УДК 534.111

Б. І. Сокіл, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ ОДНОЧАСТОТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

An approach to constructing one-frequency solutions of the nonlinear wave equation is given. The essence of the method is to write the asymptotic expansion in a modernized form by using the special periodic Ateb-functions. This method enables one to obtain an approximate solution to the problem under consideration without difficulties.

Викладено підхід до побудови одночастотних розв'язків нелінійного хвильового рівняння, який полягає у зображенні асимптотичного розкладу у модернізованій формі з використанням спеціальних періодичних Ateb-функцій. Запропонований метод дає можливість без особливих математичних труднощів одержати наближений розв'язок задачі.

Пропонується модернізована форма зображення асимптотичного розв'язку крайових задач для нелінійного хвильового рівняння. При традиційному поданні розв'язку [1] розглядуваного класу задач [2] виникають значні математичні труднощі вже при знаходженні першого "покращеного" наближення.

Розглянемо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f(x, u, u'_x, u'_t) \tag{1}$$

для простоти при крайових умовах

$$u(x, t)\big|_{x=0} = u(x, t)\big|_{x=L} = 0, \tag{2}$$

в якому $f(x, u, u'_x, u'_t)$ — відома аналітична функція; α, ν — постійні, причому $1 + \nu = (2\mu_1 + 1)/(2\mu_2 + 1)$, $\mu_i = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$, ε — малий параметр. Одночастотний розв'язок [1] в k-й формі динамічної рівноваги для сформульованої задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = aX_k(x)T_k(\psi_k) + \varepsilon U_1^k(a, x, T_k) + \varepsilon^2 U_2^k(a, x, T_k) + \ldots, \tag{3}$$

де функції $U_n^k(a, x, T_k)$ задовольняють умови

$$U_n^k(a, x, T_k)\big|_{x=0} = U_n^k(a, x, T_k)\big|_{x=L} = 0, \tag{4}$$

а параметри a і ψ_k зв'язані диференціальними рівняннями, як і в [2]. Для визначення функцій $X_k(x)$ і $T_k(\psi_k)$ із (1), враховуючи (3), одержуємо нелінійні диференціальні рівняння

$$\left(\frac{dX_k}{dx}\right)^{\nu} \frac{d^2X_k}{dx^2} + \lambda_k X_k = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2T_k}{d\psi_k^2}\omega_k^2 + \alpha\lambda_k T_k^{\nu+1} = 0. \tag{6}$$

Легко перевірити, що розв'язок незбуреної $(\varepsilon = 0)$ крайової задачі виражається за допомогою Ateb-функцій [3] у вигляді

$$aX_k(x)T_k(\psi_k) = a\,\mathrm{ca}\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi x}{L}\right)\mathrm{ca}\,(\nu + 1, 1, \omega_k t), \tag{7}$$

де

$$\omega_k = \left[\alpha a^{\nu}\left(\frac{k\Pi}{L}\right)^{\nu+2}\right]^{1/2}, \qquad \Pi = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu+1}{\nu+2}\right)}.$$

Теорема. *Якщо* $\{X_k(x)\}$ — *система двічі диференційованих функцій, які є розв'язками нелінійного диференціального рівняння* (5) *і задовольняють крайові умови, які випливають з* (2), *то вона є ортогональною і повною на* $x \in [0, L]$, *тобто*

$$\int_0^L X_k(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq k; \\ \dfrac{L(\nu+2)}{3\nu+4} & \text{при} \quad m = k. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення теореми базується на властивостях періодичних Ateb-функцій.

Підставляючи (3) в (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо рівняння для знаходження функцій $U_n^k(a, x, T_k)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$L(U_n^k) = \frac{4\omega_k^2}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k}\left[\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)\frac{\partial U_n^k}{\partial T_k}\right] + \frac{2\omega_k^2}{\nu+2} T_k^{\nu+1} \frac{\partial U_n^k}{\partial T_k} -$$

$$- \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(aT_k \frac{dX_k}{dx}\right)^{\nu} \frac{\partial U_n^k}{\partial x}\right] = F_n^k(a, x, T_k) -$$

$$- X_k(x)\left\{\left[\frac{2\alpha}{\nu+2}\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)\right]^{1/2}\left(2\omega_k + a\frac{d\omega_k}{da}\right)A_n^k(a) + 2\alpha\omega_k T_k^{\nu+1} B_n^k(a)\right\}, \tag{9}$$

де $F_n^k(a, x, T_k)$ — відомі функції.

Можна довести, що якщо функції $U_n^k(a, x, T_k)$ задовольняють умови (4), то виконуються співвідношення

$$\int_0^L \int_{-1}^1 L(U_n^k) \rho_i(T_k) X_k(x) dT_k \, dx = 0, \tag{10}$$

де

$$\rho_1(T_k) = 1, \;\; \rho_2(T_k) = \int_1^{T_k} \left[\frac{2}{\nu+2}\left(1 - \overline{T}_k^{\nu+2}\right)\right]^{-3/2} d\overline{T}_k \, .$$

Тоді із (9), враховуючи (10), одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження функцій $A_n^k(a)$ і $B_n^k(a)$:

$$\alpha_{ni}{}^k(a) \; A_n^k(a) + \beta_{ni}^k(a) \; B_n^k(a) = F_{ni}^k(a), \tag{11}$$

де

$$\alpha_{ni}^k(a) = \left(2\omega_k + a\frac{d\omega_k}{da}\right)\int_0^L \int_{-1}^1 \left[\frac{2\alpha}{\nu+2}\left(1 - T_k^{\nu+2}\right)\right]^{1/2} \rho_i(T_k) X_k^2(x) dT_k \, dx,$$

$$\beta_{ni}^k(a) = 2\alpha\omega_k \int_0^L \int_{-1}^1 T_k^{\nu+1} \rho_i(T_k) X_k^2(x) dT_k \, dx,$$

$$F_n^{ki}(a) = \int_0^L \int_{-1}^1 F_n^k(a,x,T_k) \rho_i(T_k) X_k(x) dT_k \, dx.$$

Таким чином, в першому наближенні одночастотний розв'язок розглядуваної крайової задачі описується співвідношенням (7), в якому параметри a і ψ_k визначаються відомими диференціальними залежностями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1^k(a) \qquad \frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon B_1^k(a). \tag{12}$$

Перейдемо до знаходження першого "покращеного" і наступних наближень поставленої крайової задачі. Для цього невідомі функції $U_n^k(a, x, T_k)$ будемо шукати у вигляді

$$U_n^k(a, x, T_k) = \sum_{m=1} U_{nm}^k(a, T_k) X_m(x), \tag{13}$$

де згідно з ортогональністю функцій $\{X_k(x)\}$ невідомі коефіцієнти $U_{nm}^k(a, T_k)$ визначаються диференціальними рівняннями

$$\omega_k^2 \frac{4}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k}\left[\left(1-T_k^{\nu+2}\right)\frac{\partial U_{nm}^k}{\partial T_k}\right] + \frac{2\omega_k}{\nu+2}\frac{\partial U_{nm}^k}{\partial T_k} T_k^{\nu+1} +$$
$$+ \frac{2(\nu+1)}{\nu+2}\omega_k^2 T_k^{\nu} U_{nm}^k = \tilde{F}_{nm}^k(a, T_k), \tag{14}$$

в яких

$$\tilde{F}_{nm}^k(a, T_k) =$$
$$= \begin{cases} F_{nm}^k(a, T_k) - A_n^k(a)\left[\dfrac{2\alpha}{\nu+2}\left(1-T_k^{\nu+2}\right)\right]^{1/2}\left(2\omega_k + a\dfrac{d\omega_k}{da}\right) - \\ - 2\alpha\omega_k T_k^{\nu+1} B_n^k(a) & \text{при } m = k; \\ F_{nm}^k(a, T_k) & \text{при } m \neq k, \end{cases}$$

а $F_{nm}^k(a, T_k)$ — коефіцієнти розкладу функції $F_n^k(a, x, T_k)$ в ряд за системою ортогональних функцій $\{X_k(x)\}$, тобто

$$F_n^k(a, x, T_k) = \sum_{m=1} F_{nm}^k(a, T_k) X_m(x). \tag{15}$$

Легко перевірити, що однорідне рівняння, яке відповідає (14), має частинні розв'язки

$$\overline{U}_{nm}^k(a, T_k) = \left[\frac{2}{\nu+2}\left(1-T_k^{\nu+2}\right)\right]^{1/2};$$

$$\overline{\overline{U}}_{nm}^k(a, T_k) = \overline{U}_{nm}^k(a, T_k)\int_0^{T_k}\left[\frac{2}{\nu+2}\left(1-\overline{T}_k^{\nu+2}\right)\right]^{-3/2} d\overline{T}_k. \tag{16}$$

Тоді загальні розв'язки неоднорідних рівнянь (14) можна записати у вигляді

$$U_{nm}^k(a, T_k) = \int \tilde{F}_{nm}^k(a, \overline{T}_k)\left[\overline{\overline{U}}_{nm}^k(a, T_k)\overline{U}_{nm}^k(a, \overline{T}_k) -\right.$$
$$\left. - \overline{U}_{nm}^k(a, T_k)\overline{\overline{U}}_{nm}^k(a, \overline{T}_k)\right] d\overline{T}_k. \tag{17}$$

Таким чином, виклавши загальний підхід до знаходження функцій $U_n^k(a, x, T_k)$, можна перейти (попередньо знайшовши функцію $F_2^k(a, x, T_k)$ і на основі неї $U_2^k(a, x, T_k)$) до розв'язку задачі у другому наближенні і аналогічно до наступних наближень.

Слід зауважити, що запропонований підхід до побудови одночастотних розв'язків можна застосувати і для більш складних крайових умов, а також для деяких інших класів нелінійних рівнянь з частинними похідними.

1. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Выща шк., 1976. – 592 с.
2. *Сокіл Б. І., Барвінський А. Ф.* Про асимптотичний розв'язок однієї нелінійної крайової задачі // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 22 – 26.
3. *Сеник П. М.* Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325 – 333.

Одержано 28.12.92