УДК 517.98

В. Л. Островский

Неприводимые представления группы бесконечных верхнетреугольных матриц

Пусть $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ — возрастающая последовательность вложенных связных односвязных вещественных нильпотентных групп Ли, причем каждая группа G_{n+1} раскладывается в полупрямое произведение $G_{n+1} = G^{(n)} \otimes G_n$. Здесь $G^{(n)}$ — некоторая связная односвязная вещественная нильпотентная группа Ли. При этих условиях имеют место разложения:

$$G_m = G^{(m,n)} \otimes G_n, \quad m > n, \quad G^{(m,n)} = G^{(m-1)} \otimes \ldots \otimes G^{(n)}. \tag{1}$$

В настоящей работе для групп $G_0 = \varinjlim G_n$ и $G = \varprojlim G_n$, являющихся соответственно индуктивным и проективным пределами последовательности групп $\{G_n\}$, построены семейства неприводимых унитарных представлений, разделяющие точки соответствующих групп G_0 и G. Более подробно рассмотрен конкретный пример групп G_0 и G — группы $B_0(\infty, \mathbb{R})$ и $B(\infty, \mathbb{R})$ соответственно финитных и произвольных верхнетреугольных матриц бесконечного порядка с единицами на главной диагонали. Основной результат статьи (теорема 3) — описание всех неприводимых представлений группы $B(\infty, \mathbb{R})$.

1. Множество $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ наделим структурой топологической группы. Зададим на G_0 топологию индуктивного предела — сильнейшую топологию, в которой непрерывны вложения $G_n \subset\!\!\to G_0$, $n = 1, 2, \ldots$ (см., например, [1]). Для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G_0$ существует такое n, что $g_1, g_2 \in G_n$. Положим $g_1 \circ g_2 = g_1 g_2$, где $G_n \ni g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2$ — групповая операция в G_n. Определение корректно, так как при $n_1 < n_2$ $G_{n_1} \subset G_{n_2}$. Введенная операция непрерывна в описанной топологии. Полученная топологическая группа G_0 — индуктивный предел последовательности групп $\{G_n\}$, $G_0 = \varinjlim G_n$.

2. Для произвольных n, m $(m > n)$ определим проекцию $p_n^m : G_m \to G_n$ как естественную проекцию $G_m \to G_m / G^{(m,n)} = G_n$. Легко показать, что указанные проекции образуют согласованную систему, т. е. для любых $k < n < m$ $p_n^m p_k^n = p_k^m$. Рассмотрим множество G всевозможных последовательностей $\{g_n\} = (g_1, g_2, \ldots)$, $g_n \in G_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых $p_n^m g_m = g_n$. На G определены проекции $G \ni g = (g_1, g_2, \ldots) \mapsto p_n g = g_n \in G_n$. Топология проективного предела в G — слабейшая топология, в которой непрерывны проекции p_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см., например, [1]). Зададим на G структуру группы, полагая для $\{g_n\}, \{h_n\} \in G$

$$\{g_n\} \circ \{h_n\} = \{g_n h_n\}, \quad \{g_n\}^{-1} = \{g_n^{-1}\}. \tag{2}$$

Для доказательства корректности определения необходимо показать, что $p_n^m (g_m h_m) = g_n h_n$ и $p_n^m (g_m^{-1}) = g_n^{-1}$. Действительно, так как $G_m = G^{(m,n)} \otimes G_n$, то любой элемент $g_m \in G_m$ однозначно представим в виде $g_m = \tilde{g} g_n$, $\tilde{g} \in G^{(m,n)}$, $g_n \in G_n$. Тогда

$$g_m h_m = \tilde{g} g_n \tilde{h} h_n = \tilde{g} g_n \tilde{h} g_n^{-1} g_n h_n, \quad \tilde{g} g_n \tilde{h} g_n^{-1} \in G^{(m,n)}, \tag{3}$$

$$g_m^{-1} = (\tilde{g} g_n)^{-1} = g_n^{-1} \tilde{g}^{-1} = g_n^{-1} \tilde{g}^{-1} g_n g_n^{-1}, \quad g_n^{-1} \tilde{g}^{-1} g_n \in G^{(m,n)} \tag{4}$$

и, следовательно, $p_n^m (g_m h_m) = g_n h_n$, $p_n^m (g_m^{-1}) = g_n^{-1}$. Непрерывность групповых операций следует из непрерывности операций в G_n и непрерывности проекций p_n. Построенная бесконечномерная топологическая группа — проективный предел последовательности групп $\{G_n\}$, $G = \varprojlim G_n$. Группа G содержит в качестве замкнутой подгруппы каждую из групп G_n, следовательно, содержит и их объединение G_0. Более того, $G_0 \hookrightarrow G$ в качестве плотной подгруппы. Действительно, нетрудно показать, что последовательность элементов $g_n = (p_1(g), \ldots, p_n(g), p_n(g), \ldots)$ сходится в топологии G к элементу $g \in G$.

3. Изучим вопрос о запасе неприводимых представлений для групп G_0 и G. Пусть $G_n \ni g \mapsto T_g^{(n)}$ — неприводимое унитарное представление группы G_n. Так как $G_n = G_m/G^{(m,n)}$, то представление $T^{(n)}$ можно продолжить до представления каждой из групп G_m, $m > n$ (тривиального на $G^{(m,n)}$), и, следовательно, до неприводимого представления $G_0 \ni g \mapsto T_g^0$ группы $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. С другой стороны, если положить

$$T_g = T^{(n)}_{p_n(g)}, \quad g \in G, \tag{5}$$

то $G \ni g \mapsto T_g$ — неприводимое представление группы G и сужение $T \restriction G_0$ совпадает с представлением T^0 группы G_0.

Теорема 1. *Для любого отличного от единичного элемента $\tilde{g} \in G$ существует неприводимое представление $G \ni g \mapsto T_g$ группы G такое, что $T_{\tilde{g}} \neq I$. Аналогично для любого отличного от единичного элемента $\tilde{g}_0 \in G_0$ существует неприводимое представление $G_0 \ni g_0 \mapsto T^0_{g_0}$ группы G_0 такое, что $T^0_{\tilde{g}_0} \neq I$.*

Доказательство. Так как элемент $\tilde{g} = \{g_n\} \in G$ отличен от единичного, то существует такое n, что элемент $g_n \in G_n$ отличен от единичного. Используя результаты работы [2], нетрудно построить неприводимое унитарное представление $G_n \ni g \mapsto T_g^{(n)}$ группы G_n такое, что $T^{(n)}_{g_n} \neq I$. Представление $T^{(n)}$ по формуле (5) продолжается до неприводимого унитарного представления $G \ni g \mapsto T_g$ группы G. Для этого представления $T_{\tilde{g}} = T^{(n)}_{p_n(\tilde{g})} = T^{(n)}_{g_n} \neq I$.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что $G_0 \subset G$ и сужение представления T на подгруппу G_0 неприводимо.

4. Пусть $B(n, \mathbb{R})$ — группа вещественных верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с единицами на главной диагонали. Группа $B(n+1, \mathbb{R})$ раскладывается в полупрямое произведение

$$B(n+1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \otimes B(n, \mathbb{R}), \tag{6}$$

где группа $B(n, \mathbb{R})$ вкладывается в $B(n+1, \mathbb{R})$ как подгруппа матриц, имеющих нули в последнем столбце (кроме элемента на главной диагонали, который равен единице), а $\mathbb{R}^n$ отождествляется с нормальной подгруппой, образованной элементами последнего столбца. По последовательности групп $B(n, \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, построим группы $B_0(\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim B(n, \mathbb{R})$ и $B(\infty, \mathbb{R}) = \varprojlim B(n, \mathbb{R})$, являющиеся группами соответственно финитных и произвольных бесконечных верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали. Для этих групп естественно определить их алгебры Ли $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{b}(\infty, \mathbb{R})$ как алгебры соответственно финитных и произвольных строго верхнетреугольных матриц бесконечного порядка.

Матричные единицы $E_{j,k}$, $j < k$, образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots$ рассмотрим подпространство $\mathfrak{g}_j^0 \subset \mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$, порожденное базисными элементами $E_{k,l}$, $k \leqslant j$, $j+1 \leqslant l$. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{g}_j^0$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$ раскладывается в полупрямое произведение $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}_j^0 \otimes \mathfrak{i}_j^0$. Здесь $\mathfrak{i}_j^0$ — подалгебра в $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$, изоморфная $\mathfrak{b}(j, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$. Положим $G_j^0 = \exp \mathfrak{g}_j^0$,

$H_j^0 = \exp \mathfrak{i}_j^0$. Тогда $B_0(\infty, \mathbb{R}) = G_j^0 \otimes H_j^0$. Аналогичное разложение имеет место для $B(\infty, \mathbb{R}) : B(\infty, \mathbb{R}) = G_j \otimes H_j$, причем $G_j^0 \subset G_j$, $H_j^0 \subset H_j$ в качестве плотных подгрупп. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2. *Каждое сильно непрерывное унитарное представление $B_0(\infty, \mathbb{R}) \ni g \mapsto T_g$ группы $B_0(\infty, \mathbb{R})$ в сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно представлению в пространстве*

$$H = \int\limits_{\mathfrak{g}_j}^{\oplus} H_x d\mu(x), \quad x = (x_{k,l})_{k=1, l=j+1}^{j\ \ \infty} \tag{7}$$

(j — произвольное фиксированное число), при котором операторы представления заданы формулами

$$(T_{\exp(tE_{p,q})} f)(x) = e^{itx_{p,q}} f(x), \quad 1 \leqslant p \leqslant j, j+1 \leqslant q, \tag{8}$$

$$(T_{\exp(tE_{m,n})} f)(x) = U_{m,n}(t, x) \sqrt{d\mu(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n + t\tilde{x}^m, \ldots, \tilde{x}^j)/d\mu(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^j)} \times$$
$$\times f(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n + t\tilde{x}^m, \ldots, \tilde{x}^j), \quad 1 \leqslant m < n \leqslant j, \tag{9}$$

$$(T_{\exp(tE_{r,s})} f)(x) = U_{r,s}(t, x) \sqrt{d\mu(\tilde{x}_{j+1}, \ldots, \tilde{x}_r - t\tilde{x}_s, \ldots)/d\mu(\tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}, \ldots)} \times$$
$$\times f(\tilde{x}_{j+1}, \ldots, \tilde{x}_r - t\tilde{x}_s, \ldots), \quad j+1 \leqslant r < s. \tag{10}$$

Здесь $\tilde{x}^k = (x_{k,j+1}, x_{k,j+2}, \ldots)$, $k = 1, \ldots, j$, $\tilde{x}_l = (x_{1,l}, \ldots, x_{j,l})^{\mathrm{T}}$, $l = j+1, j+2, \ldots$, *так что* $x = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^j)^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}, \ldots)$, μ — *вероятностная мера на линейном пространстве* $\mathfrak{g}_j$, *квазиинвариантная относительно преобразований*:

$$(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^j) \mapsto (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n + t\,\tilde{x}^m \ldots, \tilde{x}^j), \quad 1 \leqslant m < n \leqslant j, \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{11}$$

$$(\tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}, \ldots) \mapsto (\tilde{x}_{j+1}, \ldots, \tilde{x}_r - t\tilde{x}_s, \ldots), \quad j+1 \leqslant r < s, \ t \in \mathbb{R}^1, \tag{12}$$

а $U_{k,l}(t, x)$ — семейство измеримых операторнозначных функций, удовлетворяющих для μ-почти всех $x \in \mathfrak{g}_j$ соотношениям

$$U_{k,l}(t_1 + t_2, x) = U_{k,l}(t_1, x) U_{k,l}(t_2, (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^l + t\tilde{x}^k, \ldots \tilde{x}^j)), \ 1 \leqslant k < l \leqslant j, \tag{13}$$

$$U_{m,n}(t_1 + t_2, x) = U_{m,n}(t_1, x) U_{m,n}(t_2, (\tilde{x}_{j+1}, \ldots, \tilde{x}_m - t\tilde{x}_n, \ldots)), \ j+1 \leqslant m < n, \tag{14}$$

необходимым для того, чтобы формулы (8)—(10) *определяли представление группы* $B_0(\infty, \mathbb{R})$.

Доказательство теоремы по существу мало отличается от доказательства аналогичной теоремы для групп токов со значениями в $B(n, \mathbb{R})$ (см. [3]).

Отметим также, что эргодичность меры относительно преобразований вида (11), (12) — необходимое условие неприводимости представления.

5. Так как группа $B(\infty, \mathbb{R})$ является проективным пределом последовательности групп $B(n, \mathbb{R})$, то формула (5) позволяет по произвольному неприводимому представлению группы $B(n, \mathbb{R})$, $n \geqslant 3$, построить неприводимое представление группы $B(\infty, \mathbb{R})$.

Теорема 3. *Любое неприводимое унитарное представление группы $B(\infty, R)$ унитарно эквивалентно некоторому представлению вида* (5).

Доказательство. Пусть $B(\infty, \mathbb{R}) \ni g \mapsto T_g$ — неприводимое унитарное представление группы $B(\infty, \mathbb{R})$ в сепарабельном гильбертовом пространстве. Сужая представление T на подгруппу $B_0(\infty, \mathbb{R})$, получаем неприводимое унитарное представление T^0 группы $B_0(\infty, \mathbb{R})$. Использовав теорему 2 при $j=1$, рассмотрим меру μ на пространстве $\mathfrak{g}_1$ (гомеоморфном $\mathbb{R}^\infty$), квазиинвариантную и эргодическую относительно преобразований $x=(x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, \ldots, x_k - tx_l, \ldots)$, $k<l$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Лемма 1. *Мера μ сосредоточена на некотором конечномерном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$, т. е. для некоторого n $\mu(\underbrace{\mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1}_{n\ \text{раз}} \times \{0\} \times \times \{0\} \times \ldots) = 1$.*

Докажем предварительно следующее утверждение.

Лемма 2. *Мера μ сосредоточена на измеримом множестве $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$.*

Доказательство. Преобразование Фурье меры μ — функция $k_0(t) = (T^0_{\exp(t)}\Omega, \Omega)$, $t \in \mathfrak{g}_1^0$, где Ω — некоторый вектор из H (являющийся вектором максимального спектрального типа для семейства операторов $T^0_{\exp(t)}$, $t \in \mathfrak{g}_1^0$). Поскольку представление T^0 по непрерывности продолжается до представления T группы $B(\infty, \mathbb{R})$, то функция $k_0(t)$ продолжается до непрерывной положительно определенной функции $k(t)$, $t \in \mathbb{R}^\infty$. Но $\mathbb{R}^\infty$ с топологией проективного предела конечномерных пространств является ядерным пространством (см. [4]), следовательно, по теореме Минлоса (см. [5, 6]) функция $k(t)$ является преобразованием Фурье некоторой меры ν на пространстве, сопряженном к $\mathbb{R}^\infty$, т. е. на пространстве $\mathbb{R}_0^\infty$. Так как $\mathbb{R}_0^\infty$ является измеримым подмножеством $\mathbb{R}^\infty$, то мера ν продолжается до меры $\tilde{\nu}$ на $\mathbb{R}^\infty$, сосредоточенной на $\mathbb{R}_0^\infty$. Преобразование Фурье меры $\tilde{\nu}$.

$$k_{\tilde{\nu}}(t) = \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{i(t,x)} d\tilde{\nu}(x) = \int_{\mathbb{R}_0^\infty} e^{i(t,x)} d\nu(x) = k(t) = k_0(t) \quad t \in \mathbb{R}_0^\infty, \tag{15}$$

следовательно, в силу свойства единственности преобразования Фурье $\tilde{\nu} = \mu$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим для произвольного n подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_0^\infty$ вида

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1}_{n\ \text{раз}} \times \{0\} \times \{0\} \times \ldots. \tag{16}$$

Легко заметить, что эти подпространства инвариантны относительно преобразований пространства $\mathbb{R}_0^\infty$ вида (11), (12). В силу эргодичности меры μ мера таких множеств может быть равной только нулю или единице. С другой стороны, так как $\mathbb{R}_0^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$ — объединение множеств вида (16) и $\mu(\mathbb{R}_0^\infty) = 1$, существует такое n, что $\mu(\mathbb{R}^n) > 0$. В силу эргодичности меры $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

По представлению $B_0(\infty, \mathbb{R}) \ni g \mapsto T_g^0$ можно построить представление $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R}) \ni x \mapsto A_x$ алгебры Ли $\mathfrak{b}_0(\infty, \mathbb{R})$ неограниченными кососамосопряженными операторами на плотной в H инвариантной относительно действия операторов A_x области D — области Гординга [8]. Из леммы 1 следует, что только конечное число операторов $A_{E_{1,k}}$, $k=2, 3, \ldots$, отлично от нулевого оператора. Пользуясь теоремой 2 при $j=2, 3, \ldots$, можно аналогично лемме 1 показать, что при каждом j только конечное число операторов $A_{E_{j,k}}$, $k>j$, отлично от нулевого оператора. Для доказательства теоремы остается показать, что существует такое n, что $A_{E_{j,k}} = 0$, $j=1, 2, \ldots$, при $k>n$. Пусть $A_{E_{k,l_k}}$ — последний ненулевой оператор среди операторов $A_{E_{k,l}}$, задающих представление k-й строки. Если k-я строка нулевая, полагаем $A_{E_{k,l_k}} =$

$= A_{E_{k,k+1}} = 0$. Рассмотрим последовательность операторов $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, положив $B_1 = A_{E_{1,l_1}}$, $B_k = A_{E_{k,l_k}}$, если $A_{E_{k-1,l_k}} = 0$ и $B_k = A_{E_{k,l_k+1}}$, если $A_{E_{k-1,l_k}} \neq 0$. $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — семейство коммутирующих кососамосопряженных операторов, следовательно (см. [6, 9]), это семейство унитарно эквивалентно семейству операторов умножения на x_k в пространстве $H = \int\limits_{\mathbb{R}^{\infty}}^{\oplus} H_x d\mu(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ (μ — спектральная мера семейства $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$). Аналогично лемме 2 мера μ сосредоточена на пространстве $\mathbb{R}_0^{\infty}$. С другой стороны, операторы B_k, $k = 1, 2, \ldots$, как нетрудно заметить, коммутируют с неприводимым представлением T^0, поэтому $B_k = \lambda_k I$, т. е. мера μ сосредоточена в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}_0^{\infty}$. Следовательно, начиная с некоторого n $B_k = 0$, $k \geqslant n$, тогда $A_{E_{k,l_k}} = 0$, $k > n + 1$, откуда следует утверждение теоремы.

1. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
2. *Кириллов А. А.* Унитарные представления нильпотентных групп Ли.— Успехи мат. наук, 1962, 17, вып. 4, с. 57—110.
3. *Островский В. Л.* Аналог теоремы Нельсона для ядерных нильпотентных алгебр Ли токов.— В кн.: Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 120—131.
4. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.— М. : Мир, 1967.— 266 с.
5. *Минлос Р. А.* Обобщенные случайные процессы и их продолжения до меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, 8, с. 411—497.
6. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.
7. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950.— 223 с.
8. *Richter P.* Unitary representations of countable infinite dimensional Lie group.— Leipzig : Karl-Marx Universität, 1977, MPh 5.— 7 p.
9. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.

Киев. ун-т

Получено 29.07.85