УДК 519.21

А. М. Кулик, студ. (Киев. ун-т)

О МНОЖЕСТВЕ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

The complete description of the set of partial limits is given for a large class of sequences of weighted sums of independent random variables with a triangle coefficient matrix.

Наведено повний опис множин часткових границь для широкого класу послідовностей зважених сум незалежних випадкових величин з трикутною матрицею коефіцієнтів.

1. Предельное поведение сумм независимых случайных величин было долгое время одним из центров проблематики теории вероятностей. Теория различных видов сходимости таких сумм (слабой, по вероятности, с вероятностью единица) имеет большое значение и глубоко разработана (см., например, [1, 2]). В то же время при отсутствии сходимости с вероятностью единица представляет интерес изучение поточечного поведения сумм как числовых последовательностей; примером результата о таком поведении может служить „закон повторного логарифма". Существует большое количество работ, в которых исследуются некоторые осцилляторные свойства различных последовательностей случайных величин (см., например, [3 – 5]).

В настоящей статье изучается поточечное предельное поведение последовательностей случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеющих вид $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k$, где $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных величин на этом пространстве, а $\{c_{nk}, n \in \mathbb{N}, k \le n\}$ — действительная матрица коэффициентов. Для каждой точки ω из Ω определим множество $A(\omega)$ как множество частичных пределов последовательности $\{x_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$. Как показывает следующая лемма, $A(\omega)$ является в некотором смысле вероятностным объектом.

Лемма 1. *Пусть* $t \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. *Тогда* 1) $\{\omega \mid t \in A(\omega)\} \in \mathcal{F}$; 2) $\{\omega \mid A \subset A(\omega)\} \in \mathcal{F}$; 3) $\{\omega \mid A \cap A(\omega) \ne \varnothing\} \in \mathcal{F}$, $\{\omega \mid A \cap A(\omega) = \varnothing\} \in \mathcal{F}$; 4) $\{\omega \mid A(\omega) \subset A\} \in \mathcal{F}$.

Доказательство.

1) $$\{\omega \mid t \in A(\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \left\{ \omega \mid |x_m(\omega) - t| < \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}.$$

2) В силу сепарабельности $\mathbb{R}$ в A существует не более чем счетное всюду в A плотное подмножество $\{a_i, i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$. Поскольку для каждого ω $A(\omega)$ замкнуто,

$$A \subset A(\omega) \Leftrightarrow \{a_i, i \in I\} \subset A(\omega),$$

$$\{\omega \mid A \subset A(\omega)\} = \bigcap_{i \in I} \{\omega \mid a_i \in A(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

3) $\{\omega \mid A \cap A(\omega) \ne \varnothing\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \left\{\omega \mid x_m(\omega) \in A_n \right\} \in \mathcal{F}\}$, поскольку $A_n = \left\{ t \mid d(t, A) < 1/n \right\}$ — открытое, и следовательно, борелевское множество,

$$\{\omega \mid A \cap A(\omega) = \varnothing\} = \Omega \setminus \{\omega \mid A \cap A(\omega) \neq \varnothing\} \in \mathcal{F}.$$

4) $\{\omega \mid A(\omega) \subset A\} = \{\omega \mid A(\omega) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \varnothing\} \in \mathcal{F}.$

Лемма доказана.

2. Далее рассматриваются матрицы $\{c_{nk}\}$, удовлетворяющие условию

$$c_{nk} \to 0, \ n \to \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Если условие (1) не выполняется, т. е. для некоторого k c_{nk} не стремится к нулю при $n \to \infty$, то множество частичных пределов последовательности $\{x_n(\omega)\}$ сильно зависит от случайной величины $\{\xi_k\}$. Например, если $\{\xi_k\}$ — последовательность бернуллиевских величин $P(\xi_k = 1) = P(\xi_k = -1) = 1/2$, а $c_{nk} = \begin{cases} 1, & k = 1; \\ 0, & k > 1, \end{cases}$ то $\{\omega \mid A(\omega) = \{1\}\} = \{\omega \mid \xi_1(\omega) = 1\}$.

В то же время для

$$c_{nk} = \begin{cases} 0, & k < n; \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

множество $A(\omega)$ будет почти наверное равно $\{-1, 1\}$.

Как показано в [6], имеет место следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $\{\xi_k\}$, $\{c_{nk}\}$ *определены в п.* 1 *и* $\{c_{nk}\}$ *удовлетворяет условию* (1). *Тогда существует подмножество* $\mathbb{R}$, *совпадающее с множеством частичных пределов последовательности* $\{x_n(\omega)\}$ *почти наверное.*

Отметим, что утверждение леммы может быть также доказано с помощью леммы 1 из [7] и закона „0 и 1" Колмогорова.

Далее через X будем обозначать подмножество $\mathbb{R}$, существование которого гарантирует лемма 2.

3. В случае слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ частичное описание множества X дает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\{\xi_k\}$ *и* $\{c_{nk}\}$ *определены в п.* 1 *и* $\{c_{nk}\}$ *удовлетворяет условию* (1). *Пусть также последовательность* $\{x_n\}$ *слабо сходится к некоторой случайной величине* y. *Пусть* $\operatorname{supp}\mu_y$ *— замкнутый носитель меры, порожденной на* $\mathbb{R}$ *случайной величиной* y. *Тогда* $\operatorname{supp}\mu_y \subset X$.

Доказательство. Пусть $t \in \operatorname{supp}\mu_y$ фиксирована. Докажем, что точка t — предельная почти наверное. Поскольку

$$\{\omega \mid t \notin A(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{\omega \,\middle|\, |x_m(\omega) - t| > \frac{1}{n}\right\},$$

для это достаточно показать, что для любых n, k, $\varepsilon > 0$

$$P\left(\bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{\omega \,\middle|\, |x_m(\omega) - t| > \frac{1}{n}\right\}\right) < \varepsilon.$$

Пусть n, k и $\varepsilon > 0$ фиксированы. Положим $\varepsilon_{p,q} = \sum_{s=1}^{q} c_{ps}\xi_s$. В силу сходимости к нулю c_{ps}, $p \to \infty$,

$$\forall\, q \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{p,q} \xrightarrow{P} y,\ p \to \infty, \quad \text{и} \quad x_p - \varepsilon_{p,q} \xrightarrow{d} y,\ p \to \infty.$$

Построим рекуррентным образом последовательность $m(j)$; $m(1) = k$. Существует m_1: для всех $m \geq m_1$ $P\left(|\varepsilon_{m,m(1)}| > \frac{1}{2n} \right) < \frac{\varepsilon}{2}$; поскольку $x_m - \varepsilon_{m,m(1)} \xrightarrow{d} y,\ n \to \infty$, существует $m(2)$ такое, что $P\left(|x_{m(2)} - \varepsilon_{m(2),m(1)} - t| > \frac{1}{2n} \right) \leq 1 - \frac{1}{2} P\left(|y - t| < \frac{1}{2n} \right)$, где $P\left(|y-t| < \frac{1}{2n} \right) = r > 0$, так как $t \in \operatorname{supp} \mu_y$. Аналогично строится $m(j)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, причем $\{m(j)\}$ имеет следующие свойства:

а) $P\left(|\varepsilon_{m(j+1),m(j)}| > \frac{1}{2n} \right) < \varepsilon \cdot 2^{-j}$; $j \in \mathbb{N}$;

б) $P\left(|x_{m(j+1)} - \varepsilon_{m(j+1),m(j)} - t| > \frac{1}{2n} \right) < 1 - \frac{r}{2}$, $j \in \mathbb{N}$;

в) случайные величины $\{x_{m(j+1)} - \varepsilon_{m(j+1),m(j)}\}$ независимы в совокупности.

Тогда справедливы следующие оценки:

$$P\left(\bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{ \omega \,\middle|\, |x_m(\omega) - t| > \frac{1}{n} \right\} \right) \leq$$

$$\leq P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{ |x_{m(j+1)} - \varepsilon_{m(j+1),m(j)} - t| > \frac{1}{2n} \right\} \cup \right.\right.$$

$$\left.\left. \cup \left\{ |\varepsilon_{m(j+1),m(j)}| > \frac{1}{2n} \right\} \right) \right) \leq$$

$$\leq P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ |x_{m(j+1)} - \varepsilon_{m(j+1),m(j)} - t| > \frac{1}{2n} \right\} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} P\left(\left\{ |\varepsilon_{m(j+1),m(j)}| > \frac{1}{2n} \right\} \right) \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{2} \right) + \varepsilon = \varepsilon,$$

т. е. $P\left(\bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{ |x_m - t| > \frac{1}{n} \right\} \right) = 0$ и любая точка из $\operatorname{supp} \mu_y$ является предельной почти наверное. Это означает, что $\operatorname{supp} \mu_y \subset X$. Лемма доказана.

Как показывают два следующих примера, носитель меры вовсе не обязан совпадать с множеством предельных почти наверное точек.

***Пример* 1.**

$$c_{nk} = \begin{cases} 0, & k < n; \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

$\{\xi_k\}$ независимы и $P(\xi_k=0) = 1-\frac{1}{k}$, $P(\xi_k=1) = \frac{1}{k}$. Тогда $x_n = \xi_n$ независимы, $P(x_n=1) = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P(x_n=1) = +\infty$ и по лемме Бореля – Кантелли в силу независимости $\{x_n\}$ $P(1 \in A(\omega)) = 1$. При этом $x_n \xrightarrow{P} y$ и $x_n \xrightarrow{d} y$, $n \to \infty$, $\{0\} = \operatorname{supp}\mu_y \neq X = \{0, 1\}$.

Пример 2. $\{\xi_k\}$ — независимые бернуллиевские величины с $P(\xi_k=1) = P(\xi_k=-1) = 1/2$, $c_{nk} = (2n \ln\ln n)^{-1/2}$, $n \geq 3$ Тогда $x_n \xrightarrow{P} 0$, $x_n \xrightarrow{d} 0$, $n \to \infty$, а по закону „повторного логарифма" $X = [-1, 1]$.

4. Для справедливости равенства $\operatorname{supp}\mu_y = X$ на случайные величины $\{\xi_k\}$ и матрицу $\{c_{nk}\}$ нужно наложить дополнительные условия.

Теорема 1. *Пусть матрица* $\{c_{nk}\}$ *удовлетворяет условию* A : $\{c_{nk} = c_{\sigma_n(k)}\}$, *где ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *сходится абсолютно и последовательность перестановок* $\{\sigma_n(k)\}$ *такова, что* $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sigma_n(k) \to \infty$, $n \to \infty$. *Пусть также* $\{\xi_k\}$ *независимы и одинаково распределены и таковы, что последовательность* $y_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ *сходится с вероятностью* 1 *к некоторой случайной величине* y.

Тогда $\operatorname{supp}\mu_y = X$.

Доказательство. По условию $x_n = y_n$ и $x_n \xrightarrow{d} y$, $n \to \infty$. Зафиксируем $t \notin \operatorname{supp}\mu_y$. Докажем, что точка t не является предельной почти наверное. Поскольку $t \notin \operatorname{supp}\mu_y$, $\exists\, n_0$: $\mu_y\left(\left(t - \frac{1}{2n_0}, t + \frac{1}{2n_0}\right)\right) = 0$. Обозначим через $y^{(n)}$ случайную величину, равную $\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\xi_k$ почти наверное и одинаково распределенную с y, $y^{(n)} = x_n + z_n$, где $z_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\xi_k \to 0$, $n \to \infty$ $(\operatorname{mod} P)$.

Тогда

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad P\left(|y^{(m)} - t| < \frac{1}{2n_0}\right) = 0$$

и

$$P(\{t \in A(\omega)\}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{m=j}^{\infty}\left\{|x_m - t| < \frac{1}{n}\right\}\right) \leq$$

$$\leq P\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{m=j}^{\infty}\left(\left\{|z_m| > \frac{1}{2n}\right\} \cup \left\{|y^{(m)} - t| < \frac{1}{2n_0}\right\}\right)\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{m=j}^{\infty}\left\{|z_m| > \frac{1}{2n}\right\}\right) = 0,$$

поскольку $z_n \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому $X \subset \operatorname{supp}\mu_y$. Выполнение условия A влечет за собой выполнение условия (1), т. е. верны леммы 2 и 3. Окончательно

$\operatorname{supp}\mu_y = X$, $P(\{\omega \mid A(\omega) = \operatorname{supp}\mu_y\}) = 1$. Теорема доказана.

Следует отметить, что теорема достаточно полно описывает предельное поведение $\{x_n\}$ только в случае $\{\xi_k\}$, распределенных на конечном интервале. Для широкого класса $\{\xi_k\}$, распределенных на всем $\mathbb{R}$, носитель предельной меры будет совпадать с $\mathbb{R}$. Тогда по теореме множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ совпадает почти наверное с $\mathbb{R}$, что является только первым приближением в описании асимптотического поведения последовательности.

Пример 3. *Схема линейной регрессии.*

Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M|\xi_1| < +\infty$ и последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентным соотношением $x_n = \alpha x_{n-1} + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (-1, 1)$ с начальным условием $x_0 = 0$ почти наверное. Тогда $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k}\xi_k$, матрица $\{c_{nk} = \alpha^{n-k}\}$ удовлетворяет условию А.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\xi_k$ сходится с вероятностью 1, $\{c_{nk}\}$ и $\{\xi_k\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $\{x_n\}$ слабо сходится к случайной величине $y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}\xi_k$ почти наверное и $X = \operatorname{supp}\mu_y$.

В частности, если $\{\xi_k\}$ — независимые бернуллиевские величины с

$$P(\xi_k = 0) = P\left(\xi_k = \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

то носителем предельной меры будет множество всех t из $[0, 1]$, троичное разложение которых не содержит единиц, т. е. канторово множество. Таким образом, множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ совпадает почти наверное с канторовым множеством.

Пример 4. *Обобщенная схема линейной регрессии.*

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность из примера 3, а последовательность $\{x_n\}$ задается неоднородным разностным уравнением $x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_m x_{n-m} = \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, с начальными условиями $x_0 = x_{-1} = \ldots = x_{-m+1} = 0$ почти наверное и характеристическим многочленом $P(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m$, все корни которого по модулю меньше единицы; $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} h_{n-k}\xi_k$, где (числовая) последовательность $\{h_k\}$ задается однородным разностным уравнением $h_n + a_1 h_{n-1} + \ldots + a_m h_m = 0$, $n \in \mathbb{N}$, с начальными условиями $h_0 = 1$, $h_{-1} = \ldots = h_{-m+1} = 0$ (см., например, [8]).

Последовательность $\{h_n\}$ стремится к нулю показательным образом, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k| < +\infty$, и $\{\xi_k\}$, $\{c_{nk} = h_{n-k}\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к случайной величине $y = \sum_{k=1}^{\infty} h_{k-1}\xi_k$ почти наверное и множество частичных пределов $\{x_n\}$ совпадает с $\operatorname{supp}\mu_y$ почти наверное.

Так, пусть $\{\xi_k\}$ независимы и равномерно распределены на $[0,1]$, $m=2$, $a_1=-1$, $a_2=1/4$, характеристический многочлен имеет кратный корень, равный $1/2$. Тогда $h_n=(n+1)2^{-n}$, $\{x_n\}$ слабо сходится к случайной величине $y=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot 2^{-k+1}\xi_k$ почти наверное. Покажем, что $\operatorname{supp}\mu_y=[0,4]$:

$$\forall\, t\in[0,4],\ \ \varepsilon>0$$

$$P(|y-t|<\varepsilon)\geq P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} k\cdot 2^{-k+1}\xi_k-t\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\geq$$

$$\geq P\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\left|\xi_k-\frac{t}{\sum_{k=1}^{N}k\cdot 2^{-k+1}}\right|<\frac{t}{4\sum_{k=1}^{N}k\cdot 2^{-k+1}}\right\}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{N}P\left(\left|\xi_k-\frac{t}{\sum_{k=1}^{N}k\cdot 2^{-k+1}}\right|<\frac{\varepsilon}{4\sum_{k=1}^{N}k\cdot 2^{-k}}\right)>0,$$

где N выбирается таким, чтобы $\sum_{k=N+1}^{\infty} k\cdot 2^{-k+1}<\varepsilon/2$. В то же время $P(y\notin[0,4])\leq P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\xi_k\notin[0,1]\}\right)=0$, $\operatorname{supp}\mu_y=[0,4]$. По теореме множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ совпадает с отрезком $[0,4]$ почти наверное.

5. Кроме матриц из теоремы 1 равенство $X=\operatorname{supp}\mu_y$ будет выполняться для всех матриц, равных сумме матрицы, из теоремы 1 и матрицы $\{d_{nk}\}$ настолько малой, что $\sum_{k=1}^{n} d_{nk}\xi_k\to 0$, $n\to\infty$ $(\operatorname{mod} P)$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_k\}$ *независимы,* $\{c_{nk}=c_{\sigma_n(k)}+d_{nk}\}$, *где* $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|=+\infty$, *для всех* k $\sigma_n(k)\to\infty$, $n\to\infty$, *и* $\{d_{nk}\}$ *такова, что существует* $m\in\mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{nk}^2\right)^m<+\infty$ *и* $M\,\xi_1^{2m}<+\infty$. *Пусть последовательность* $y_n=\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ *слабо сходится к случайной величине* $y=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$ *почти наверное. Тогда* $x_n\xrightarrow{d} y$, $n\to\infty$, *и* $X=\operatorname{supp}\mu_y$.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что $z_n=\sum_{k=1}^{n} d_{nk}\xi_k\to 0$, $n\to\infty$ $(\operatorname{mod} P)$. Имеем

$$P(|z_n|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^{2m}}M\,z_n^{2m}\leq\frac{C(m)}{\varepsilon^{2m}}\left(M\,z_n^2\right),$$

где $C(m)$ — константа, зависящая только от m (см. [1, с. 86–99]),

$$P(|z_n|\geq\varepsilon)\leq\frac{M\xi_1^{2m}C(m)}{\varepsilon^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{nk}^2\right)^m \quad\text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty}P(|z_n|\geq\varepsilon)<+\infty$$

для любого $\varepsilon>0$, что является достаточным условием для сходимости $\{z_n\}$ к нулю почти наверное. Теорема доказана.

6. Как видно из примера 2, условие одинаковой распределенности величин

$\{\xi_k\}$ не является достаточным для равенства множества частичных пределов и носителя предельной меры почти наверное. Результат теоремы 2 охватывает достаточно широкий класс матриц преобразования. Действительно, если $\{\xi_k\}$ имеют невырожденное негауссовское распределение, все абсолютные моменты которого конечны, то при дополнительном ограничении $c_{nk}\geq 0$, $\sup\limits_n \sum_{k=1}^{n} c_{nk} < < +\infty$ слабая сходимость последовательности $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k$ влечет за собой представление $c_{nk} = c_{\sigma_n(k)} + d_{nk}$, где $c_k \geq 0$, $\sigma_n \in S_n$ и $\sum_{k=1}^{n} d_{nk}^2 \to \to 0$, $n \to \infty$. Этот результат может быть доказан следующим образом. Из ограниченности сумм $\sum_{k=1}^{n} c_{nk}$ следует сходимость моментов $M x_n^m$ к моментам предельного распределения, а значит, и сходимость семиинвариантов (коэффициентов разложения в ряд в точке 0 логарифма характеристической функции) $s_{x_n}^m$ к семиинвариантам предельного распределения, $s_{x_n}^m = = s_{\xi_1}^m \sum_{k=1}^{n} c_{nk}^m$. Поскольку ξ_1 невырождена и негауссовская, ξ_1 имеет бесконечно много ненулевых семиинвариантов $s_{\xi_1}^m$ и, следовательно, для бесконечного множества номеров m существует предел $\sum_{k=1}^{n} c_{nk}^m$ при $n \to \infty$. Из этого и из ограниченности сумм $\sum_{k=1}^{n} c_{nk}$ можно вывести требуемый результат. Это значит, что в дополнительном предположении $c_{nk} \geq 0$, $\sup\limits_n \sum_{k=1}^{n} c_{nk} < +\infty$ сходимость $\{x_n\}$ равносильна представлению $x_n = y_n + + z_n$, где $z_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$, а y_n — последовательность из теоремы 1 ($y_n = = x_n - z_n \xrightarrow{d} y$, $n \to \infty$).

Теорема 2 определяет достаточное условие для сходимости к нулю почти наверное: если $\sum_{k=1}^{n} d_{nk}^2$ убывает не медленнее, чем степенным образом, то $z_n = \sum_{k=1}^{n} d_{nk}\xi_k \to 0$, $n \to \infty$ $(\mathrm{mod} P)$.

По поводу некоторых других условий, обеспечивающих сходимость почти наверное к нулю последовательности взвешенных сумм, см. [4, 5].

1. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987. – 310 с.
2. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 414 с.
3 *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
4 *Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б.* Неравенство Брунна – Минковского и его приложения. – Киев: Наук. думка, 1985. – 195 с.
5 *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Принцип сжатия и усиленный закон больших чисел для взвешенных сумм // Теория вероятностей и ее применения. – 1986. – **31**, № 3. – С. 516 – 529.
6. *Солнцев С. А.* Осцилляционные свойства взвешенных сумм независимых случайных величин: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 18 с.
7. *Кулик А. М.* Потраекторное предельное поведение последовательностей случайных величин // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 75 – 87.
8. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

Получено 31.03.92