УДК 517.948

Г. П. Пелюх

Об исследовании одного класса систем нелинейных функциональных уравнений

В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении непрерывных решений системы нелинейных функциональных уравнений вида

$$x(\lambda t) = Ax(t) + f[t, x(t), y(t)], \quad y(\lambda t) = By(t) + \varphi[t, x(t), y(t)], \quad t > 0, \quad (1)$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_p)$, $y = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_q)$, $\lambda = \mathrm{const}$, $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ — вещественные неособые соответственно $p \times p$- и $q \times q$-матрицы,

$f = \operatorname{colon}(f_1, \ldots, f_p)$, $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$, f_i, φ_j, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, q$, — вещественные функции вещественных переменных, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to 0} x_i(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} y_j(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

При этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) вектор-функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, x, y)$ непрерывны в некоторой области $D: 0 \leqslant t \leqslant a$, $|x| = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i| \leqslant b$, $|y| = \max_{1\leqslant j\leqslant q} |y_j| \leqslant b$ и $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $\varphi(t, 0, 0) \equiv 0$;

2) для любых точек $(t, \bar{x}, \bar{y})$, $(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \in D$, выполняются неравенства

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leqslant l_1 t^\alpha (|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|),$$

$$|\varphi(t, \bar{x}, \bar{y}) - \varphi(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leqslant l_2 \quad (|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|),$$

где l_1 и l_2 — некоторые положительные постоянные

$$\left(l_2 < 1/|B^{-1}| - |A|, \quad |A| = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|,\right.$$

$$\left.|B| = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \sum_{j=1}^{q} |b_{ij}|\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 1;$$

3) $0 < \lambda$, $|A|$, $|A||B^{-1}| < 1$;

4) $|A||A^{-1}|\lambda^\alpha < 1$.

При других предположениях аналогичные вопросы исследовались в [1—5].

Теорема. *Пусть выполняются условия 1—4. Тогда в некоторой области $D_* \subset D$ существует замена переменных*

$$u(t) = \gamma[t, x(t)] = x(t) + \tilde{\gamma}[t, x(t)], \quad v(t) = y(t) - \varkappa[t, x(t)], \tag{3}$$

где вектор-функции $\tilde{\gamma}(t, x)$, $\varkappa(t, x)$ непрерывны, удовлетворяют условиям

$$|\tilde{\gamma}(t, \bar{x}) - \tilde{\gamma}(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant m_1 t^\alpha |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|, \tag{4}$$

$$|\varkappa(t, \bar{x}) - \varkappa(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant m_2 |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \tag{5}$$

$\left(m_1, m_2\right.$*—некоторые положительные постоянные,* $\left. m_2 > \dfrac{l_2|B^{-1}|}{1 - |A||B^{-1}| - l_2|B^{-1}|}\right)$ *и* $\tilde{\gamma}(t, 0) \equiv 0$, $\varkappa(t, 0) \equiv 0$, *приводящая систему уравнений* (1) *к виду*

$$u(\lambda t) = Au(t) + \tilde{f}[t, u(t), v(t)], \quad v(\lambda t) = Bv(t) + \tilde{\varphi}[t, u(t), v(t)], \tag{6}$$

где вектор-функции $\tilde{f}(t, u, v)$, $\tilde{\varphi}(t, u, v)$ непрерывны в области $D_*: 0 \leqslant t \leqslant a_*$, $|u| \leqslant b_*$, $|v| \leqslant b_*$ $(a_* < a,\ b_* < b)$, удовлетворяют условиям типа 2 и $\tilde{f}(t, u, 0) \equiv 0$, $\tilde{\varphi}(t, u, 0) \equiv 0$.

Доказательство. Подставляя (3) в (1), получаем

$$u(\lambda t) = Au(t) + \tilde{f}[t, u(t), v(t)], \quad v(\lambda t) = Bv(t) + \tilde{\varphi}[t, u(t), v(t)],$$

где

$$\tilde{f}(t, u, v) = \gamma[\lambda t, A\gamma^{-1}(t, u) + f(t, \gamma^{-1}(t, u), v + \varkappa(t, \gamma^{-1}(t, u)))] - Au,$$

$$\tilde{\varphi}(t, u, v) = B\varkappa[t, \gamma^{-1}(t, u)] + \varphi[t, \gamma^{-1}(t, u), v + \varkappa(t, \gamma^{-1}(t, u))] -$$

$$- \varkappa[\lambda t, A\gamma^{-1}(t, u) + f(t, \gamma^{-1}(t, u), v + \varkappa(t, \gamma^{-1}(t, u)))].$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что в области D_* существуют непрерывные решения $\varkappa(t, x)$, $\gamma(t, x)$ систем уравнений

$$\varkappa[\lambda t, Ax + f(t, x, \varkappa(t, x))] = B\varkappa(t, x) + \varphi[t, x, \varkappa(t, x)], \tag{7}$$

$$\gamma[\lambda t, Ax + f(t, x, \varkappa(t, x))] = A\gamma(t, x) \tag{8}$$

такие, что вектор-функции $\tilde{\gamma}(t, x) = \gamma(t, x) - x$, $\varkappa(t, x)$ удовлетворяют условиям (4), (5).

Рассмотрим сначала систему уравнений (7). Покажем, что при достаточно малых t, $|x|$ последовательность вектор-функций $\{\varkappa_n(t, x)\}$, где

$$\varkappa_0(t, x) = 0, \quad \varkappa_n(t, x) = B^{-1}\varkappa_{n-1}[\lambda t, Ax + f(t, x, \varkappa_{n-1}(t, x))] -$$

$$- B^{-1}\varphi[t, x, \varkappa_{n-1}(t, x)], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $\varkappa(t, x)$, которая является решением системы уравнений (7) и удовлетворяет условию (5).

Пусть $(|A| + 2l_1a^\alpha)b \leqslant b$ и a_*, b_* $(a_* < a,\ b_* < b)$ — настолько малые положительные числа, что выполняются неравенства

$$m_2 b_* \leqslant b,$$

$$|A||B^{-1}| + l_2 m_2^{-1}(1 + m_2)|B^{-1}| + l_1(1 + m_2)|B^{-1}|a_*^\alpha \leqslant 1, \tag{10}$$

$$|A||B^{-1}| + l_2|B^{-1}| + l_1(1 + m_2)|B^{-1}|a_*^\alpha + l_1 m_2|B^{-1}|a_*^\alpha = \theta < 1.$$

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant a_*$, $|x| \leqslant b_*$ и всех $n \geqslant 0$ выполняется

$$|\varkappa_n(t, x)| \leqslant m_2|x|. \tag{11}$$

Действительно, поскольку $\varkappa_0(t, x) = 0$, $\varkappa_1(t, x) = -B^{-1}\varphi(t, x, 0)$, то в силу условий 1, 2 неравенство (11) выполняется при $n = 0, 1$. Предположим, что неравенство (11) доказано для некоторого индекса $n - 1 \geqslant 1$, и покажем, что оно не изменится при переходе от $n - 1$ к n. В силу условий 1—4, (9) и (10) получаем

$$|\varkappa_n(t, x)| \leqslant |B^{-1}||\varkappa_{n-1}[\lambda t, Ax + f(t, x, \varkappa_{n-1}(t, x))]| + |B^{-1}||\varphi[t, x,$$

$$\varkappa_{n-1}(t, x)]| \leqslant m_2|B^{-1}||Ax + f(t, x, \varkappa_{n-1}(t, x))| + l_2|B^{-1}|(|x| + |\varkappa_{n-1}(t, x)|) \leqslant$$

$$\leqslant |B^{-1}||A|m_2|x| + m_2 l_1|B^{-1}|t^\alpha(|x| + |\varkappa_{n-1}(t, x)|) + l_2|B^{-1}|(|x| +$$

$$+ |\varkappa_{n-1}(t, x)|) \leqslant |A||B^{-1}|m_2|x| + m_2 l_1|B^{-1}|t^\alpha(|x| + m_2|x|) +$$

$$+ l_2|B^{-1}|(|x| + m_2|x|) \leqslant m_2(|A||B^{-1}| + l_1(1 + m_2)|B^{-1}|t^\alpha +$$

$$+ l_2 m_2^{-1}(1 + m_2)|B^{-1}|)|x| \leqslant m_2|x|.$$

Таким образом, неравентво (11) имеет место при $0 \leqslant t \leqslant a_*$, $|x| \leqslant b_*$ и всех $n \geqslant 0$.

Аналогичным образом можно доказать, что при всех $n \geqslant 0$

$$|\varkappa_n(t, \bar{x}) - \varkappa_n(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant m_2|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|, \tag{12}$$

где $(t, \bar{x})$, $(t, \bar{\bar{x}}) \in D_*$.

Докажем теперь, что последовательность вектор-функций (9) равномерно сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $\varkappa(t, x)$. Для этого достаточно, очевидно, доказать, что при $0 \leqslant t \leqslant a_*$, $|x| \leqslant b_*$ и всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$|\varkappa_n(t, x) - \varkappa_{n-1}(t, x)| \leqslant m_2\theta^{n-1}|x|. \tag{13}$$

Неравенство (13) имеет место при $n=1$. Действительно,

$$|\varkappa_1(t,x)-\varkappa_0(t,x)|=|-B^{-1}\varphi(t,x,0)|\leqslant|B^{-1}|\,{}_2|x|\leqslant m_2|x|.$$

Пусть оно доказано для некоторого индекса $n-1\geqslant 1$. Тогда в силу условий 1 — 4, (9) и (10) получаем

$$|\varkappa_n(t,x)-\varkappa_{n-1}(t,x)|\leqslant|B^{-1}||\varkappa_{n-1}(\lambda t, Ax+f(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x)))-$$
$$-\varkappa_{n-2}(\lambda t, Ax+f(t,x,\varkappa_{n-2}(t,x)))|+|B^{-1}||\varphi(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x))-\varphi(t,x,$$
$$\varkappa_{n-2}(t,x))|\leqslant|B^{-1}||\varkappa_{n-1}(\lambda t, Ax+f(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x)))-\varkappa_{n-2}(\lambda t, Ax+f(t,x,$$
$$\varkappa_{n-1}(t,x)))|+|B^{-1}||\varkappa_{n-2}(\lambda t, Ax+f(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x)))-\varkappa_{n-2}(\lambda t, Ax+f(t,x,$$
$$\varkappa_{n-2}(t,x)))|+|B^{-1}||\varphi(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x))-\varphi(t,x,\varkappa_{n-2}(t,x))|\leqslant$$
$$\leqslant|B^{-1}|m_2\theta^{n-2}|Ax+f(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x))|+|B^{-1}|m_2|f(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x))-$$
$$-f(t,x,\varkappa_{n-2}(t,x))|+|B^{-1}||\varphi(t,x,\varkappa_{n-1}(t,x))-\varphi(t,x,\varkappa_{n-2}(t,x))|\leqslant$$
$$\leqslant|B^{-1}|m_2\theta^{n-2}[|A||x|+l_1t^{\alpha}(|x|+m_2|x|)]+|B^{-1}|m_2l_1t^{\alpha}m_2\theta^{n-2}|x|+$$
$$+|B^{-1}|l_2m_2\theta^{n-2}|x|=m_2\theta^{n-2}[|A||B^{-1}|+|B^{-1}|l_1(1+m_2)t^{\alpha}+$$
$$+|B^{-1}|l_1m_2t^{\alpha}+|B^{-1}|l_2]|x|\leqslant m_2\theta^{n-1}|x|$$

и, следовательно, неравенство (13) выполняется при $0\leqslant t\leqslant a_*$, $|x|\leqslant b_*$ и всех $n\geqslant 1$.

Из (13) непосредственно вытекает, что при $0\leqslant t\leqslant a_*$, $|x|\leqslant b_*$ последовательность вектор-функций (9) равномерно сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $\varkappa(t,x)$. В силу (10), (11) имеем $|\varkappa(t,x)|\leqslant b$ при $0\leqslant t\leqslant a_*$, $|x|\leqslant b_*$ и $\varkappa(t,0)\equiv 0$.

Переходя в (9), (12) к пределу при $n\to\infty$, легко убедиться, что при $0\leqslant t\leqslant a_*$, $|x|\leqslant b_*$ вектор-функция $\varkappa(t,x)$ является непрерывным решением системы уравнений (7) и удовлетворяет условию (5).

Рассмотрим теперь систему уравнений (8).

Принимая во внимание условия 1, 2, (5) и $\varkappa(t,0)\equiv 0$, нетрудно показать, что вектор-функция $\bar f(t,x)=f[t,x,\varkappa(t,x)]$ удовлетворяет условию

$$|\bar f(t,\bar x)-\bar f(t,\bar{\bar x})|\leqslant Lt^{\alpha}|\bar x-\bar{\bar x}|, \tag{14}$$

где $L=l_1(1+m_2)$, $(t,\bar x)$, $(t,\bar{\bar x})\in D_*$ и $\bar f(t,0)\equiv 0$.

Так как, кроме этого, выполняются условия 3, 4, то аналогично [5] можно доказать, что в области D_* существует непрерывное решение $\gamma(t,x)=x+\tilde\gamma(t,x)$ системы уравнений (8) такое, что вектор-функция $\tilde\gamma(t,x)$ удовлетворяет условию (4) и $\tilde\gamma(t,0)\equiv 0$. Теорема доказана.

С помощью доказанной выше теоремы можно строить непрерывные решения задачи (1), (2). Действительно, пусть $u(t)$ — некоторое непрерывное при $0\leqslant t\leqslant a_*$ решение системы уравнений

$$u(\lambda t)=Au(t). \tag{15}$$

Заметим, что множество нетривиальных непрерывных решений системы уравнений (15) непусто (в [2] построено представление общего решения системы уравнений (15)) и $\lim\limits_{t\to 0}|u(t)|=0$ (следует из 3)). Тогда $(u(t),0)$ является, очевидно, непрерывным решением системы уравнений (6) и, следовательно, принимая во внимание (3) и свойства вектор-функций $\gamma(t,x)$, $\varkappa(t,x)$, можно построить непрерывное решение задачи (1), (2), а именно:

$$x(t)=\gamma^{-1}[t,u(t)],\quad y(t)=\varkappa[t,\gamma^{-1}(t,u(t))]. \tag{16}$$

В заключение заметим, что доказанная выше теорема допускает различного рода обобщения. Так, если вектор-функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, x, y)$ удовлетворяют условию 1, а вместо условия 2 выполняются условия

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leqslant l_1 (t + |\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{\bar{x}}| + |\bar{\bar{y}}|)^{\alpha} (|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|),$$

$$|\varphi(t, \bar{x}, \bar{y}) - \varphi(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leqslant l_2 (t + |\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{\bar{x}}| + |\bar{\bar{y}}|)^{\beta} (|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|),$$

где l_1, l_2 — некоторые положительные постоянные, $0 < \alpha$, $\beta \leqslant 1$, то можно существенно ослабить условия 3, 4.

1. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable.— Warszawa : PWN, 1968.— 383 p.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А.Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1974.— 119 с.
3. *Peljuh G. P.* On the behaviour of solutions of the system of nonlinear functional equations.— Colloq. int. CNRS, 1982, N 332, p. 45—48.
4. *Choczewski B.* On continuous solutions of some functional equations of the n-th order.— Ann. pol. math., 1961, N 11, p. 123—132.
5. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных функциональных уравнений в окрестности особых точек.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 4, с. 516—519.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 19.06.85