УДК 517.53

И. Е. ПРИЦКЕР, асп. (Ин-т математики и механики АН Украины, Донецк)

Порядковое сравнение норм полиномов в областях комплексной плоскости

Для произвольной жордановой области G получены неравенства, связывающие норму $\| P_n \|_{C(\overline{G})}$ с нормами $\| P_n \|_{L_2^1(G)}$ и $\| P_n \|_{W_2^1(G)}$ полинома $P_n(z)$ степени n.

Для довільної жорданової області G одержані нерівності, що зв'язують норму $\| P_n \|_{C(\overline{G})}$ з нормами $\| P_n \|_{L_2^1(G)}$ і $\| P_n \|_{W_2^1(G)}$ полінома $P_n(z)$ степеня n.

1. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — ограниченная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $0 \in G$; $P_n(z)$ — произвольный полином степени не выше n, $P_n(0) = 0$. Введем следующие обозначения:

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} = \max_{z \in \overline{G}} | P_n(z) |.$$

$$\| P_n \|_{L_2^1(G)} = \left[\iint_G | P_n'(z) |^2 d\sigma_z \right]^{1/2},$$

$$\| P_n \|_{W_2^1(G)} = \left[\iint_G | P_n(z) |^2 d\sigma_z \right]^{1/2} + \left[\iint_G | P_n'(z) |^2 d\sigma_z \right]^{1/2}.$$

Для областей с квазиконформной границей В. В. Андриевский [1] доказал следующую полиномиальную лемму:

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant C_1 \sqrt{\log n} \, \| P_n \|_{L_2^1(G)}, \tag{1}$$

Гайер [2] показал порядковую точность этой оценки даже в случае единичного круга.

В данной работе, опираясь на метод, предложенный в [2], рассмотрим задачу о нахождении порядковых оценок типа (1) для областей комплексной плоскости с более общим геометрическим строением границы. Эта задача играет важную роль при изучении равномерной сходимости полиномов Бибербаха к отображающей функции Римана в областях комплексной плоскости (см., например, [1, 3, 4])

2. Известно, что существует функция Римана $\varphi: G \to D$ конформно и однолистно отображающая область G на единичный круг D с нормировкой $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1/R$, где R — внутренний конформный радиус G. Пусть $z = \psi(w)$ — функция, обратная для функции Римана. Обозначим через L границу области G, а через L_r — внутреннюю линию уровня области G, т. е. $L_r = \{z : |\varphi(z)| = r\}$, $0 < r < 1$. Положим $G_r = \operatorname{Int} L_r$, $\Omega_r = \mathbf{C} \setminus \overline{G_r}$; функция $\Phi_r : \Omega_r \to \Omega' = \{w : |w| > 1\}$ осуществляет конформное отображение области Ω_r на внешность единичного круга Ω' и нормирована условиями: $\Phi_r(\infty) = \infty$, $\Phi_r'(\infty) > 0$. Для G_r рассмотрим внешние линии уровня $L_{r,u} = \{z \in \Omega_r : |\Phi_r(z)| = 1 + u\}$, где $u > 0$.

Кроме этого воспользуемся геометрической характеристикой области $\mu_G(\delta)$, введенной в [5]:

$$\mu_G(\delta) = \sup_{\substack{z \in L, \zeta \in \overline{G} \\ \delta \leqslant |z - \zeta| \leqslant \delta_0}} \mu_0(z, \zeta, G),$$

$$0 < \delta \leqslant \delta_0, \quad \delta_0 = \operatorname{dist}(0, L)/2,$$

где $\mu_0(z, \zeta, G)$ — приведенный относительно точки 0 модуль семейства кривых, отделяющих точки z и ζ от точки 0 [6].

В терминах геометрической характеристики $\mu_G(\delta)$ можно сформулировать основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная область с жордановой границей, $0 \in G$, тогда*

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant e \left[\mu_G \left(\frac{\delta_0}{4n^2} \right) + \frac{1}{\pi} \log \frac{4\sqrt{2}}{R} \right]^{1/2} \| P_n \|_{L_2^1(G)} . \tag{2}$$

Замечание 1. Учитывая элементарное неравенство $\| P_n \|_{L_2^1(G)} \leqslant \leqslant \| P_n \|_{W_2^1(G)}$, из теоремы 1 получаем

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant e \left[\mu_G \left(\frac{\delta_0}{4n^2} \right) + \frac{1}{\pi} \log \frac{4\sqrt{2}}{R} \right]^{1/2} \| P_n \|_{W_2^1(G)} .$$

Доказательство теоремы 1. При доказательстве будем следовать, в основном, рассуждениям из работ [2] и [5].

Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в G, $g(0) = 0$. Предположим, что $\| g \|_{L_2^1(G)} \leqslant 1$. Функция $F(w) = g(\psi(w))$ аналитическая в D, $F(0) = 0$, следовательно, $F(w)$ представима в D рядом

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k .$$

С другой стороны имеем

$$\iint_D |F'(w)|^2 d\sigma_w = \iint_G |g'(z)|^2 d\sigma_z = [\| g \|_{L_2^1(G)}]^2 \leqslant 1.$$

Используя разложение функции $F(w)$ в ряд, получаем

$$\iint_D |F'(w)|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 \leqslant 1.$$

Если $|w| \leqslant r$, то по неравенству Коши — Буняковского

$$|F(w)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

следовательно,

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{1/2}$$

при $z \in \overline{G}_r$.

В частности, для полинома $P_n(z)$, $\| P_n \|_{L_2^1(G)} \leqslant 1$, $\deg P_n \leqslant n$, $P_n(0) = 0$, имеем

$$|P_n(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{1/2}, \quad z \in \overline{G}_r . \tag{3}$$

Для того чтобы оценить величину $\| P_n \|_{C(\overline{G})}$, воспользуемся оценками искажения расстояния при конформном отображении [6]

$$\sqrt{R} e^{-\pi \mu_0(z, \zeta, G)} \leqslant \frac{|\varphi(z) - \varphi(\zeta)|}{\sqrt{|\varphi(\zeta)|}} \leqslant e^{2\pi} \sqrt{R} e^{-\pi \mu_0(z, \zeta, G)} .$$

В силу определению $\mu_G(\delta)$ получаем

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \geqslant \sqrt{R |\varphi(\zeta)|} \, e^{-\pi \mu_G(\delta)}, \tag{4}$$

если $\delta < |z - \zeta| \leqslant \delta_0$, $z \in L$, $\zeta \in \overline{G}$. Известно, что при $|w| < 1$ [7]

$$\frac{1}{4} (1 - |w|^2) |\psi'(w)| \leqslant \operatorname{dist} (\psi(w), L) \leqslant (1 - |w|^2) |\psi'(w)|,$$

поэтому $\delta_0 \geqslant R/8$; так как $|\zeta| \geqslant \delta_0$, то по теореме Кебе будем иметь

$$|\varphi(\zeta)| \geqslant \frac{1}{4}\delta_0 \geqslant \frac{R}{32}.$$

С учетом последнего неравенства из (4) получаем

$$|\varphi(z)-\varphi(\zeta)| \geqslant \frac{R}{4\sqrt{2}} e^{-\pi\mu_G(\delta)}.$$

Обозначим $\theta(\delta) = \frac{R}{4\sqrt{2}} e^{-\pi\mu_G(\delta)}$, тогда для любой точки $z \in L = \partial G$ при всех $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется точка $\zeta \in L_{1-\varepsilon\theta(\delta)}$ (линии уровня порядка $1-\varepsilon\theta(\delta)$) такая, что $|z-\zeta| < \delta$. При переходе к пределу при $\varepsilon \to 1$ будем иметь

$$\operatorname{dist}(z, G_{1-\theta(\delta)}) \leqslant \delta.$$

С другой стороны, при рассмотрении внешних линий уровня $L_{r,u}$ заключаем, что $\forall r \in (0, 1)$, $\forall u > 0$

$$\operatorname{dist}(\zeta, G_r) \geqslant \frac{\operatorname{diam} G_r}{4} u^2,$$

где $\zeta \in L_{r,u}$ [8, с. 181]. Значит, для произвольного $\delta \in (0, \delta_0]$ выполнено $G \subset \operatorname{Int} L_{1-\theta(\delta), u(\delta)}$, если

$$u(\delta) = \left(\frac{4\delta}{\operatorname{diam} G_{1-\theta(\delta)}}\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{4\delta}{\delta_0}\right)^{1/2} = 2\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}.$$

По лемме Бернштейна

$$|P_n(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \overline{G}_{1-\theta(\delta)}} |P_n(\zeta)| (1 + u(\delta))^n, \quad z \in \overline{G}.$$

Учитывая неравенство (3), находим

$$|P_n(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\log \frac{1}{\theta(\delta)}\right)^{1/2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}\right)^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\pi\mu_G(\delta) + \right.$$

$$\left. + \log \frac{4\sqrt{2}}{R}\right)^{1/2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}\right)^n \leqslant \left[\mu_G(\delta) + \frac{1}{\pi}\log\frac{4\sqrt{2}}{R}\right]^{1/2} e^{2n\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}}.$$

Окончательно получаем $\forall z \in \overline{G}$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$

$$|P_n(z)| \leqslant \left[\mu_G(\delta) + \frac{1}{\pi}\log\frac{4\sqrt{2}}{R}\right]^{1/2} e^{2n\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}}. \tag{5}$$

Если в соотношение (5) подставить $\delta = \delta_0/(4n^2)$, то получим утверждение теоремы 1.

Замечание 2. Из соотношения (5) следует, что теорему 1 можно также записать в следующей форме:

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \leqslant \inf_{0<t\leqslant 1} \left\{\left[\mu_G(t\delta_0) + \frac{1}{\pi}\log\frac{4\sqrt{2}}{R}\right]^{1/2} e^{2n\sqrt{t}}\right\} \|P_n\|_{L_2^1(G)}.$$

Замечание 3. Не изменяя доказательства теоремы 1, можно показать, что она верна для областей с достижимыми простыми концами (первого рода по Каратеодори).

3. Геометрическую характеристику $\mu_G(\delta)$ в различных классах областей можно выразить в более удобных геометрических терминах. Для этой цели рассмотрим области, удовлетворяющие $f(x)$-условию Джона, введенные в [5].

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 0$, $0 < f(x) \leqslant x$ при $x > 0$, тогда область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, если $\exists K > 0$, $a \in G$ такие, что $\forall z \in \partial G$ существует спрямляемая дуга l_z длины $l < K$ с естественной параметризацией $\zeta = \zeta(s)$, $\zeta(0) = z$, $\zeta(l) = a$, для которой $\operatorname{dist}(\zeta(s), \partial G) \geqslant f(s)$ при $s \in [0, l]$.

Воспользуемся доказанным в работе [5] следующим результатом (теорема 2): если область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, то

$$\mu_G(\delta) + \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{R} \leqslant 12 e^{2\pi} \int_{\delta/4}^{K} \frac{ds}{f(s)}.$$

С учетом теоремы 1 отсюда получим такую теорему.

Т е о р е м а 2. *Если область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, то справедливо неравенство*

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant C_2 \left[\int_{\delta_0/16n^2}^{K} \frac{ds}{f(s)} \right]^{1/2} \| P_n \|_{L_2^1(G)}, \tag{6}$$

где C_2 — абсолютная константа.

З а м е ч а н и е 4. Оценка (6) уточняет результат, полученный в работе [4] (лемма 8).

С л е д с т в и е 1. *Если $f(x) = \varepsilon x$, где $0 < \varepsilon < 1$, т. е. G удовлетворяет εx-условию Джона, то*

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant C_3 \sqrt{\log n} \, \| P_n \|_{L_2^1(G)}, \tag{7}$$

где C_3 не зависит от n и $P_n(z)$.

Отметим, что εx-условию Джона удовлетворяют области с квазиконформной границей, липшицевы области и области с внутренним условием клина раствора α фиксированного радиуса [5].

С л е д с т в и е 2. Пусть G удовлетворяет εx^{α}-условию Джона ($\alpha > 1$), тогда

$$\| P_n \|_{C(\overline{G})} \leqslant C_4 n^{\alpha - 1} \| P_n \|_{L_2^1(g)}, \tag{8}$$

где C_4 не зависит от n и $P_n(z)$.

Заметим, что εx^{α}-условию Джона удовлетворяют локальные Lip $1/\alpha$-области и области, граница которых состоит из конечного числа квазиконформных дуг, гладких в окрестностях точек стыка и образующих в них внутренние нулевые углы порядка касания не выше α [5].

В неравенствах (6)—(8) величину $\|P_n\|_{L_2^1(G)}$ можно заменить на $\| P_n \|_{W_2^1(G)}$, причем оценка, получающаяся из (8), значительно уточняет результат работы [9].

1. *Андриевский В. В.* Сходимость полиномов Бибербаха в областях с квазиконформной границей // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 3.— С. 273—277.
2. *Gaier D.* On a polynomial lemma of Andrievskii // Arch. Math.— 1987.— 49.— P. 119—123.
3. *Gaier D.* On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners // Constr. Approx.— 1988.— N 4.— P. 289—305.
4. *Андриевский В. В.* О равномерной сходимости полиномов Бибербаха в областях с кусочно-квазиконформной границей // Теория отображений и приближение функций.— Киев : Наук. думка.— 1983.— С. 3—18.
5. *Маймескул В. В.* Оценки роста сопряженных гармонических полиномов в областях комплексной плоскости // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 6.— С. 772—777.
6. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб.— 1977.— 102, № 3.— С. 331—361.
7. *Pommerenke Ch.* Univalent functions.— Vandenhoeck — Ruprecht, Göttingen, 1975.— 376 p.
8. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 270 с.
9. *Куликов И. В.* О норме оператора вложения $W_2^1(G)$ в $\overline{C}(G)$ для полиномов // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естественные науки.— 1984.— № 3.— С. 21—22.

Получено 24.12.90