УДК 517.55

С. П. Гузов

Оболочки голоморфности компактов с аналитической структурой

Пусть X — многообразие Штейна и $F \subset X$ — некоторое подмножество. Рассмотрим алгебру голоморфных функций на F

$$\Gamma(F, {}_X\mathcal{O}) = \varinjlim_{\alpha} \Gamma(U_\alpha, {}_X\mathcal{O}),$$

где ${}_X\mathcal{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — фундаментальная система окрестностей F в X и $\Gamma(U_\alpha, {}_X\mathcal{O})$ — алгебра голоморфных функций на U_α с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах; $\Gamma(F, {}_X\mathcal{O})$ снабдим топологией индуктивного предела. Обозначим через $\tilde{F}$ спектр алгебры $\Gamma(F, {}_X\mathcal{O})$, а через $g: F\to\tilde{F}$ — естественное отображение, определенное по формуле $g(x)(f) = f(x)$, т. е. гельфандовское представление (далее используется стандартная терминология теории банаховых алгебр и аналитических пространств [1]).

Оболочкой голоморфности множества F называется объединение связных компонент $\tilde{F}$, пересекающихся с $g(F)$, и обозначается через $E(F)$. В случае компактного F доказано, что $\tilde{F} = E(F)$ [2]. Аналогичный результат справедлив и для открытого F в X [3].

Уэллс [4] поставил следующую задачу. Пусть S — категория компактов в некотором многообразии Штейна X. Морфизмом K_1 в K_2 назовем росток некоторого голоморфного отображения $f: U\to X$, где U — окрестность K_1, причем $f(K_1)\subset K_2$. Эта категория не замкнута относительно взятия оболочки голоморфности (соответствующий пример см. в [2]). Требуется найти такую категорию $\mathcal{T}$, что: 1) S — полная подкатегория $\mathcal{T}$; 2) на объектах $\mathcal{T}$ корректно задана операция взятия оболочки голоморфности (обозначим ее E), причем если $K\in\mathcal{T}$, то $E(K)\in\mathcal{T}$.

Все категории предполагаются «голоморфными», т. е. класс объектов состоит из множеств с корректно введенной (обобщенной) голоморфной структурой, а морфизмы—голоморфные отображения объектов относительно этих структур.

В данной работе дается решение этой задачи.

Пусть $K = \lim\limits_{\overleftrightarrow{\alpha}} X_\alpha$, где X_α — области, разветвленные над X с накрывающими отображениями p_α. Отображения спектра $\omega_\beta^\alpha: X_\alpha\to X_\beta$ предполагаются локальными биголоморфизмами, согласованными с p_α. Каждое X_α снабжено пучком ростков голоморфных функций ${}_\alpha\mathcal{O}$. Пусть $\overset{*}{\omega}_\alpha({}_\alpha\mathcal{O})$ — обратный образ пучка ${}_\alpha\mathcal{O}$ при отображении $\omega_\alpha: K\to X_\alpha$. Если $\alpha\geqslant\beta$, то существует естественный гомоморфизм пучков $\overset{*}{\omega}_\beta({}_\beta\mathcal{O})\to\overset{*}{\omega}_\alpha({}_\alpha\mathcal{O})$. Индуктивный предел этих пучков называется структурным пучком множества K, связанным со спектром $(X_\alpha, \omega_\beta^\alpha)$, и обозначается ${}_K\mathcal{O}$; ${}_K\mathcal{O}$ задает голоморфную структуру на K. В дальнейшем зависимость от спектра указывать не будем. Случай $K\subset X$ можно получить, взяв в качестве $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ фундаментальную систему окрестностей K.

Можно рассмотреть алгебру голоморфных функций на K. Она описывается следующим образом. Пусть $\{W_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$ — фундаментальная система окрестностей $\omega_\alpha(K)$ в X_α. Тогда $\{W_{\alpha\beta}\}$ можно превратить в проективный спектр с пределом K следующим образом: $(\alpha', \beta')\geqslant(\alpha, \beta)$, если $\alpha'\geqslant\alpha$ и $(\omega_\alpha^{\alpha'})^{-1}(W_{\alpha\beta})\supset W_{\alpha'\beta'}$. Алгебра голоморфных функций на K $\Gamma(K, {}_K\mathcal{O}) = \lim\limits_{\overrightarrow{\alpha,\beta}}\Gamma(W_{\alpha\beta}, {}_\alpha\mathcal{O})$ с топологией индуктивного предела. Эта непосредственно следует из определения индуктивного предела пучков. Прямо проверяется, что $\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ не зависит от выбора фундаментальных систем $\{W_{\alpha,\beta}\}$. Спектр этой алгебры обозначим через $\tilde{K}$. Имеется естественное отображение $g: K\to\tilde{K}$.

Оболочкой голоморфности $E(K)$ назовем объединение связных компонент $\tilde{K}$, пересекающихся с $g(K)$. Спектр $\tilde{K}$ можно также представить в следующей форме. Из двойственности индуктивных и проективных пределов [5] для топологических векторных пространств имеем $\Gamma'(K, {}_K\mathcal{O}) = \lim\limits_{\overleftarrow{\alpha,\beta}}\Gamma'(W_{\alpha\beta}, {}_\alpha\mathcal{O})$ и $\tilde{K} = \lim\limits_{\overleftarrow{\alpha,\beta}}\tilde{W}_{\alpha\beta}$, в чем легко убедиться прямой проверкой. Ясно, что на $\tilde{K}$ также индуцируется голоморфная структура, т. е. пучок ${}_{\tilde{K}}\mathcal{O}$.

Теорема 1. *Пусть K — компакт в топологии проективного предела. Тогда* $E(K)=\tilde{K}$.

Доказательство. Пусть $h\in\tilde{K}$ и $f\in\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$. Тогда $|h(f)|\leqslant\leqslant\sup\limits_K|f|$. Действительно, пусть $|h(f)|>\sup\limits_K|f|$ для некоторых $h\in\tilde{K}$ и $f\in\in\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$. В этом случае существует такое $f'\in\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$, что $h(f')=1$. Однако $\sup\limits_K|f'|<1$. Таким образом, $\sup\limits_K|1-f'|>\varepsilon>0$. Поэтому существует такое $g_{\alpha\beta}\in{}_\alpha\mathcal{O}(W_{\alpha\beta})$, что $\sup\limits_{W_{\alpha\beta}}|g_{\alpha\beta}|>\varepsilon>0$ и $\rho_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta})=1-f'$, где $\rho_{\alpha\beta}:\Gamma(W_{\alpha\beta}, {}_\alpha\mathcal{O})\to\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ — отображения соответствующего спектра. Тогда $1-f'$ обратим в $\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$, что противоречит равенству $h(1-f')=0$.

Пусть $A(K)$ — замыкание $\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ в банаховой алгебре непрерывных функций на K. Возникает отображение спектра $A(K)$ в $\tilde{K}$, действующее по формуле $h\to h|_{\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})}$. Из изложенного выше следует, что это отображение—гомеоморфизм. По теореме Шилова об идемпотентах, образ спектра $A(K)$ при этом отображении содержится в $E(K)$. Значит, $E(K)=\tilde{K}$. Теорема доказана.

Теорема 2. а). *Отображение* $g^*:\Gamma(\tilde{K}, {}_{\tilde{K}}\mathcal{O})\to\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ — *алгебраический изоморфизм.*

б). *Пусть* $\varphi:K\to L$ — *морфизм компактов, где* L — *некоторый компакт с аналитической структурой, индуцируемой проективным пределом разветвленных областей над* X, *причем* $\varphi^*:\Gamma(L, {}_L\mathcal{O})\to\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ — *изоморфизм. Тогда существует и единственный морфизм* $h:L\to\tilde{K}$, *такой, что* $h\circ\varphi=g$.

в). *Отображение* $\pi:\tilde{K}\to X$, *где* $\pi(x)=\tilde{p}_{\alpha\beta}\circ\hat{\omega}_{\alpha\beta}(x)$ и $\tilde{p}_{\alpha\beta}:\tilde{W}_{\alpha\beta}\to X$, *корректно определено и индуцирует алгебраический изоморфизм* ${}_{\tilde{K}}\mathcal{O}_x\cong\cong{}_X\mathcal{O}_{\pi(x)}$; *аналогично и для* $\pi=\rho_\alpha\circ\omega_\alpha$, *причем* $\pi=\tilde{\pi}\circ g$.

Доказательство. а). Доказательство в точности повторяет рассуждения [2].

б). Легко видеть, что в качестве h надо взять отображение $L\ni x\to\to\hat{h}_x\in\tilde{K}$, где $\hat{h}_x(f)=((\varphi^*)^{-1}f)(x)$.

в). Корректность $\tilde{\pi}$ следует из корректности π и единственности аналитического продолжения. Ясно, что ${}_\alpha\mathcal{O}_{\tilde{\omega}_{\alpha\beta}(x)}\cong{}_X\mathcal{O}_{\tilde{\pi}(x)}$ ввиду того, что $\tilde{p}_\alpha$ — локальные биголоморфизмы. Далее, $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}:\tilde{W}_{\alpha'\beta'}\to\tilde{W}_{\alpha\beta}$ — локальные биголоморфизмы. Отсюда следует, что ${}_{\tilde{K}}\mathcal{O}_x\cong{}_\alpha\mathcal{O}_{\tilde{\omega}_{\alpha\beta}(x)}\cong{}_X\mathcal{O}_{\tilde{\pi}(x)}$. Равенство $\pi==\tilde{\pi}\circ g$ проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Теорема 2 обосновывает введенное выше понятие оболочки голоморфности, как «наибольшего» множества, на которое продолжаются все голоморфные функции с данного компакта.

Теорема 3. *Пусть* S — *категория компактных проективных пределов областей над многообразием Штейна* X, *т. е. объектами* $\mathcal{T}$ *являются проективные пределы* $K=\varprojlim\limits_\alpha X_\alpha$, *где* X_α *разветвлены над* X *с накрывающими отображениями* p_α; *отображения спектра* ω_β^α *локально биголоморфны и согласованы с* p_α. *Тогда* $\mathcal{T}$ *удовлетворяет условиям* 1, 2.

Доказательство. Если $K\subset X$ компактно, то $K=\varprojlim\limits_\alpha X_\alpha$, где $\{X_\alpha\}$ — фундаментальная система окрестностей K в X и, следовательно, S — полная подкатегория $\mathcal{T}$.

Пусть $K=\varprojlim\limits_\alpha X_\alpha$ —некоторый компакт. Тогда $E(K)=\varprojlim\limits_{\alpha,\beta}\tilde{W}_{\alpha\beta}$. Докажем, что $E(K)$ — компакт. Для $f\in\Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ рассмотрим $\Delta_f\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\leqslant\sup\limits_K|f|\}$.

Тогда $\Delta = \prod_{f \in \Gamma(K, {}_K\mathcal{O})}$ компактно. Рассмотрим $S = \{x \in \Delta \mid x_1 = 1,\ x_{fg} = x_f x_g,$ $x_{af+bg} = ax_f + bx_g\}$; S очевидно замкнуто и компактно. В силу того, что для любого $h \in \widetilde{K}$ и $f \in \Gamma(K, {}_K\mathcal{O})$ $|h(f)| \leqslant \sup_K |f|$, имеется отображение $\pi: \widetilde{K} \to S$, $\pi(h)_f = h(f)$. Оно, очевидно, непрерывно и биективно. Кроме того, π^{-1} непрерывно, так как на $\widetilde{K}$ звездочкой отмечена слабая топология. Таким образом, π — гомеоморфизм.

Итак, теорема 3 дает решение задачи, сформулированной Уэллсом.

1. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции нескольких комплексных переменных.— М. : Мир, 1969.— 395 с.
2. *Harvey R., Wells R.* Compact holomorphically convex sets of Stein manifold.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **136**, p. 509—516.
3. *Rossi H.* On envelopes of holomorphy.— Communs Pure and Appl. Math., 1963, **16**, N 1, p. 9—19.
4. *Wells R. O.* Function theory on differentiable submanifolds.— In : Contribs Anal. New York; London, 1974, p. 407—441.
5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.

Львов. ун-т

Получено 28.06.84