). Поэтому возьмем на каждом основном ребре, т. е. ребре, соединяющем элементы группы, среднюю точку и соединим ее с центрами многоугольников $M_i(g)$, имеющих данное ребро в качестве своей стороны. Теперь мы получили симплициальный комплекс $W$, двумерными симплексами которого являются половинки элементарных треугольников, на которые оказались разбитыми многоугольники $M_i(g)$, а одномерными симплексами — их стороны, т. е. половинки ребер, соединяющих элементы группы, и ребра, соединяющие концы этих половинок с центрами многоугольников $M_i(g)$. Нульмерными симплексами этого комплекса являются вершины этих треугольников, т. е. элементы группы $G$, середины ребер с метками $(a_i, i)$, соединяющие элементы группы $G$, а также центры многоугольников $M_i(g)$.

Если $G = \langle a_1, a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2| = 2$, $a_1 \neq a_2$, то элементы группы $G$ расположим на экваторе двумерной сферы в следующем циклическом порядке: $1, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_1, \ldots, (a_1a_2)^{|a_1a_2|-1}a_1$ и соединим их кратчайшими дугами на этой сфере. Эти дуги будут играть роль одномерных симплексов. Для построения симплициального комплекса, представляющего сферу, к множеству основных вершин добавим полюса сферы и соединим их с лежащими на экваторе элементами группы $G$. Тогда система полученных сферических треугольников, их сторон и вершин образует искомый симплициальный комплекс $W$. Если $a_1 = a_2 = a$, то также расположим оба элемента группы $1$, $a$ на экваторе двумерной сфере, соединим их двумя большими дугами на экваторе, пометим эти дуги метками $(a, 1)$, $(a, 2)$ и затем соединим эти элементы и середины соединяющих их дуг с полюсами сферы.

Определим на множестве основных вершин построенного комплекса $W$ (т. е. на элементах группы $G$) отображение $\rho_x$, где $x \in G$, с помощью равенства $\rho_x(g) = xg$. Легко проверить, что $\rho_x M_i(g) = M_i(xg)$. Каждое ребро при этом отображении будем переводить в ребро с той же меткой. Очевидно, это отображение можно продолжить до симплициального отображения $\psi_x$ всего комплекса $W$ на себя. Характер ограничения $\psi(i)$, возникающего при этом представлении $\psi$ группы $G$ на пространстве $i$-мерных симплексов комплекса $W$, обозначим через $t^{(i)}$, тогда $\tilde{t}_i$ будет обозначать характер соответствующего представления группы $G$ на $i$-й группе гомологий $H_i(W)$ (с коэффициентами в поле рациональных чисел). Нашей целью будет вычисление характера $\tilde{t}_1$.

Покажем, что комплекс $W$ представляет двумерную замкнутую поверхность или, другими словами, псевдомногообразие размерности два (см. [2], § 37, § 24). Для этого достаточно проверить, что в системе определенных выше многоугольников $M_i(g)$ каждое основное ребро, т. е. ребро, соединяющее какие-нибудь два элемента группы, является стороной в точности двух многоугольников. Для группы $G = \langle a_1, a_2 \rangle$, в которой $|a_1| = |a_2| = 2$, построенный комплекс $W$ представляет двумерную сферу, поэтому можно считать, что $n > 2$. Легко видеть, что ребро $(x, y)$ с меткой $(a_i, i)$ является сторонами многоугольников $M_{i-1}(xa_{i-1})$ и $M_i(x)$. Так как стороны многоугольников $M_j(g)$ имеют метки $(a_j, j)$, $(a_{j+1}, j+1)$, то ребро $(x, y)$ с меткой $(a_i, i)$ не может быть стороной никакого многоугольника $M_j(g)$ при $j \neq i$, $j + 1 \neq i$. Многоугольник $M_j(g)$ представляет собой смежный класс группы $G$ по подгруппе $\langle a_j, a_{j+1} \rangle$, поэтому при $j = i$ элементы $x$, $y = xa_i$ могут принадлежать только одному такому многоугольнику, а именно $M_i(x)$, а при $j = i - 1$ — только многоугольнику $M_{i-1}(xa_{i-1})$. Следовательно, множество основных вершин с указанной системой многоугольников образует двумерную поверхность, а симплициальный комплекс $W$, представляющий эту поверхность, является псевдомногообразием размерности два.

Вычислим теперь значения характера $\tilde{t}_1(x)$. Вначале предположим, что $n > 2$. Рассмотрим сужение $\varphi_x^{(0)}$ отображения $\psi_x$ на множестве всех вершин симплициального комплекса $W$. На множестве основных вершин отображение $\psi_x^{(0)}$ действует без неподвижных точек, число основных вершин равно $|G|$. Так как вершины многоугольника $M_i(g)$ для каждого фиксированного $i$ образуют правый смежный класс группы $G$ по подгруппе $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$, то множества вершин двух таких многоугольников не пересекаются и число добавленных центров для таких многоугольников равно $|G|/|\langle a_i, a_{i+1}\rangle|$. Отображение $\psi_x^{(0)}$ осуществляет сдвиг правых смежных классов, поэтому оно действует на центрах многоугольников $M_i(g)$ как на правых смежных классах группы $G$ по подгруппе $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$.

Осталось рассмотреть действие отображения $\psi_x^{(0)}$ на серединах ребер, соединяющих элементы группы. Легко видеть, что ребра с меткой $(a_i, i)$ (при фиксированном $i$) представляют собой все правые смежные классы группы $G$ по подгруппе $\langle a_i\rangle$, поэтому и действие отображения $\psi_x^{(0)}$ на серединах таких ребер такое же, как действие сдвига элементом $x$ правых смежных классов группы $G$ по подгруппе $\langle a_i\rangle$.

После всех этих замечаний нетрудно получить выражения для значений $t^{(i)}(x)$ которые, очевидно, равны числу неподвижных точек отображений $\psi_x^{(i)}$ непосредственно на множествах $i$-мерных симплексов комплекса $W$. Имеем

$$t^{(0)}(x) = 1^G(x) + \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}(x) + \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x).$$

В этом выражении три слагаемых (точнее, групп слагаемых). Первое слагаемое $1^G(x)$ выражает число неподвижных точек сужения отображения $\psi_x^{(0)}$ на элементы группы $G$, т. е. основные вершины рассматриваемого симплициального комплекса $W$. Следующее слагаемое равно числу неподвижных точек сужения $\psi_x^{(0)}$ на центры многоугольников $M_i(g)$. Последнее слагаемое равно числу неподвижных середин основных ребер отображения $\psi_x^{(0)}$. Аналогично получаем следующее равенство:

$$t^{(1)}(x) = n\cdot 1^G(x) + n\cdot 1^G(x) + 2\sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x).$$

Первые два слагаемых здесь выражают число неподвижных точек сужения отображения $\psi_x^{(1)}$ на половинках ребер с метками $(a_i, i)$ и ребрах, соединяющих центры многоугольников $M_i(g)$ с элементами группы. Третье слагаемое дает значение этого же параметра для действия $\psi_x^{(1)}$ на отрезках, соединяющих центры многоугольников $M_i(g)$ с серединами основных ребер (т. е. ребер с метками $(a_i, i)$), так как если отображение $\psi_x^{(1)}$ оставляет неподвижной середину ребра с меткой $(a_i, i)$, то при этом останутся неподвижными и многоугольники, примыкающие к этому ребру. Легко устанавливается также, что

$$t^{(2)}(x) = 2n\cdot 1^G(x),$$

так как каждый двумерный симплекс, т. е. элементарный треугольник в многоугольниках $M_i(g)$ имеет в качестве своей вершины в точности один элемент группы $G$, причем в каждом многоугольнике $M_i(g)$ к заданному элементу группы $G$ примыкает в точности два таких треугольника.

Для числа Лефшеца $L$, определяемого равенством $L = t^{(0)}(x) - t^{(1)}(x) + t^{(2)}(x)$, получаем следующее выражение:

$$L = 1^G(x) + \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x).$$

С другой стороны, из формулы Хопфа (см. [2], § 79) получаем равенство $L = \tilde{t}^{(0)}(x) - \tilde{t}^{(1)}(x) + \tilde{t}^{(2)}(x)$, откуда

$$\tilde{t}^{(1)}(x) = \tilde{t}^{(0)}(x) + \tilde{t}^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x) - 1^G(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}(x).$$

Так как поверхность $S_G$ является связной двумерной, то группа гомологий $H_0(W)$ представляет собой одномерное линейное пространство над полем рациональных чисел, которое было взято в качестве поля коэффициентов для групп гомологий. Что же касается группы $H_2(W)$, то она в зависимости от того, ориентируема или нет поверхность $S_G$, имеет размерность один или ноль (см. [2], § 41). Но функция $\tilde{t}_1$ является характером представления группы $G$ на пространстве $H_1(W)$, поэтому, умножая его скалярно на единичный характер группы $G$, получаем, что по крайней мере один из характеров $\tilde{t}^{(1)}(x)$, $\tilde{t}^{(2)}(x)$ тождественно равен единице (так как кратность вхождения единичного характера в характеры $1^G_{\langle g\rangle}$, $1^G$ равна единице). Следовательно, в этом случае теорема доказана.

Если $G = \langle a_1, a_2\rangle$, то поверхность $S_G$ представляет собой двумерную сферу. Поэтому группа $H_1(W)$ оказывается нулевой, т. е. $\tilde{t}^{(1)}(x) = 0$ для любого $x \in G$. Тогда равенство

$$1 + \varepsilon(x) + 1^G_{\langle a_1\rangle}(x) + 1^G_{\langle a_2\rangle}(x) - 1^G(x) - 2 = 0$$

можно доказать непосредственно, используя свойства группы диэдра или циклической группы второго порядка при $a_1 = a_2$, а можно дословно повторить предыдущие рассуждения для этого случая. Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть $G$ — произвольная конечная группа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые ее инволюции ($n \geqslant 2$ и некоторые или все из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут совпадать). Тогда функция на группе $G$*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x) - 1^G(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}(x) + 1^G_{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle}(x) + \varepsilon^G(x),$$

*где $\varepsilon(x)$ — некоторый одномерный характер группы $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, является характером группы $G$.*

Доказательство. Обозначим через $H$ подгруппу группы $G$, порожденную элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. По теореме функция

$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} 1^H_{\langle a_i\rangle}(x) - 1^H(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^H_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}(x) + 1 + \varepsilon(x)$$

является характером группы $H$. Но тогда $\varphi(x) = \gamma^G(x)$, что и доказывает следствие.

В заключение отметим, что при $n = 3$ неравенство $\varphi(1) \geqslant 0$ для характера $\varphi(x)$, определенного в теореме, дает точные значения для порядков групп Кокстера $A_3, B_3$ и групп $\langle a_1, a_2\rangle \times \langle a_3\rangle$, что является свидетельством оптимальности полученного результата.


1. *Струнков С. П.* Об одном разложении регулярного представления конечной группы с двумя образующими // Мат. заметки.— 1990.— 48, № 3.— С. 149—151.
2. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938. — 400 с.



Получено 14.01.91