УДК 517.53

В. А. Зморович, Л. А. Гудзь

Об одном свойстве функции Кебе

Как известно, функция Кебе $K(z) = z/(1-z)^2$ играет важную роль в теории конформных отображений и, в частности, в теории однолистных в круге $E\ (z: |z| < 1)$ функций. Среди свойств этой функции, обнаруженных до настоящего времени, имеется следующее [1]: функция $[K'(z)]^{1/2}$ однолистна в E. Докажем более общую теорему.

Теорема. *Функция $[K'(z)]^{\delta} = W(z)$ однолистна в E при $0 < \delta \leqslant 2/3$ (и не более), причем при $0 < \delta \leqslant 1/3$ область, на которую эта функция отображает круг E, звездна относительно точки $W(0) = 1$, а при $1/3 < \delta \leqslant 2/3$ эта область выпукла в направлении вещественной оси, но не звездна по отношению к каждой своей внутренней точке, лежащей на оси симметрии.*

Доказательство. Положим $\xi + i\eta = \ln K'(z)$; $u + iv = W(z)$, где $W(z) = [K'(z)]^{\delta}$. Переходя на окружность $|z| = 1$, $z \neq 1$, и полагая $z = e^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, получаем для верхней половины $\mathscr{L}$ образа окружности $|z| = 1$ при отображении $W = W(z)$ параметрические уравнения $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$, где $R = e^{\delta\xi}$, $\varphi = \delta(3\pi/2 - \theta)$,

$$\xi = \ln(2\cos\theta/2) - 3\ln(2\sin\theta/2), \qquad 0 < \theta \leqslant \pi. \tag{1}$$

Из формулы для угла φ следует, что для взаимно однозначного соответствия между точками кривой $\mathscr{L}$ и полуокружностью $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы $3\pi/2\delta \leqslant \pi$, откуда $\delta \leqslant 2/3$. Учитывая, что $|z-1|^{3\delta} |K'(z)|^{\delta} \to 2^{\delta}$ при $z \to 1$ $(|z| < 1)$ и $3\delta \leqslant 2$, видим, что на основании обобщенного критерия однолистности отображения при биективном соответствии границ двух областей, из которых одна неограниченная [2], функция $W(z)$ однолистна в E. Здесь нужно учесть симметрию образа круга E относительно вещественной оси W-плоскости. Нетрудно убедиться, что ордината v кривой $\mathscr{L}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 при возрастании параметра θ от 0 до π. Поэтому ясно, что каждая прямая $v = h$, $h \in]-\infty, +\infty[$, пересекает границу образа круга E в одной точке, откуда следует выпуклость этого образа относительно вещественной оси W-плоскости.

Вычисляя кривизну кривой $\mathscr{L}$ по формуле $K(\theta) = (\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v})(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)^{-3/2}$, где производные берутся по параметру θ, получаем формулу $K(\theta) = (1 + 2\cos\theta - \delta(5 + 4\cos\theta))\, Q(\delta)$, где $Q(\delta) > 0$ при $0 < \delta \leqslant 2/3$. Из этой формулы следует, что при $1/3 \leqslant \delta \leqslant 2/3$ кривизна отрицательна, а при $0 < \delta < 1/3$ она изменяет знак в точке, для которой

$$\delta = \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}. \tag{2}$$

Это единственная точка перегиба на кривой $\mathscr{L}$.

Для доказательства звездности образа круга E относительно точки $W(0) = 1$ достаточно доказать, что абсцисса l точки пересечения касательной кривой $\mathscr{L}$ в ее единственной точке перегиба при $0 < \delta < 1/3$ удовлетворяет условию $l < 1$. Так как $l = u - \dot{u}/\dot{v}v$, то на основании формул (1), (2) нетрудно получить формулу $l \equiv F(\delta) = f(\delta)\, f_3^{-1}(\delta)$, $f(\delta) = f_1(\delta)\, f_2(\delta)$, где $f_1(\delta) = [1/4\,(1 - 2\delta)\sqrt{1 + \delta}\,(3 - 9\delta)^{-3}]^{\delta}$, $f_2(\delta) = \sqrt{(1 + \delta)(3 - 9\delta)}$, $f_3(\delta) = 3(1 - \delta)\sin\varphi + \sqrt{(1 + \delta)(3 - 9\delta)}\cos\varphi$, $\varphi = \delta\left[3\pi/2 - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3 - 9\delta}{1 + \delta}}\right]$.

Функция $F(\delta)$ имеет следующие свойства: 1) $f_1(\delta) < 1$, $0 < \delta \leqslant 1/4$; 2) $f_3(\delta) \geqslant \sqrt{(1 + \delta)(3 - 9\delta)}$ при $0 < \delta \leqslant 1/4$; 3) $f(\delta) < 1$ при $1/4 \leqslant \delta \leqslant 1/3$; 4) $f_3(\delta) \geqslant 2\sin\varphi \geqslant 1$ при $1/4 \leqslant \delta \leqslant 1/3$. Отсюда следует, что $l = F(\delta) < 1$ при $0 < \delta \leqslant 1/3$. Остается доказать, что образ круга E при $1/3 < \delta \leqslant 2/3$ не обладает звездностью относительно каждой из внутренних его точек, лежащих на оси симметрии. Но это следует из того, что кривая $\mathscr{L}$ выпукла и из каждой точки M вещественной оси, которая имеет положительную абсциссу, к $\mathscr{L}$ можно провести касательную. Тогда прямгя, параллельная касательной, достаточно к ней близкая и расположенная под ней, пересекает кривую $\mathscr{L}$ в двух точках. Соединяя более удаленную от начала из этих точек с точкой M, получаем луч, исходящий из M и пересекающий $\mathscr{L}$ в двух точках. В заключение заметим, что при $0 < \delta \leqslant 1/3$ граница образа круга E имеет две асимптоты, а при $1/3 < \delta \leqslant 2/3$ не имеет ни одной.

1. *Duren P. L., Lanyhlin R.* Two-slit mappigs and the Marx conjecture.— Mich. Math. J., 1972, **19**, N 3, p. 267—273.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1951.— 606 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 28.10.85