УДК 519.65:62-50

В. Л. МАКАРОВ, д-р физ.-мат. наук,
В. В. ХЛОБЫСТОВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Об общей структуре интерполяционных функциональных полиномов

Для одного класса нелинейных функционалов конструктивно описано все множество интерполяционных функциональных полиномов с узлами-траекториями, ортонормированными в $L_2(0, 1)$. Выделен экстремальный интерполянт, обеспечивающий наилучшее (в смысле введенной метрики) приближение к заданному функционалу.

Для одного класу нелінійних функціоналів конструктивно побудована вся множина інтерполяційних функціональних поліномів з вузлами-траекторіями, ортонормованими в $L_2(0, 1)$. Вилучено екстремальний інтерполянт, який забезпечує найкраще (в розумінні введеної метрики) наближення до заданого функціоналу.

1. В работах [1, 2] построены интерполяционные функциональные полиномы типа Ньютона. При этом в [1] вопросы единственности не рассматривались, а в [2] единственность построенного интерполянта обеспечивалась за счет континуальности узлов. В данной статье при выполнении некоторых ограничений на заданный функционал F решена задача конструктивного построения интерполяционного функционального полинома n-й степени общей структуры с m узлами траекториями, ортонормированными в $L_2(0, 1)$, т. е. описано все множество интерполяционных функциональных полиномов n-й степени с такими узлами. Особенностью этих интерполянтов является отсутствие связи между степенью полинома и числом узлов, и в этом одно из принципиальных отличий от обычной полиномиальной интерполяции функций. Из построенного множества интерполянтов выделен экстремальный, обеспечивающий наилучшее (в смысле введенной нормы) приближение к заданному функционалу.

2. Пусть нелинейный функционал F и функциональный полином n-й степени

$$P_n(x) = K_0 + \int_0^1 K_1(z)\, x(z)\, dz + \dots + \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} K_n(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^{n} x(z_i)\, dz_i$$

определены на пространстве функций $C_0[0, 1] = \{x \mid x \in C[0, 1], x(0) = 0\}$. При этом ядра $K_i \in L_2(\Omega_i)$, $\Omega_i = \underbrace{(0, 1) \times \ldots \times (0, 1)}_{i}$, $i = \overline{0, n}$.

Известно [3], что при $x \in C_0[0, 1]$ определен интеграл от $F(x)$ по мере Винера, а вероятностная интерпретация позволяет рассматривать этот интеграл как математическое ожидание функционала $F(x)$, вычисленного на множестве реализаций винеровского процесса $x(t)$. Введем нормальный белый шум $\eta(t)$, соответствующий винеровскому процессу $x(t)$, и будем рассматривать

$$\widetilde{F}(\eta) = F(x(t)) = F\left(\int_0^t \eta(z)\, dz\right).$$

Обозначим через $H(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, предгильбертово пространство функционалов над телом вещественных чисел со скалярным произведением

$$(\widetilde{F}, \widetilde{G}) = \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_k} \widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i\right)\Big|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0} \frac{1}{k!} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_k} \widetilde{G}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i\right)\Big|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0}\right) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \widetilde{F}(\eta_i)\, \widetilde{G}(\eta_i), \tag{1}$$

где η_j, $j = \overline{1, m}$, — ортонормированные в $L_2(0, 1)$ узлы-траектории, M — символ математического ожидания, μ_i — нормальный белый шум с интенсивностью, равной 1, μ_i, μ_j при $i \neq j$ — независимые обобщенные процессы, $\alpha_i \in R_1$, $\sum_1^0 = 0$, $0! = 1$. Норму в этом пространстве определим следующим образом: $\|\widetilde{F}\|_{H(\lambda)} = (\widetilde{F}, \widetilde{F})^{1/2}$. Обозначим через π_n множество функциональных полиномов $\widetilde{P}_n(\eta)$ степени не выше n и рассмотрим задачу: найти такой $\widetilde{P}_n^*(\eta) \in \pi_n$, что

$$\|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n^*\|_{H(\lambda)} = \inf_{\widetilde{P}_n \in \pi_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(\lambda)}. \tag{2}$$

Множество π является выпуклым, и полным в $H(\lambda)$. Следовательно [4], для каждого $\widetilde{F} \in H(\lambda)$ существует, и притом единственный элемент $\widetilde{P}_n^*$, являющийся решением задачи (2).

Теорема 1. *Для каждого $\widetilde{F} \in H(\lambda)$ функциональный полином $\widetilde{P}_n^*$ существует, единствен, а его ядра определяются формулами*

$$K_0 = \frac{\Delta_n(\lambda)}{\Delta_{m+n}(\lambda)} \left\{\varphi_0 + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \left[\widetilde{F}(\eta_j) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \beta_{jk}\right]\right\}, \tag{3}$$

$$K_i(\xi_1, \ldots, \xi_i) = \frac{1}{i!} \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_i) + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \beta_{jk}\right] \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{i} \eta_j(\xi_l), \tag{4}$$

$$i = \overline{1, n},$$

где

$$\Delta_n(\lambda) = 1 + n\lambda,$$

$$\varphi_p(\xi_1, \ldots, \xi_p) = M\left(\frac{\partial^p}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_p} \widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mu_i\right)\Big|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_p=0} \prod_{i=1}^{p} \mu_i(\xi_i)\right),$$

$$p = \overline{0, n}, \quad \prod_{1}^{0} = 1, \tag{5}$$

$$\beta_{jk} = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{k} \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) \prod_{i=1}^{k} \eta_j(\xi_i)\, d\xi_i. \tag{6}$$

Доказательство. Существование и единственность $\widetilde{P}_n^*$ с учетом свойств множества π_n следует из [4]. Рассмотрим функционал

$$\Phi(\widetilde{F}, \widetilde{P}_n) = \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|^2_{H(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} M\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_k}\left(\widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \widetilde{P}_n\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i\right)\right)\Big|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0}\right]^2 + \lambda\sum_{i=1}^{m}[\widetilde{F}(\eta_i) - \widetilde{P}_n(\eta_i)]^2$$

и найдем вариации этого функционала по ядрам K_i, $i = \overline{0, n}$, которые обозначим соответственно через $\partial\Phi_i$. Используя необходимые условия существования экстремума, получаем

$$\partial\Phi_0 = \left\{M[\widetilde{F}(0) - K_0] + \lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_i) - K_0 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right]\right\}\delta K_0 = 0, \tag{7}$$

$$\partial\Phi_1 = \frac{1}{(1!)^2}\cdot M\left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\widetilde{F}(\alpha_1\mu_1)\big|_{\alpha_1=0} - 1!\int_0^1 K_1(z)\,\mu_1(z)\,dz\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, 1!\int_0^1 \delta K_1(\xi)\,\mu_1(\xi)\,d\xi\right] + \lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_i) - K_0 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right]\cdot\int_0^1 \delta K_1(\xi)\,\eta_i(\xi)\,d\xi = 0, \tag{8}$$

$$\partial\Phi_2 = \frac{1}{(2!)^2} M\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\mu_i\right)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} - 2!\int_0^1\int_0^1 K_2(z_1, z_2)\prod_{i=1}^{2}\mu_i(z_i)\,dz_i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, 2!\int_0^1\int_0^1 \delta K_2(\xi_1, \xi_2)\cdot\prod_{i=1}^{2}\mu_i(\xi_i)\,d\xi_i\right] + \lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_i) - K_0 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right]\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 \delta K_2(\xi_1, \xi_2)\prod_{j=1}^{2}\eta_i(\xi_j)\,d\xi_j = 0, \tag{9}$$

. . . .

$$\partial\Phi_n = \frac{1}{(n!)^2}\cdot M\left[\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_n}\widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_i\right)\Big|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0} - \right.\right.$$

$$\left. - n!\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(z_1, \ldots, z_n)\prod_{i=1}^{n}\mu_i(z_i)\,dz_i\right)\cdot n!\int_0^1 \ldots \int_0^1 \delta K_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\times$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n}\mu_i(\xi_i)\,d\xi_i\right] + \lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_i) - K_0 - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right]\cdot\int_0^1 \ldots \int_0^1 \delta K_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\eta_j(\xi_i)\,d\xi_i = 0, \tag{10}$$

где δK_i — вариации K_i, $i=\overline{0, n}$,

$$y_{ij}=\underbrace{\int_0^1\dots\int_0^1}_{j} K_j(z_1,\dots,z_j)\prod_{k=1}^{j}\eta_i(z_k)\,dz_k.$$

Далее, используя теорему Фубини, основную лемму вариационного исчисления, а также тот факт, что $M\mu_i\mu_j=0$, $i\neq j$,

$$M\mu_i(z_1)\,\mu_i(z_2)=\delta(z_1,z_2),\quad \delta(z_1,z_2)=\delta(z_1-z_2),$$

δ — функция Дирака, из системы уравнений (7) — (10) находим

$$\varphi_0-K_0+\lambda\sum_{i=1}^{m}\Big[\widetilde{F}(\eta_i)-K_0-\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\Big]=0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{1!}\varphi_1(\xi_1)-K_1(\xi_1)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\Big[\widetilde{F}(\eta_i)-K_0-\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\Big]\eta_i(\xi_1)=0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2!}\varphi_2(\xi_1,\xi_2)-K_2(\xi_1,\xi_2)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\Big[\widetilde{F}(\eta_i)-K_0-\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\Big]\prod_{k=1}^{2}\eta_i(\xi_k)=0, \tag{13}$$

. . . .

$$\frac{1}{n!}\varphi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)-K_n(\xi_1,\dots,\xi_n)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\Big[\widetilde{F}(\eta_i)-K_0-\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\Big]\prod_{k=1}^{n}\eta_i(\xi_k)=0. \tag{14}$$

Левые и правые части уравнений (12) — (14) умножим соответственно на $\eta_j(\xi_1)$, $n_j(\xi_1)\,n_j(\xi_2)$, ..., $\eta_j(\xi_1)\dots\eta_j(\xi_n)$ и проинтегрируем по областям изменения переменных ξ_i. С учетом ортонормированности функций η_j получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1!}\beta_{j1}-y_{j1}+\lambda\Big[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0-\sum_{k=1}^{n}y_{ik}\Big]=0,\\
&\frac{1}{2!}\beta_{j2}-y_{j2}+\lambda\Big[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0-\sum_{k=1}^{n}y_{jk}\Big]=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{1}{n!}\beta_{jn}-y_{jn}+\lambda\Big[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0-\sum_{k=1}^{n}y_{jk}\Big]=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Систему уравнений (15) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda)\,y_{j1}+\lambda y_{j2}+\dots+\lambda y_{jn}=\frac{1}{1!}\beta_{j1}+\lambda[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0],\\
&\lambda y_{j1}+(1+\lambda)\,y_{j2}+\dots+\lambda y_{jn}=\frac{1}{2!}\beta_{j2}+\lambda[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda y_{j1}+\lambda y_{j2}+\dots+(1+\lambda)\,y_{jn}=\frac{1}{n!}\beta_{jn}+\lambda[\widetilde{F}(\eta_j)-K_0],
\end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$A_n\vec{y}_j=\vec{b}_j,$$

$$A_n=\begin{Vmatrix}1+\lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & 1+\lambda & \dots & \lambda\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda & \lambda & \dots & 1+\lambda\end{Vmatrix},\quad \vec{y}_j=\begin{Vmatrix}y_{j1}\\ y_{j2}\\ \vdots\\ y_{jn}\end{Vmatrix},$$

$$\vec{b}_j = \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{1!}\beta_{j1} + \lambda[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0] \\ \frac{1}{2!}\beta_{j2} + \lambda[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0] \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n!}\beta_{jn} + \lambda[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0] \end{array} \right\|.$$

Обозначим определитель матрицы A_n через $\Delta_n(\lambda)$. Нетрудно показать, что

$$\Delta_n(\lambda) = 1 + n\lambda,$$

$$A_n^{-1} = \Delta_n^{-1}(\lambda) \left\| \begin{array}{cccc} \Delta_{n-1}(\lambda) & -\lambda & \dots & -\lambda \\ -\lambda & \Delta_{n-1}(\lambda) & \dots & -\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda & -\lambda & \dots & \Delta_{n-1}(\lambda) \end{array} \right\|.$$

Тогда $\vec{y}_j = A_n^{-1}\vec{b}_j$, или в координатной форме

$$y_{jk} = \frac{1}{k!}\beta_{jk} + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\beta_{jm}\right], \quad k = \overline{1, n}. \tag{16}$$

И, кроме того, справедливо соотношение

$$\lambda\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\right] = \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}\right]. \tag{17}$$

На основании (11) — (14) и (17) имеем

$$\varphi_0 - K_0 + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}\right] = 0,$$

$$\frac{1}{1!}\varphi_1(\xi_1) - K_1(\xi_1) + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}\right]\eta_j(\xi_1) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n!}\varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) - K_n(\xi_1, \dots, \xi_n) + \frac{\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{ik}\right]\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\eta_j(\xi_i) = 0,$$

откуда и следуют формулы (3), (4), что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Отметим, что аналогичные рассуждения можно провести и при неортогональных узлах, однако конструктивное построение экстремального полинома произвольной степени в этом случае значительно усложняется.

3. Итак, для фиксированного $\lambda \geqslant 0$ построен экстремальный (в смысле решения задачи (2)) полином $\widetilde{P}_n^*$, ядра которого определяются формулами (3), (4). Представляет интерес изучение свойств полинома $\widetilde{P}_n^*$ при $\lambda \to \infty$. Обозначим этот полином через $\widetilde{\widetilde{P}}_n^*$, а его ядра на основании (3), (4) будут

иметь вид

$$\overline{K}_0=\frac{n}{m+n}\left\{\varphi_0+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_j)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}\right]\right\}, \tag{18}$$

$$\overline{K}_i(\xi_1,\ldots,\xi_i)=\frac{1}{i!}\varphi_i(\xi_1,\ldots,\xi_i)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\widetilde{F}(\eta_j)-\overline{K}_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}\right]\prod_{l=1}^{i}\eta_j(\xi_l),$$
$$i=\overline{1,n}, \tag{19}$$

где φ_i, β_{jk} определяются формулами (5), (6).

Теорема 2. *Пусть в ядрах* (18), (19) *функции* $\varphi_i\in L_2(\Omega_i)$, $i=\overline{0,n}$, *произвольные. Тогда формулы* (18), (19) *определяют все множество интерполяционных функциональных полиномов степени не выше* n *с* m *ортонормированными в* $L_2(0,1)$ *узлами.*

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\widetilde{P}}_n$ полином степени n с ядрами (18), (19) и произвольными φ_i, $i=\overline{0,n}$, а через $\overline{y}_{jk}-\lim\limits_{\lambda\to\infty}y_{jk}$. Тогда

$$\widetilde{F}(\eta_j)-\widetilde{\widetilde{P}}_n(\eta_j)=\widetilde{F}(\eta_j)-\overline{K}_0-\sum_{k=1}^{n}\overline{y}_{jk}=\widetilde{F}(\eta_j)-\overline{K}_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\beta_{jk}-$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\widetilde{F}(\eta_j)-\overline{K}_0-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\beta_{jm}\right]=0,\quad j=\overline{1,m}.$$

Тем самым интерполяционность полинома $\widetilde{\widetilde{P}}_n$ при произвольных φ_i, $i=\overline{0,n}$, доказана. Далее, пусть

$$\widetilde{P}_n(\eta)=A_0+\int_0^1 A_1(z)\,\eta(z)\,dz+\ldots+\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}A_n(z_1,\ldots,z_n)\prod_{i=1}^{n}\eta(z_i)\,dz_i \tag{20}$$

— некоторый фиксированный полином с ядрами $A_i\in L_2(\Omega_i)$, $i=\overline{0,n}$, удовлетворяет интерполяционным условиям $\widetilde{P}_n(\eta_j)=\widetilde{F}(\eta_j)$, $j=\overline{1,m}$. Положим

$$\varphi_p(\xi_1,\ldots,\xi_p)=M\left[\frac{\partial^p}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_p}\widetilde{P}_n\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\mu_i\right)\Big|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_p=0}\cdot\prod_{i=1}^{p}\mu_i(z_i)\right],\quad p=\overline{0,n}. \tag{21}$$

На основании (20), (21) находим

$$\varphi_p(\xi_1,\ldots,\xi_p)=p!\,A_p(\xi_1,\ldots,\xi_p),$$
$$\beta_{jk}=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{k}k!\,A_k(\xi_1,\ldots,\xi_k)\prod_{i=1}^{k}\eta_j(\xi_i)\,d\xi_i.$$

Тогда из соотношений (18), (19) имеем

$$\overline{K}_0=\frac{n}{m+n}\left[A_0+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}A_0\right]=A_0,$$

$$\overline{K}_p(\xi_1,\ldots,\xi_p)=A_p(\xi_1,\ldots,\xi_p)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\Big[\widetilde{F}(\eta_j)-\overline{K}_0-\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{k}A_k(z_1,\ldots,z_k)\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} \eta_j(z_i)\,dz_i\Big] \prod_{l=1}^{p} \eta_j(\xi_l) = A_p(\xi_1, \ldots, \xi_p) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} (A_0 - \overline{K}_0) \prod_{l=1}^{p} \eta_j(\xi_l) =$$

$$= A_p(\xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Этим показано, что полином $\widetilde{P}_n$ принадлежит множеству функциональных полиномсв с ядрами (18), (19) при произвольных $\varphi_i \in L_2(\Omega_i)$, $i = \overline{0, n}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть $\widetilde{F} \in H(\lambda)$ $\forall\lambda \geqslant 0$. Тогда функциональный полином $\hat{\widetilde{\overline{P}}}{}_n^*$ является решением задачи*

$$\|\widetilde{F} - \widetilde{\overline{P}}{}_n^*\|_{H(0)} = \inf_{\widetilde{P}_n \in \varkappa_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(0)}, \tag{22}$$

где $\varkappa_n$ — множество интерполяционных функциональных полиномов степени не выше n с ортонормированными в $L_2(0, 1)$ узлами η_j, $j = \overline{1, m}$, и ядрами $\overline{K}_i \in L_2(\Omega_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Доказательство. Поскольку $\varkappa_n \subset \pi_n$, то

$$\|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n^*\|_{H(\lambda)} = \inf_{\widetilde{P}_n \in \pi_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(\lambda)} \leqslant \inf_{\widetilde{P}_n \in \varkappa_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(\lambda)} =$$

$$= \inf_{\widetilde{P}_n \in \varkappa_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(0)}. \tag{23}$$

Неравенство (23) выполняется при любом $\lambda \geqslant 0$. Найдем $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n^*\|_{H(\lambda)}$. Согласно (17)

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} [\widetilde{F}(\eta_j) - \widetilde{P}_n^*(\eta_j)]^2 = \frac{\lambda}{\Delta_n^2(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \Big[\widetilde{F}(\eta_j) - K_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\beta_{jk}\Big]^2 \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n^*\|_{H(\lambda)} = \|\widetilde{F} - \widetilde{\overline{P}}{}_n^*\|_{H(0)} \leqslant \inf_{\widetilde{P}_n \in \varkappa_n} \|\widetilde{F} - \widetilde{P}_n\|_{H(0)}. \tag{24}$$

Но поскольку $\widetilde{\overline{P}}{}_n^* \in \varkappa_n$, то неравенство (24) переходит в равенство, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Для рассмотрения задачи интерполяции в пространстве $C_0[0, 1]$, необходимо переписать интерполянт для $F(x)$ в виде

$$P_n(x) = \overline{K}_0 + \int_0^1 \overline{K}_1(z)\,dx(z) + \ldots + \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n} \overline{K}_n(z_1, \ldots, z_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} dx(z_i),$$

$$\overline{K}_i \in L_2(\Omega_i),\ i = \overline{0, n}, \tag{25}$$

с ядрами (18), (19) и узлами интерполяции $x_i(z) = \int_0^z \eta_i(\xi)\,d\xi$, $i = \overline{1, m}$, а интегралы в (25) в этом случае будут интегралами Пэли — Винера — Зигмунда [5].

1. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.
2. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР.— 1989.— 307, № 3.— С. 534—537.

3. *Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем.— М. : Наука, 1976.— 448 с.
4. *Лоран П. Ж.* Аппроксимация и оптимизация.— М. : Мир, 1975.— 496 с.
5. *Шилов Г. Е., Фан-Дык Тынь.* Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М. : Наука, 1967.— 192 с.

Получено 26.11.90