УДК 517.518.5

В. К. Задирака, С. З. Касенов

Оптимальные по точности квадратурные формулы вычисления преобразования Фурье финитных функций класса $C_{L,N}$

Рассмотрим вопросы построения оптимальных по точности квадратурных формул вычисления интегралов вида

$$\mathcal{J}_1(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x dx, \qquad \mathcal{J}_2(\omega) = \int_a^b f(x) \cos \omega x dx, \tag{1}$$

где $f(x) \in C_{L,N}$ ($C_{L,N}$ — класс функций, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Липшица и таких, которые в узлах заданной сетки принимают заданные значения $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, N-1}$). Данная работа является продолжением работ [1, 2] и посвящена рассмотрению случая сильной осцилляции подынтегральной функции.

Для построения оптимальных по точности квадратурных формул используется методика, предложенная в работе [3].

Строятся верхняя и нижняя границы множества возможных значений интеграла $\mathcal{J}(\omega)$ ($\mathcal{J}(\omega)$ — один из интегралов (1)), т. е. $\mathcal{J}^+(\omega) = \sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} \mathcal{J}(\omega)$, $\mathcal{J}^-(\omega) = \inf\limits_{f(x)\in C_{L,N}} \mathcal{J}(\omega)$. Функции $f^{\pm}(x)\in C_{L,N}$, на которых достигаются соответственно $\mathcal{J}^{\pm}(\omega)$, назовем мажорантой и минорантой области неопределенности задания исходной информации на $[a, b]$. При этом чебышевский центр $\mathcal{J}^*(\omega)$ и чебышевский радиус $\rho^*(\omega)$ области неопределенности решения задачи можно определить следующим образом:

$$\mathcal{J}^*(\omega) = (\mathcal{J}^+(\omega) + \mathcal{J}^-(\omega))/2, \quad \rho^*(\omega) = (\mathcal{J}^+(\omega) - \mathcal{J}^-(\omega))/2. \tag{2}$$

Квадратурную формулу вычисления $\mathcal{J}^*(\omega)$ будем называть оптимальной по точности, а $\rho^*(\omega)$ — погрешностью представления области значений интеграла $\mathcal{J}(\omega)$ с помощью $\mathcal{J}^*(\omega)$.

Рассмотрим задачу построения функций $f^{\pm}(x)$ для интеграла $\mathcal{J}_1(\omega)$. (Для $\mathcal{J}_2(\omega)$ справедливы аналогичные рассуждения.)

1. Если между узлами сетки x_i и x_{i+1} нет нулей функции $\sin\omega x$, то функции $f^{\pm}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеют вид [1]:

$$f_i^{\pm}(x) = \begin{cases} f_i \pm L(x - x_i)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, & x\in[x_i, x_i'], \\ f_{i+1} \pm L(x_{i+1} - x)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, & x\in[x_i', x_{i+1}], \end{cases} \tag{3}$$

где $x_i' = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} \pm \dfrac{\Delta f_i}{2L\,\mathrm{sign}\sin\omega x}$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $x\in(x_i, x_{i+1})$.

2. Если между узлами x_i, x_{i+1} имеются нули функции $\sin\omega x$, то функции $f_i^{\pm}(x)$ необходимо строить с учетом перемены знака функции $\sin\omega x$.

Лемма. *Пусть функция* $f(x)\in C_{L,N}$, $R_i = \Delta f_i/\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, *и на отрезке* $[x_i, x_{i+1}]$ *имеется один нуль* $x_i^0 = ([|\omega|/\pi x_i] + 1)\pi/|\omega|$ *функции* $\sin\omega x$. *Тогда* $f^{\pm}(x)$ *на отрезке* $[x_i, x_{i+1}]$ *имеют вид*

$$f_i^{\pm}(x) = \begin{cases} f_i \pm L(x - x_i)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, \quad x\in\left[x_i, \dfrac{x_i + x_i^*}{2} \pm \dfrac{R_i(x_i^* - x_i)}{2L\,\mathrm{sign}\sin\omega x}\right], \\ f_i + R_i(x_i^* - x_i) \pm L(x_i^* - x)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, \\ \qquad x\in\left[\dfrac{x_i + x_i^*}{2} \pm \dfrac{R_i(x_i^* - x_i)}{2L\,\mathrm{sign}\sin\omega x}, x_i^0\right], \\ f_i + R_i(x_i^* - x_i) \pm L(x - x_i^*)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, \\ \qquad x\in\left[x_i^0, \dfrac{x_i^* + x_{i+1}}{2} \mp \dfrac{R_i(x_i^* - x_{i+1})}{2L\,\mathrm{sign}\sin\omega x}\right], \\ f_{i+1} \pm L(x_{i+1} - x)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, \quad x\in\left[\dfrac{x_i^* + x_{i+1}}{2} \mp \right. \\ \qquad \left. \mp \dfrac{R_i(x_i^* - x_{i+1})}{2L\,\mathrm{sign}\sin\omega x}, x_{i+1}\right], \end{cases}$$

где

$$x_i^* = x_i^0 + \frac{L\,\mathrm{sign}\sin\omega x - R_i}{L\,\mathrm{sign}\sin\omega x + R_i}\left(x_i^0 - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad x\in(x_i, x_i^0). \tag{4}$$

Доказательство. Для интеграла $\mathcal{J}_1(\omega)$ в качестве $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ берем функции вида (3) построенные на отрезках $[x_i, x_i^{\Delta}]$, $[x_i^{\Delta}, x_{i+1}]$, где $x_i^{\Delta} = x_i^0 + \Delta$, $f(x_i^{\Delta}) = f_i + R_i(x_i^{\Delta} - x_i)$, а затем функции вида (3), построенные на отрезках $[x_i, x_i^0]$, $[x_i^0, x_{i+1}]$, полагая $f(x_i^0) = f_i + R_i(x_i^0 - x_i)$. Тогда разность интегралов для этих функций будет

$$F(\Delta)=\frac{2L}{\omega^2}\left\{\left[\sin\omega\left(\frac{x_i+x_i^0+\Delta}{2}+\frac{R_i(x_i^0+\Delta-x_i)}{2L\operatorname{sign}\sin\omega x}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\sin\omega\left(\frac{x_{i+1}+x_i^0+\Delta}{2}+\frac{R_i(x_i^0+\Delta-x_{i+1})}{2L\operatorname{sign}\sin\omega x}\right)\right]+\left[\sin\omega\left(\frac{x_{i+1}+x_i^0}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{R_i(x_i^0-x_{i+1})}{2L\operatorname{sign}\sin\omega x}\right)-\sin\omega\left(\frac{x_i+x_i^0}{2}+\frac{R_i(x_i^0-x_i)}{2L\operatorname{sign}\sin\omega x}\right)\right]\right\}\operatorname{sign}\sin\omega x,$$

$$x\in(x_i,x_i^0).$$

Поскольку $\max\limits_{\Delta} F(\Delta)$ достигается при $\Delta=\frac{L\operatorname{sign}\sin\omega x-R_i}{L\operatorname{sign}\sin\omega x+R_i}\left(x_i^0-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$, то x_i^* определяется соотношением (4). Заметим, что если $x_i^0-x_i=x_{i+1}-x_i^0$, то при любом R_i $x_i^*=x_i^0$.

Если между узлами x_i, x_{i+1} имеется $n_i=[|\omega|/\pi x_{i+1}]-[|\omega|/\pi x_i]$ колебаний функции $\sin\omega x$, то

$$f_i^{\pm}=f_{i,k}^{\pm}(x)=\begin{cases}f_i+R_i(\tilde{x}_{i,k}-x_i)\pm L(x-\tilde{x}_{i,k})\operatorname{sign}\sin\omega x, & x\in[x_{i,k},x'_{i,k}],\\ f_i+R_i(\tilde{x}_{i,k+1}-x_i)\pm L(\tilde{x}_{i,k+1}-x)\operatorname{sign}\sin\omega x, & \\ \qquad x\in[x'_{i,k},x_{i,k+1}], \quad k=\overline{0,n_i}, & \end{cases} \tag{5}$$

где $x'_{i,k}=\frac{\tilde{x}_{i,k+1}+\tilde{x}_{i,k}}{2}\pm\frac{R_i(\tilde{x}_{i,k+1}-\tilde{x}_{i,k})}{2L\operatorname{sign}\sin\omega x}$, $x\in[x_{i,k},x_{i,k+1}]$, $\tilde{x}_{i,0}=x_{i,0}=x_i$, $\tilde{x}_{i,1}=x_{i,1}+\frac{L\operatorname{sign}\sin\omega x-R_i}{L\operatorname{sign}\sin\omega x+R_i}\left(x_{i,1}-\frac{x_i+x_{i,2}}{2}\right)$, $x\in[x_i,x_{i,1}]$, $\tilde{x}_{i,k}=x_{i,k}$, $k=\overline{2,n_i-1}$, $x_{i,k}=([|\omega|/\pi x_i]+k)\pi/|\omega|$, $k=\overline{1,n_i}$ — нули $\sin\omega x$ на $[x_i,x_{i+1}]$, $\tilde{x}_{i,n_i}=x_{i,n_i}+\frac{L\operatorname{sign}\sin\omega x-R_i}{L\operatorname{sign}\sin\omega x+R_i}\left(x_{i,n_i}-\frac{x_{i,n_i-1}+x_{i+1}}{2}\right)$, $x\in[x_{i,n_i-1},x_{i,n_i}]$, $\tilde{x}_{i,n_i+1}=x_{i,n_i+1}=x_{i+1}$.

Пусть для простоты $a=x_0$ и $x_{N-1}=b$. Воспользовавшись результатами леммы, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in C_{L,N}$, $R_i=\Delta f_i/\Delta x_i$, $i=\overline{0,N-2}$, и на отрезках $[x_i,x_{i+1}]$ имеется n_i колебаний функции $\sin\omega x$. Тогда чебышевский радиус области неопределенности значений интеграла $\mathcal{I}_1(\omega)$ имеет вид*

$$\rho^*(\omega)=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-2}\left\{(n_i-3)\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\pi R_i}{4L}\right)+\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_i+\tilde{x}_{i,1})\right|\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,0}|\right)-\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_i+x_{i,1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4}\Delta x_{i,0}\right)+$$

$$+\left|\sin\frac{\omega}{2}(\tilde{x}_{i,1}+x_{i,2})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,1}|\right)+\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_{i,n_i-1}+\tilde{x}_{i,n_i})\right|\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,n_i-1}|\right)+\left|\sin\frac{\omega}{2}(\tilde{x}_{i,n_i}+x_{i+1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,n_i}|\right)-$$

$$\left.-\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_{i,n_i}+x_{i+1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4}\Delta x_{i,n_i}\right)\right\}, \tag{6}$$

где $\Delta x_{i,k}=x_{i,k+1}-x_{i,k}$, $\Delta\tilde{f}_{i,k}=R_i\Delta\tilde{x}_{i,k}$, $\Delta\tilde{x}_{i,k}=\tilde{x}_{i,k+1}-\tilde{x}_{i,k}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\frac{f^+(x)-f^-(x)}{2}=\begin{cases} L(x-\tilde{x}_{i,k})\,\mathrm{sign}\sin\omega x, & x\in[x_{i,k},\hat{x}_{i,k}],\\ \frac{1}{2}(L\Delta\tilde{x}_{i,k}-|\Delta\tilde{f}_{i,k}|)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, & x\in[\hat{x}_{i,k},\hat{\hat{x}}_{i,k}],\\ L(\tilde{x}_{i,k+1}-x)\,\mathrm{sign}\sin\omega x, & x\in[\hat{\hat{x}}_{i,k},x_{i,k+1}],\\ \qquad k=\overline{0,n_i},\ i=\overline{0,N-2}, \end{cases}$$

где

$$\hat{x}_{i,k}=\frac{\tilde{x}_{i,k+1}+\tilde{x}_{i,k}}{2}-\frac{|\Delta\tilde{f}_{i,k}|}{2L},\qquad \hat{\hat{x}}_{i,k}=\frac{\tilde{x}_{i,k+1}+\tilde{x}_{i,k}}{2}+\frac{|\Delta\tilde{f}_{i,k}|}{2L}. \tag{7}$$

На основании соотношения (2) имеем

$$\rho^*(\omega)=\int_a^b\frac{f^+(x)-f^-(x)}{2}\sin\omega x dx=\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{n_i}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}}\frac{f_{i,k}^+(x)-f_{i,k}^-(x)}{2}\sin\omega x dx=$$

$$=\frac{2L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{n_i}\left\{\left|\sin\frac{\omega}{2}(\tilde{x}_{i,k}+\tilde{x}_{i,k+1})\right|\cos\frac{\omega}{2L}|\Delta\tilde{f}_{i,k}|-\left|\sin\frac{\omega}{2}(x_{i,k}+x_{i,k+1})\right|\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\omega}{2}\Delta x_{i,k}\right\}.$$

Суммируя по k, получаем выражение (6).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *квадратурная формула*

$$A^*(\omega)=\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{n_i}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}}f^*(x)\sin\omega x\,dx,$$

где

$$f^*(x)=\frac{f^+(x)+f^-(x)}{2}=\begin{cases} f_i+R_i(\tilde{x}_{i,k}-x_i), & x\in[x_{i,k},\hat{x}_{i,k}],\\ f_i+R_i(\tilde{x}_{i,k}-x_i)+L(x-\hat{x}_{i,k})\,\mathrm{sign}\,\Delta f_i, & \\ \qquad x\in[\hat{x}_{i,k},\hat{\hat{x}}_{i,k}], & \\ f_i+R_i(\tilde{x}_{i,k+1}-x_i), & x\in[\hat{\hat{x}}_{i,k},x_{i,k+1}],\\ \qquad k=\overline{0,n_i},\ i=\overline{0,N-2}, \end{cases}$$

является оптимальной по точности.

Доказательство следует из формулы (2) и выражений (5).

Замечание. Повторяя рассуждения, можно построить оптимальную по точности квадратурную формулу вычисления интеграла $\mathcal{J}_2(\omega)$. Чебышевский радиус $\rho_1^*(\omega)$ для $\mathcal{J}_2(\omega)$ имеет вид

$$\rho_1^*(\omega)=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-2}\left\{(n_i-3)\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\pi R_i}{4L}\right)+\left|\cos\frac{\omega}{2}(\tilde{x}_{i,1}+x_i)\right|\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,0}|\right)-\left|\cos\frac{\omega}{2}(x_i+x_{i,1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4}\Delta x_{i,0}\right)+$$

$$+\left|\cos\frac{\omega}{2}(x_{i,2}+\tilde{x}_{i,1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}|\Delta\tilde{f}_{i,1}|\right)+\left|\cos\frac{\omega}{2}(\tilde{x}_{i,n_i}+x_{i,n_i-1})\right|\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}\,|\Delta\tilde{f}_{i,n_i-1}|\right)+\left|\cos\frac{\omega}{2}(x_{i+1}+\tilde{x}_{i,n_i})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4L}\,|\Delta\tilde{f}_{i,n_i}|\right)-$$
$$-\left|\cos\frac{\omega}{2}(x_{i,n_i}+x_{i+1})\right|\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{4}\,\Delta x_{i,n_i}\right)\Bigg\}.$$

В заключение отметим, что предложенные в работе квадратурные формулы могут быть эффективно реализованы на ЭВМ с помощью программ быстрых синус- и косинус-преобразований Фурье [4].

1. *Задирака В. К.* Теория вычисления преобразования Фурье.— Киев : Наук. думка, 1983.— 216 с.
2. *Задирака В. К.*, *Мельникова С. С.* Об оптимальной квадратурной формуле вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций в интерполяционном классе Липшица.— В кн.: Численные методы и их оптимизация : Сб. науч. тр. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1984, с. 9—15.
3. *Иванов В. В.* К оптимизации методов численного решения сингулярных интегральных уравнений.— В кн.: I Всесоюз. шк. по теории и числ. методам расчета оболочек и пластин (Гегечкори, 1974 г.). Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1975, с. 251—266.
4. *Вычислительные* методы в физике плазмы / Под. ред. Б. Олдера и др.— М. : Мир, 1974. — 514 с.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 30.10.84,
после доработки — 07.06.85