УДК 513.88

В. В. Шевчик, канд. физ.-мат. наук (Запорож. ун-т)

СТРОГИЕ КВАЗИДОПОЛНЕНИЯ И ОПЕРАТОРЫ ПЛОТНОГО ВЛОЖЕНИЯ

A quasicomplement M of a subspace N of a Banach space X is called strict if M does not contain an infinite-dimensional subspace M_1 such that the linear manifold $N + M_1$ is closed. It is proved that if X is separable, then N always has a strict quasicomplement. We study the properties of the dense imbedding operator restricted to infinite-dimensional closed subspaces of the space, where it is defined.

Квазідоповнення M підпростору N банахового простору X називається строгим, якщо M не містить нескінченновимірного підпростору M_1 такого, що лінійний многовид $N + M_1$ — замкнутий. Доведено, що якщо X сепарабельний, то N завжди має строге квазідоповнення. Розглянуто властивості звужень операторів щільного вкладення на нескінченновимірні замкнені підпростори простору, в якому він означений.

1. Всюду, если не оговорено особо, термин „подпространство" будет означать: „бесконечномерное замкнутое подпространство бесконечной коразмерности".

Пусть N — подпространство банахова пространства X. Напомним [1], что подпространство M называется квазидополнением N, если 1) $N \cap M = 0$; 2) $\overline{N + M} = X$ $(N + M \neq X)$. Если X сепарабельное, то N имеет квазидополнение [1]. Разумеется, квазидополнение у подпространства N не единственно. Из множества подпространств, квазидополнительных к N, часто возникает необходимость выбрать подпространство, имеющее некоторые специальные свойства. Рассмотрим один из типов подпространств, квазидополнительных к N, и используем его для изучения некомпактных операторов плотного вложения.

Определение. *Квазидополнение M к N называется строгим, если M не содержит подпространства M_1 такого, что линейное многообразие $N + M_1$ — замкнутое.*

Отметим, что если X — гильбертово пространство, M — строгое квазидополнение к N — означает, что M „вполне асимптотично" к N по Диксмье (см. [2], где введено понятие асимптотично расположенных подпространств гильбертового пространства) и при этом $\overline{N + M} = X$.

Теорема 1. *Если X — сепарабельное банахово пространство и N — его подпространство, то N имеет строгое квазидополнение.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — нормированный M-базис* подпространства N такой, что

$$\sup_n \|f_n\|_{N^*} = K < \infty,$$

где $\{f_n\} \subset N^*$ — последовательность, биортогональная к $\{x_n\}$. Продолжая каждый функционал на X без увеличения нормы, можем считать, что $\{f_n\} \subset X^*$ и выполняется свойство

$$\sup_n \|f_n\|_{X^*} = K < \infty. \tag{1}$$

Пусть $\{y_n\}$ — нормированная последовательность такая, что $\{x_n\} \cup \{y_n\}$ — M-базис X и при этом $f_k(y_n) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. [4]). В силу свойства устойчивости минимальности при возмущениях [4, с. 121] выберем числовую после-

* О понятии M-базиса, а также о существовании M-базиса в сепарабельном банаховом пространстве, имеющего указанное свойство, см., например, [3 с. 219, 249].

довательность $\{\alpha_n\}$ такую, что $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$ и $\{x_n + \alpha_n y_n\}$ — минимальна в X. Положим $M = [\{x_n + \alpha_n y_n\}]$ — замыкание линейной оболочки последовательности $\{x_n + \alpha_n y_n\}$. Покажем, что M — строгое квазидополнение подпространства N. То, что M — квазидополнение N, проверяется непосредственно.

Мы покажем, что для любого подпространства $M_1 \subset M$ величина

$$\delta(N, M_1) = \inf_{\substack{x_2 \in M_1, \|x_2\|=1 \\ x_1 \in N}} \|x_1 + x_2\|$$

равна нулю. Это и будет означать, что линейное пространство $N + M_1$ незамкнутое [5].

Пусть $l_1 \in M_1 (\|l_1\| = 1)$, n_1 такое, что

$$\left\| l_1 - \sum_1^{n_1} \beta_k^1 (x_k + \alpha_k y_k) \right\| < 1.$$

Положим

$$N_{n_1} = [\{x_k + \alpha_k y_k\}_1^{n_1}], \quad N^{n_1} = [\{x_k + \alpha_k y_k\}_{n_1+1}^\infty].$$

Тогда $N_{n_1} + N^{n_1} = M$ и при этом $M_1 \cap N^{n_1} \neq 0$. Так как коразмерность подпространства N^{n_1} в M конечна, то существует ненулевой элемент $l_2 \in M_1 \cap N^{n_1}$ $(\|l_2\| = 1)$. Тогда для некоторого натурального n_2

$$\left\| l_2 - \sum_{n_1+1}^{n_2} \beta_k^2 (x_k + \alpha_k y_k) \right\| < \frac{1}{2}.$$

Продолжая таким образом, мы построим нормированную последовательность $\{l_i\} \subset M_1$ такую, что

$$\left\| l_i - \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i (x_k + \alpha_k y_k) \right\| < \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Так как $l_i - \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i (x_k + \alpha_k y_k) = \left(l_i - \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i x_k \right) - \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i \alpha_k y_k$ и $\sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i x_k \in N$, то ясно, что доказательство будет закончено, если мы покажем, что

$$\lim_{i \to \infty} \left\| \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i \alpha_k y_k \right\| = 0.$$

Для этой цели заметим, что

$$|\beta_k^i| = \left| f_k \left(\sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i (x_k + \alpha_k y_k) \right) \right|$$

и поэтому в силу (1), (2)

$$|\beta_k^i| \le \|f_k\| \left\| \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i (x_k + \alpha_k y_k) \right\| \le 2K.$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_k^i \alpha_k y_k \right\| \le 2K \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} |\alpha_k| \to 0, \quad i \to \infty,$$

и теорема доказана.

2. Рассмотрим одно из приложений. Пусть A — не строго сингулярный* оператор плотного вложения (кратко о. п. в.), действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, т. е. A — инъективный оператор и его область значений $R(A)$ — незамкнутое в Y плотное линейное многообразие.

Пусть N — такое подпространство в X, что сужение A/N оператора A на N — изоморфизм (следовательно, $A(N)$ — подпространство в Y). Покажем, что N имеет такое квазидополнение M, что A/M — изоморфизм (это будет означать, что множество подпространств, на которых A индуцирует изоморфизм, не ограничивается подпространствами, принадлежащими некоторому фиксированному подпространству N). Действительно, пусть M — строгое квазидополнение подпространства N. Покажем, что A/M — изоморфизм. Предположим противное, т. е. что линейное подпространство $A(M)$ — незамкнутое в Y. Тогда [7, с. 45] M содержит подпространство M_1 такое, что A/M_1 — компактный оператор из M_1 в Y. Линейное многообразие $N + M_1$ — замкнутое [8], что противоречит тому, что M — строгое квазидополнение подпространства N.

3. Пусть теперь A — некомпактный о. п. в. из X в Y. В X существует подпространство N такое, что A/N — компактный оператор из N в Y. Нас будет интересовать вопрос о существовании квазидополнения M к N такого, что A/M — компактный. В общем случае ответ на этот вопрос не известен. В частном случае, когда $X = Y$ — пространство l_p, $1 \le p < \infty$, c_0, или гильбертово пространство, — ответ утвердителен.

В самом деле, пусть M — строгое квазидополнение к N. Покажем, что A/M — компактный. Предположим противное. Пользуясь тем, что в X множества не строго сингулярных и некомпактных операторов совпадают [7, с. 86], построим подпространство $M_1 \subset M$ такое, что A/M_1 — изоморфизм. Подпространство $N + M_1$ — замкнутое и мы получили противоречие с тем, что M — строгое квазидополнение к N.

4. В [9] фактически показано, что если X — сепарабельное, A — о. п. в. из X в Y, то в X существует подпространство N такое, что A/N — о. п. в. из N в Y. Оказывается, подпространство N имеет квазидополнение с аналогичными свойствами, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если X — сепарабельное, A — о. п. в. из X в Y и N — подпространство такое, что A/N — о. п. в. из N в Y, то существует квазидополнение M подпространства N такое, что A/M — о. п. в. из M в Y.*

Доказательство. Выберем в N нормированный M-базис $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = 0$ (см. [10]). Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и при этом последовательность $\{x_n\} \cup \{x_n +$

* Линейный ограниченный оператор A, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, называется строго сингулярным, если он не индуцирует изоморфизм ни на каком подпространстве пространства X [6, с. 75].

$+\alpha_n y_n\}$ — M-базис пространства X. При этом, очевидно, $\lim_{n\to\infty}\|Az_n\|=0$, где

$$z_n = \frac{x_n+\alpha_n y_n}{\|x_n+\alpha_n y_n\|}.$$

Выделим из последовательности $\{z_n\}$ подпоследовательность $\{z_n^1\}$ такую, что $\|Az_n^1\|<1/(n2^n)$. Из последовательности $\{z_n\}\setminus\{z_n^1\}$ выделим подпоследовательность $\{z_n^2\}$ такую, что $\|Az_n^2\|<1/(n2^{n+1})$. Продолжая этот процесс, на k-м шаге выделим из последовательности $\{z_n\}\setminus(\{z_n^1\}\cup\{z_n^2\}\cup\ldots$ $\ldots\cup\{z_n^{k-1}\})$ подпоследовательность $\{z_n^k\}$ такую, что

$$\|Az_n^k\| < 1/(n2^{n+k}).$$

Построим последовательности $\left\{e_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$, $k=1,2,\ldots$, такие, что

$$\left\{e_n^1\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{z_n^1+\frac{x_1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{e_n^2\right\} = \left\{z_n^2+\frac{x_2}{2^{n+1}}\right\},\ldots,\ \left\{e_n^k\right\} = \left\{z_n^k+\frac{x_k}{2^{n+k}}\right\}.$$

Тогда

$$\left\|2^nAe_n^k-(1/2^k)Ax_k\right\| = \left\|2^nAz_n^k\right\| \to 0,\ \ n\to\infty. \tag{3}$$

Обозначим через $\{\tilde z_n\}$ последовательность, полученную из $\{z_n\}$ после удаления $\bigcup_k\left\{z_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Положим теперь $M=\left[\bigcup_k\left\{e_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\tilde z_n\}\right]_X$ — замыкание линейной оболочки объединения последовательностей $\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{e_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde z_n\}$ в X. Из общих результатов теории возмущения минимальных последовательностей [4] следует, что последовательность $\{x_n\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{e_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\tilde z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)M$ — базис пространства X. Следовательно, подпространство M — квазидополнение N. Из (3) следует, что каждый элемент Ax_k принадлежит замыканию $[A(M)]_Y$ линейного многообразия $A(M)$ в пространстве Y. Так как $x_k\in N$ и $[A(N)]_Y=Y$, то $[A(M)]_Y=Y$. Теорема доказана.

1. *Гурарий В. И., Кадец М. И.* О минимальных системах и квазидополнениях в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 2. – С. 256 – 258.
2. *Dixmier J.* Etude sur les varietes et les operateurs de Julia // Bull. Soc. Math. France. – 1949. – **77**. – P. 11 – 101.
3. *Singer I.* Bases in Banach spaces. II. – Berlin etc.: Springer, 1981. – 880 p.
4. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха. I // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, вып. 3. – С. 111 – 170.
5. *Гурарий В И.* О наклонах и растворах подпространств банахова пространства // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1965. – Вып. 1. – С. 194 – 204.
6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I. – Berlin etc.: Springer, 1977. – 188 p.
7 *Пич А.* Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
8. *Шевчик В. В.* О некомпактных операторах плотного вложения в банаховых пространствах // Изв. вузов. – 1988. – **12**. – С. 79 – 81.
9. *Шевчик В. В.* О подпространствах в паре банаховых пространств // Мат. заметки. – 1985. – **38**. – С. 545 – 553.
10. *Шевчик В. В.* Действие оператора вложения на минимальных последовательностях в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1987. – **294**, № 5. – С. 1072 – 1076.

Получено 13. 02. 92