УДК 519.21

В. В. Королюк, А. Таджиев

Асимптотика марковских эволюций до момента поглощения

В работе [1] приведен алгоритм построения асимптотического разложения для распределения времени поглощения цепи Маркова при условии, что вероятность поглощения стремится к нулю вместе с малым параметром ε. В данной работе приводится алгоритм построения асимптотического разложения для характеристической функции марковской случайной эволюции [2], образованной однородными процессами с независимыми приращениями, переключаемыми однородным марковским процессом с поглощением.

1. Пусть $\varkappa_\varepsilon(t)$ — однородный марковский процесс в измеримом фазовом пространстве состояний $(E \cup \{0\}, \mathcal{E})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathcal{E}$ и поглощающим состоянием $\{0\}$, задаваемый полумарковским ядром

$$Q_\varepsilon(x, A, t) = P_\varepsilon(x, A)(1 - e^{-a(x)t}), \tag{1}$$

$$P_\varepsilon(x, A) = P_0(x, A) - \varepsilon P_1(x, A). \tag{2}$$

Стохастическое ядро $P_0(x, A)$ определяет невозмущенную равномерно эргодическую цепь Маркова $(\varkappa_n, n \geqslant 0)$ в фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$ со стационарным распределением $\rho(A)$, $A \in \mathcal{E}$. Пусть задано семейство однородных стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями $y_\varepsilon(t, x)$, измеримых по x, независимых в совокупности при различных $x \in E$ с равномерно ограниченными кумулянтами

$$\psi = \psi(x, z) = \ln \mathbf{M}[\exp\{izy(t, x)\}]/t. \tag{3}$$

Марковская случайная эволюция $y_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, определяется соотношением

$$y_\varepsilon(t) = y(t - \varepsilon\tau^\varepsilon_{\nu_\varepsilon}(t/\varepsilon), \varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon(t/\varepsilon)} y(\varepsilon\theta^\varepsilon_k, \varkappa^\varepsilon_{k-1}). \tag{4}$$

Здесь $\tau^\varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \theta^\varepsilon_k$ — моменты скачков марковского процесса $\varkappa_\varepsilon(t)$; $\varkappa^\varepsilon_n = \varkappa_\varepsilon(\tau^\varepsilon_n)$ — вложенная цепь Маркова; $\nu_\varepsilon(t) = \max\{n : \tau^\varepsilon_n \leqslant t\}$ — считающий процесс; θ^ε_k — времена пребывания в состояниях марковского процесса $\varkappa_\varepsilon(t)$.

Пусть ζ_ε — время пребывания марковского процесса $\varkappa_\varepsilon(t)$ в состояниях E до поглощения. Объектом исследования является характеристическая функция

$$U_\varepsilon(t, x) = \mathbf{M}[\exp\{izy_\varepsilon(t)\}; \mathcal{I}(\zeta_\varepsilon > t/\varepsilon)/\varkappa_\varepsilon(0) = x], \tag{5}$$

$\mathcal{I}(\omega)$ — индикатор случайного события ω.

Заметим, что начальное условие имеет вид

$$U_\varepsilon(0, x) = \mathbf{1}, \tag{6}$$

где $\mathbf{1}$ обозначает функцию от x, тождественно равную 1.

Введем следующие обозначения: $R_0 = [Q_0 + \Pi]^{-1} - \Pi$ — потенциал [3] невозмущенного марковского процесса $\varkappa_0(t)$ с полумарковским ядром $Q_0(x, A, t) = P_0(x, A)(1 - e^{-a(x)t})$ и производящим оператором

$$Q_0 u(x) = a(x) \int_E P_0(x, dy)[u(y) - u(x)];$$

Π — проектор, действующий следующим образом (см. [1, с. 135]):

$$\Pi u(x) = \int_E \pi(dx) u(x), \text{ где } \pi(dx) = \rho(dx)/[a(x)\hat{\pi}], \ \hat{\pi} = \int_E \rho(dx)/a(x);$$

$$\exp_0\{tQ_0\} = \exp\{tQ_0\} - \Pi; \tag{7}$$

$$L_0 u(t) \equiv du(t)/dt - (\Lambda + Q_1) u(t), \tag{8}$$

$$Q_1 u(x) \equiv \psi(x) u(x) - \int_E a(x) P_1(x, dy) u(y), \tag{9}$$

$$\Lambda = \int_E \pi(dx)[a(x) P_1(x, E) - \psi(x, z)]. \tag{10}$$

2. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Асимптотическое разложение*

$$U_\varepsilon(t) = e^{-\Lambda t}\mathbf{1} + \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon^k [e^{-\Lambda t} U_k(t) + V_k(t/\varepsilon)] \tag{11}$$

определяется следующим алгоритмом: регулярные члены асимптотики $U_k(t)$, $k \geqslant 1$, *строятся рекуррентно по формулам* ($U_0(t) = 1$):

$$U_k(t) = R_0 L_0 U_{k-1}(t) + \left[\hat{C}_k - \int_0^t \hat{U}_{k-1}(s)\, ds\right]\mathbf{1}, \tag{12}$$

$$\hat{U}_k(t) = \int_E \pi(dx) L_0 R_0 L_0 U_k(t), \tag{13}$$

$$\hat{C}_k = \int_E \pi(dx) Q_1 \int_0^\infty V_{k-1}(t)\, dt. \tag{14}$$

Члены асимптотики типа погранслоя $V_k(t)$ *строятся рекуррентно* ($V_0(t) \equiv 0$):

$$V_k(t) = \exp_0\{tQ_0\} V_k^0 + \int_0^t \exp_0\{(t-s)Q_0\} Q_1 V_{k-1}(s)\, ds - \Pi Q_1 \int_t^\infty V_{k-1}(s)\, ds, \quad k \geqslant 1, \tag{15}$$

$$V_k^0 = -R_0 L_0 U_{k-1}(t)|_{t=0}. \tag{16}$$

Следствие. *Имеет место представление*

$$U_\varepsilon(t) = e^{-\Lambda t}\mathbf{1} + \varepsilon[e^{-\Lambda t}(R_0 l_0 - t\Lambda_1 \mathbf{1}) - \exp_0\{tQ_0/\varepsilon\} R_0 e_0] + o(\varepsilon), \tag{17}$$

$$e_0(x) = \psi(x, z) - a(x) P_1(x, E), \tag{18}$$

$$\Lambda_1 = \int_E \pi(dx)[\Lambda + Q_1] R_0 e_0. \tag{19}$$

3. Доказательство теоремы проводится по схеме, приведенной в работе [1], с необходимыми дополнениями и усовершенствованиями.

Лемма 1. *Характеристическая функция* (5) *определяется решением задачи Коши*

$$\varepsilon dU_\varepsilon(t)/dt = Q_0 U_\varepsilon(t) + \varepsilon Q_1 U_\varepsilon(t), \quad U_\varepsilon(0) = \mathbf{1}. \tag{20}$$

Действительно, строя для (5) уравнение марковского восстановления (УМВ) стандартным приемом по первому скачку [2], имеем

$$U_\varepsilon(t, x) = \mathbf{M}\{e^{izy_\varepsilon(t)}; \quad \theta_x \leqslant t/\varepsilon,\ \zeta_\varepsilon > t/\varepsilon \mid \varkappa_\varepsilon(0) = x\} +$$
$$+ \mathbf{M}\{e^{izy_\varepsilon(t)}; +\theta_x > t/\varepsilon, \quad \zeta_\varepsilon > t/\varepsilon \mid \varkappa_\varepsilon(0) = x\},$$

откуда с использованием марковского свойства моментов восстановления переключающего процесса $\varkappa_\varepsilon(t)$ и структуры переключаемого процесса $y_\varepsilon(t)$ получаем УМВ в виде

$$U_\varepsilon(t, x) - \int_0^{t/\varepsilon}\int_E Q_\varepsilon(x, dy, ds)\, e^{\varepsilon s\psi} U_\varepsilon(t - \varepsilon s, y) = \overline{G}_x(t/\varepsilon)\, e^{t\psi(x, z)}. \qquad (21)$$

После замены переменной $s' = t - \varepsilon s$ с учетом представления ядра (7) УМВ преобразуется к виду

$$U_\varepsilon(t, x) - \varepsilon^{-1}\int_0^t\int_E a(x)\, e^{(\varepsilon\psi - a(x))(t-s)/\varepsilon} U_\varepsilon(s, y)\, P_\varepsilon(x, dy)\, ds = e^{(\varepsilon\psi - a(x))t/\varepsilon}.$$

Продифференцировав полученное уравнение по t, получим утверждение леммы 1.

Асимптотическое представление решения сингулярно-возмущенной задачи Коши (20) строится по схеме, приведенной в работе [1].

Подставляя в уравнение (20) сумму регулярных членов асимптотики

$$U_\varepsilon^0(t) = e^{-\Lambda t}\mathbf{1} + \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k e^{-\Lambda t} U_k(t) \qquad (22)$$

и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему уравнений

$$Q_0\mathbf{1} = 0, \quad Q_0 U_1 = -(\Lambda + Q_1)\,\mathbf{1}, \quad Q_0 U_k = L_0 U_{k-1}, \quad k \geqslant 2. \qquad (23)$$

Первое из уравнений (23) выполняется автоматически, поскольку $\mathbf{1}$ является собственным вектором оператора Q_0. Из условия разрешимости [3] второго уравнения системы (23) в виде $\Pi(\Lambda + Q_1)\,\mathbf{1} = 0$ находим формулу (10) для числового параметра Λ.

Решение последующих уравнений системы (23) при $k \geqslant 1$ представимо в следующем виде [1, с. 134]:

$$U_k(t) = R_0 L_0 U_{k-1}(t) + \widehat{C}_k(t)\,\mathbf{1}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в правую часть $(k+1)$-го уравнения системы (23), из условия разрешимости этого уравнения для определения функции $\widehat{C}_k(t)$ находим скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$\widehat{C}_k(t) = \widehat{C}_k - \widehat{U}_{k-1}(t), \qquad (25)$$

где скалярные функции $\widehat{U}_{k-1}(t)$ определяются формулой (13).

Подставляя в (20) сумму

$$V_\varepsilon(t/\varepsilon) = \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k V_k(t/\varepsilon) \qquad (26)$$

и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях ε, получаем следующую рекуррентную систему уравнений для погранслоев:

$$dV_1(t)/dt - Q_0 V_1(t) = 0, \quad dV_k(t)/dt - Q_0 V_k(t) = Q_1 V_{k-1}(t), \quad k \geqslant 2. \qquad (27)$$

В соответствии со схемой, приведенной в работе [1], первый погранслой определяется соотношением

$$V_1(t) = \exp_0\{tQ_0\}\, V_1^0, \qquad (28)$$

в котором вектор V_1^0 пока неизвестен.

Лемма 2. *Убывающее к нулю решение задачи Коши для уравнений (7) при $k \geqslant 2$ представимо в виде (15) с начальным вектором V_k^0.*

Представим общее решение задачи Коши неоднородного уравнения (27) в виде

$$V_k(t) = \exp_0\{tQ_0\} V_k^0 + \int_0^t \exp\{(t-s) Q_0\} Q_1 V_{k-1}(s)\, ds. \tag{29}$$

Используя предельную теорему теории марковского восстановления (см. [4], теорема 2), находим предел решения (29) в виде

$$\lim_{t\to\infty} V_k(t) = \Pi \int_0^\infty Q_1 V_{k-1}(s)\, ds. \tag{30}$$

Следовательно, убывающее к нулю решение задачи Коши неоднородного уравнения (27) представимо в виде

$$V_k(t) = \exp_0\{tQ_0\} V_k^0 + \int_0^t \exp\{(t-s) Q_0\} Q_1 V_{k-1}(s)\, ds - \Pi \int_0^\infty Q_1 V_{k-1}(s)\, ds. \tag{31}$$

Используя определение экспоненты (7), из (31) получаем (15).

Для завершения построения алгоритма остается определить константы $\hat{C}_k$ и векторы V_k^0, $k \geqslant 1$.

Из начального условия (20) и представления (11) следует

$$U_k(0) + V_k(0) = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{32}$$

Проектируя условия (32) на подпространство нулей и значений оператора Q_0, находим начальные условия (14) и (16) с учетом (12) и (15).

Обоснование асимптотического представления (11) осуществляется по стандартной схеме (см., например, [5]) с учетом ограниченности операторов Q_0, R_0 и Q_1.

1. *Королюк В. С., Пенев И. П., Турбин А. Ф.* Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения цепи Маркова.— Кибернетика, 1973, № 4, с. 133—135,
2. *Королюк В. В.* Стохастические системы с полумарковскими переключениями.— Киев. 1983.— 36 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 83.35).
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 220 с.
4. *Шуренков В. М.* К теории марковского восстановления.—Теория вероятностей и ее применения, 1984, 29, № 2, с. 248—263.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случаях матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1960, 15, вып. 3, с. 3—80.

Киев. ун-т

Получено 24.07.85