УДК 517.94

Г. С. Жукова

Асимптотика решений системы линейных неоднородных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

Для векторного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^{h}\dot{X} = A(t, \varepsilon) X + \varepsilon^{\alpha_1} p(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$$

в случае резонанса и кратного спектра у предельной матрицы построены решения с асимптотикой по целым и дробным степеням параметра ε.

Для векторного диференціального рівняння

$$\varepsilon^h \dot{X} = A(t, \varepsilon) X + \varepsilon^{\alpha_1} p(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$$

у випадку резонансу та кратного спектра у граничної матриці побудовані розв'язки з асимптотикою по цілих та дробових степенях параметру ε.

1. Введение. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h \dot{X} = A(t, \varepsilon) X + \varepsilon^{\alpha_1} p(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right) \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1) $t \in [0, T]$, $h \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$; ε — действительный параметр, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$; $\lambda \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C})$;

2) $A(t, \varepsilon)$ и $p(t, \varepsilon)$ представляются соответственно матрицей $n \times n$ и n-мерным вектором, элементы которых непрерывны по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $p(t, 0) \not\equiv 0$. Кроме того, при $\varepsilon \to +0$ равномерно на $[0, T]$ справедливы асимптотические разложения

$$A(t, \varepsilon) \backsim A_0(t) - \sum_{s \geqslant 1} \varepsilon^s A_s(t), \quad p(t, \varepsilon) \backsim \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s f_s(t),$$

где $A_s \in \mathbb{C}^\infty([0, T], (\mathbb{R}^n))$ и $f_s \in \mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, $s \geqslant 0$;

3) $A_0(t) = \lambda_0(t) I + \Lambda_0$, где Λ_0 — клетка Жордана размерности n.

Результаты исследований некоторых частных случаев системы вида (1) см., например, в [1] (гл. IV), [2] (гл. V), [3] (§§ 21, 25), [4] (§ 26). Здесь различают резонансный и нерезонансный случаи в зависимости от того, совпадает или нет $\lambda(t)$ с $\lambda_0(t)$ хотя бы при одном значении t_0 из $[0, T]$. Известно, что в случае отсутствия резонанса уравнение (1) имеет решение с асимптотикой

$$X(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1 + \delta} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s X_s(t) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right), \quad X_0(t) \not\equiv 0, \tag{2}$$

где $\delta = 0$, содержащее разложение только по целым степеням ε и совпадающее по структуре с асимптотикой свободного члена из (1).

При наличии резонанса известны результаты, когда для (1) асимптотическое решение строилось в виде разложения по целым степеням ε (см., например, [2, с. 317]) или в виде разложений по некоторым дробным степеням ε (см., например, [3, с. 124, 154; 4, с. 186]). Однако, обсуждению подверглись только те системы (1), в которых $h = 1$ и $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_1 = 1$, а матрица $A_1(t) = \| c_{ij}(t) \|_{\overline{1,n}}$ такова, что $c_{n1}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$ или $c_{n1}(t) \equiv 0$, но $c_{n2}(t) + c_{n-1,1}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$.

Цель настоящей работы — изучить для системы (1) общего вида случай резонанса и доказать существование решения с асимптотикой (2), где $\delta \leqslant 0$, используя для этого аналог метода диаграммы Ньютона. Кроме того, в работе строится решение в виде разложения по дробным степеням параметра с целью выяснения преимуществ того или другого подхода.

2. Разложение по целым степеням параметра (подход I). Сделаем в (1) замену переменной

$$X(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1} x(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right) \tag{3}$$

и перейдем к анализу векторного уравнения

$$\varepsilon^h \dot{x} = (A(t, \varepsilon) - \lambda(t) I) x + p(t, \varepsilon). \tag{4}$$

Формальным решением уравнения (1) назовем выражение (3), где $x(t, \varepsilon)$ — формальное решение уравнения (4), т. е. разложение по какойлибо асимптотической последовательности, удовлетворяющее на $[0, T]$ соотношению $\varepsilon^h \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = \left(A_0(t) - \lambda(t) I - \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s A_s(t)\right) x(t, \varepsilon) + \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s f_s(t)$, понимаемому в смысле равенства формальных степенных рядов.

Рассмотрим сначала случай тождественного резонанса, когда $\lambda(t) \equiv \lambda_0(t)$ (т. е. $A_0(t) - \lambda(t) I \equiv \Lambda_0$) и функция $x(t, \varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon^h \dot{x}(t, \varepsilon) = \left(\Lambda_0 - \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s A_s(t)\right) x(t, \varepsilon) + \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s f_s(t). \tag{5}$$

Пусть E_1 и E_2 — пространства всевозможных разложений (не обязательно сходящихся) по асимптотическим последовательностям вида $\{\varepsilon^{r_s} : r_0 < r_1 < \ldots, r_s \in \mathbf{Q}\}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$ или $\mathbb{C}^\infty([0, T], \mathbb{C})$ соответственно. Введем в (E_1) операторы, заданные на функциях $u \in E_1$ выражениями $[\mathfrak{B}u](t) \equiv \Lambda_0 u(t, \varepsilon)$, $[\Gamma u](t) \equiv \Lambda_0^T u(t, \varepsilon)$, $[P_b u](t) \equiv b(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon)$, $b \in E_2$; $[H_s u](t) \equiv \delta_{h,s} \frac{du(t, \varepsilon)}{dt} + A_s(t) u(t, \varepsilon)$, $s \geq 1$, где δ_{ij} — символ Кронекера, T в показателе степени означает транспонирование. Пусть $\varphi = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $\psi = (0, \ldots, 0, 1)^T$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Определим в (E_1) операторы $L_{\nu r}$, $\nu, r \geq 0$, по следующим рекуррентным формулам: $L_{0r} = \Gamma^{r-1}$, $r \geq 1$; $L_{\nu 0} = H_\nu + \sum_{i=1}^{\nu-1} H_i \Gamma L_{\nu-i,0}$, $\nu \geq 1$; $L_{\nu r} = \Gamma L_{\nu, r-1} + \sum_{i=1}^{\nu} H_i \Gamma L_{\nu-i,r}$, $\nu, r \geq 1$. Обозначим

$$H = \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s H_s, \quad F_0 = \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu L_{\nu 0}, \quad F_r = \Gamma^{r-1} + \sum_{\nu\geq 1} \varepsilon^\nu L_{\nu r}, \quad r \geq 1. \tag{6}$$

Вместо уравнения (4) будем рассматривать в E_1 уравнение

$$\mathfrak{B}x = Hx - f \tag{7}$$

с нормально разрешимым оператором $\mathfrak{B}$, где $f \in E_1$ и

$$f = \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s f_s. \tag{8}$$

Оно имеет решение

$$x = (I + \Gamma F_0) P_y \varphi - (I + \Gamma F_0) \Gamma f, \tag{9}$$

если y выбран в E_2 так, что для (7) выполнено условие разрешимости

$$y \langle F_0 \varphi, \psi \rangle + \sum_{r\geq 1} y_r \langle F_r \varphi, \psi \rangle = \langle (I + F_0 \Gamma) f, \psi \rangle,$$

где $y_r \in E_2$ и вычисляется по формуле $y_r(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{rh} y^{(r)}(t, \varepsilon)$, $r \geq 1$. (Тогда $x(t, \varepsilon)$, вычисленная с помощью формул (6), (8), (9), формально удовлетворяет равенству (5), и, следовательно, формула (3) определяет формальное решение уравнения (1).) Таким образом, задача свелась к поиску $y(t, \varepsilon)$, удовлетворяющей на $[0, T]$ скалярному уравнению

$$\sum_{r\geq 0} y^{(r)}(t, \varepsilon) \varepsilon^{rh} \langle [F_r \varphi](t), \psi \rangle = \langle [(I + F_0 \Gamma) f](t), \psi \rangle. \tag{10}$$

Для каждого фиксированного $r \geq 0$ обозначим через s_r и α_2 наименьшие из индексов $0, 1, \ldots$, для которых соответственно $\langle [L_{s_r, r} \varphi](t), \psi \rangle \not\equiv 0$ или $\langle f_{\alpha_2}(t) + \sum_{i=0}^{\alpha_2 - 1} [L_{\alpha_2 - i, 0} \Gamma f_i](t), \psi \rangle \not\equiv 0$. Пусть $p_r = s_r + rh$, $r \geq 0$, и

$$a_{r\nu}(t) = \langle [L_{\nu + s_r, r} \varphi](t), \psi \rangle; \quad \sigma_\nu(t) = \langle f_{\nu + \alpha_2}(t) + \sum_{i=0}^{\nu + \alpha_2 - 1} [L_{\nu + \alpha_2 - i, 0} \Gamma f_i](t), \psi \rangle,$$
$$r, \nu \geq 0. \tag{11}$$

Тогда, учитывая (6), (8) и (11), уравнение (10) принимает вид

$$\sum_{r\geqslant 0} y^{(r)}\varepsilon^{p_r} \sum_{\nu\geqslant 0} \varepsilon^{\nu} a_{r\nu}(t) = \varepsilon^{\alpha_2} \sum_{\nu\geqslant 0} \varepsilon^{\nu}\sigma_{\nu}(t). \tag{12}$$

Обозначим через l_0 наибольший из индексов 0, 1, ..., n, для которого достигается равенство $p_{l_0} = \min(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ и $a_{l_0 0}(t) \not\equiv 0$.

Используя методику работы [5], применим к (12) аналог метода диаграммы Ньютона. Первая диаграмма уравнения (12) содержит только одно звено, соединяющее точки $(0, \alpha_2)$ и $(1, p_{l_0})$, проекция которого на ось абсцисс равна единице. Поэтому по аналогии с [5] (теорема 1) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$a_{l_0 0}(t) \neq 0, \qquad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Тогда уравнению (12) *удовлетворяет разложение вида* $y(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_2 - p_{l_0}} \sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^s y_s(t)$, *где* $y_0(t) \not\equiv 0$. *При этом функции* $y_s(t)$, $s \geqslant 0$, *последовательно вычисляются по рекуррентным формулам*

$$a_{l_0 0}(t)\, y_s^{(l_0)} + \sum_{r=0}^{l_0-1} \delta_{p_r, p_{l_0}} a_{r0}(t)\, y_s^{(r)} = h_{s-1}(t),$$

$$h_{s-1}(t) = \sigma_s(t) + \sum_{i=0}^{[(s-s_i+p_{l_0})/h]} \ \sum_{j=0}^{s-p_i+p_{l_0}-\delta_{p_i, p_{l_0}}} a_{i, s-p_i+p_{l_0}-j}(t)\, y_j^{(i)}(t), \qquad s \geqslant 0.$$

Таким образом, согласно (9) $x(t, \varepsilon)$ также является разложением по целым степеням ε и справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1—3 *и условие* (13). *Тогда векторное дифференциальное уравнение* (1) *в случае тождественного резонанса имеет формальное частное решение вида* (2), *где* $\delta = \min(0, \alpha_2 - p_{l_0})$. *При этом функция* $X_s(t)$, $s \geqslant 0$, *вычисляется по рекуррентной формуле*

$$X_s(t) = y_{s-\alpha_2+p_{l_0}+\delta}(t)\,\varphi - \Lambda_0^T \Big(f_{s+\delta}(t) - \dot{X}_{s-h}(t) - \sum_{i=0}^{s-1} A_{s-i}(t)\, X_i(t) \Big).$$

Замечание 1. В случае точечного резонанса (когда $\lambda(t)$ совпадает с $\lambda_0(t)$ хотя бы при одном значении $t_0 \in [0, T]$, но не тождественно) можно поступить по аналогии с [2, с. 315], считая расстройку $\lambda(t) - \lambda_0(t)$ величиной малой, связанной с ε равенством $\lambda(t) - \lambda_0(t) = \varepsilon^{\alpha_3} v(t)$, где α_3 — некоторое натуральное число. В итоге получим задачу поиска формальных решений уравнения

$$\varepsilon^h \dot{x} = \Big(\Lambda_0 - \sum_{s\geqslant 1} \varepsilon^s (A_s(t) + \delta_{s,\alpha_3} v(t) I) \Big) x + \sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^s f_s(t),$$

аналогичного (5) и находящегося, как и (5), в условиях тождественного резонанса. Непосредственно проверяется, что при выполнении условия (13) в качестве α_3 можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\alpha_3 \geqslant h$ или $\alpha_3 \geqslant h + k_1$, если соответственно $l_0 \geqslant 1$ или $l_0 = 0$, где k_1 — коэффициент наклона первого звена диаграммы соответствующего для (12) линейного однородного дифференциального уравнения

$$\sum_{r\geqslant 0} q^{(r)}\varepsilon^{p_r} \sum_{\nu\geqslant 0} \varepsilon^{\nu} a_{r\nu}(t) = 0. \tag{14}$$

При таком выборе числа α_3 для векторного уравнения (1) в случае точечного резонанса будет построено формальное решение вида (2), где $\delta = \min(0, \alpha_2 - p_{l_0}, \alpha_3 - p_{l_0})$. (Например, если для (1) $c_m(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, то $l_0 = 0$, $k_1 = -h + \dfrac{1}{n}$ и, следовательно, в качестве α_3 можно использовать любое натуральное число). В частности, выбрав $\alpha_3 = 1$, получим результат [2, с. 317], построив для (1) формальное решение в виде разложения по целым степеням ε. Отметим, что для рассмотренного примера асимптотическое разложение решений соответствующей по отношению к (4) линейной однородной системы

$$\varepsilon^h \dot{V} = (A(t, \varepsilon) - \lambda(t) I) V \tag{15}$$

идет по степеням параметра $\varepsilon^{1/h}$.)

3. Разложение по дробным степеням параметра (подход II). В качестве примера рассмотрим случай тождественного резонанса. По аналогии с [3, с. 125] или [4, с. 186] будем искать формальное решение уравнения (4) в виде

$$x(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon) + z(t, \varepsilon), \tag{16}$$

где $d\xi/dt = \varepsilon^{-h}(\mu(t, \varepsilon)\xi + \eta(t, \varepsilon))$, что сведет задачу к поиску векторных функций $u(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$ и скалярных функций $\mu(t, \varepsilon)$, $\eta(t, \varepsilon)$ в классе формальных степенных рядов, удовлетворяющих уравнениям

$$\varepsilon^h \dot{u} = (A(t, \varepsilon) - \lambda_0(t) I - \mu(t, \varepsilon) I) u, \tag{17}$$

$$\varepsilon^h \dot{z} = (A(t, \varepsilon) - \lambda_0(t) I) z - \eta(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon) + p(t, \varepsilon). \tag{18}$$

Замечание 2. Именно к решению уравнения (17) приводит задача построения формальных решений уравнения (15), если предварительно произвести замену $V(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) q(t, \varepsilon)$, где $q(t, \varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$ [6]. Эта задача представляет самостоятельный интерес, изучалась многими авторами (см., например, [1, 3, 4, 6, 7]). В частности, в [7] показано, что функция $q(t, \varepsilon)$ есть решение уравнения (14), а $u(t, \varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$u(t, \varepsilon) = [(I + \Gamma F_0)\varphi](t) + \sum_{r \geqslant 1} q^{(r)}(t, \varepsilon)\varepsilon^{rh}[\Gamma F_r \varphi](t), \tag{19}$$

причем для реализации алгоритма поиска функции $\mu(t, \varepsilon)$ предполагается, что $A(t, \varepsilon)$ обладает свойствами, обеспечивающими отсутствие у диаграммы уравнения (14) точек поворота. (Например, пусть $\mu(t, \varepsilon)$ построена при рассмотрении первого звена диаграммы уравнения (14) с коэффициентом наклона k_1 и определяющим уравнением, имеющим простой корень $\mu_0(t)$.

Пусть на звено попали точки $(0, p_0)$ и (ν_i, p_{ν_i}), $i = \overline{1, m}$. Тогда $\mu(t, \varepsilon)$ строится в виде разложения $\mu(t, \varepsilon) = \varepsilon^{k_1 + h}\sum_{s \geqslant 0}\varepsilon^{s/p}\mu_s(t)$, где $p \in \mathbb{N}$ — знаменатель в записи рационального числа k_1 как несократимой дроби. При этом требуют, чтобы $a_{10}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, при $\nu_m = 1$ и $\sum_{i=1}^{m} \nu_i a_{\nu_i 0} \times$ $\times (t)\mu_0^{\nu_i - 1}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, при $\nu_m \geqslant 2$, что, в частности, предполагает выполненным условие (13), откуда $\mu_0(t) \neq 0$. Тогда (19) допускает представление $u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{s \geqslant 1}\varepsilon^{s/p} u_s(t)$.)

Считая $\mu(t, \varepsilon)$ и $u(t, \varepsilon)$ известными, перейдем к изучению уравнения (18), заменив его уравнением в E_1

$$\mathfrak{B} z = Hz + P_\eta u - f$$

и воспользовавшись нормальной разрешимостью оператора $\mathfrak{B}$. В результате такого подхода получим

$$z(t, \varepsilon) = [(I + \Gamma F_0)\Gamma(P_\eta u - f)](t), \tag{20}$$

где η подбирается из уравнения

$$\eta \langle [(I + F_0\Gamma) u](t), \psi\rangle + \sum_{r \geqslant 1} \eta^{(r)} \varepsilon^{rh} \langle [F_r \Gamma u](t), \psi\rangle = \langle [(I + F_0\Gamma) f](t), \psi\rangle,$$

подобного уравнению (10).

Учитывая (6), (8), (19) и тот факт, что $u(t, \varepsilon)$ — разложение по степенной последовательности $\{\gamma^s\}$, где $\gamma = \varepsilon^{1/p}$, получаем: функция $\eta(t, \varepsilon)$ должна удовлетворять на $[0, T]$ уравнению вида

$$\sum_{r \geqslant 0} \eta^{(r)} \gamma^{\rho_r} \sum_{\nu \geqslant 0} \gamma^\nu b_{r\nu}(t) = \gamma^{\alpha_2 p} \sum_{\nu \geqslant 0} \gamma^\nu Y_\nu(t), \tag{21}$$

где роль основного параметра играет γ, а в остальном — однотипному по отношению к уравнению (12). С этой поправкой для (21) справедлива теорема 1, если, конечно, выполнено ее основное условие: $b_{\hat{l}_0 0}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$.

Если $l_0 \geqslant 1$, то $k_1 = 0$, $p = 1$, $\hat{l}_0 = l_0 - 1$ и $b_{\hat{l}_0 0}(t) = a_{l_0 0}(t)$. Поэтому, если для (1) $l_0 \geqslant 1$ и выполнено условие (13), то из (14) по невозрастающему участку его диаграммы строим $\mu(t, \varepsilon)$ и по формуле (19) вычисляем $u(t, \varepsilon)$, являющиеся разложениями по целым степеням ε. Далее с помощью теоремы 1 находим решение уравнения (21) $\eta(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_2 - p_{l_0} + h} \times \sum_{\nu \geqslant 0} \varepsilon^\nu \eta_\nu(t)$. В итоге будет построено формальное решение уравнения (1) $X(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1 + \min(0, \alpha_2 - p_{l_0})} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s X_s(t) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$, которое совпадает с разложением (2), построенным в теореме 2.

Если $l_0 = 0$, то $k_1 < 0$ и $\hat{l}_0 = 0$. При этом $b_{\hat{l}_0 0}(t) = a_{10}(t)$, если $\nu_m = 1$, и $b_{\hat{l}_0 0}(t) = -a_{00}(t)/\mu_0(t)$, если $\nu_m \geqslant 2$. Поэтому без дополнительных ограничений (к тем, о которых говорилось в замечании 2) для уравнения (21) справедлива теорема 1, откуда находим $\eta(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_2 - p_0 + k_1 + h} \sum_{\nu \geqslant 0} \varepsilon^{\nu/p} \eta_\nu(t)$. Тем самым по формулам (3), (16), (19), (20) будет построено формальное решение уравнения (1), допускающее представление $X(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1 + \min(0, \alpha_2 - p_0 + k_1)} \times \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^{s/p} X_s(t) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$ и содержащее разложение по той же дробной степени параметра ε, что и используемое для этого формальное решение уравнения (15).

4. Сравнение результатов. Подход II не расширил (по сравнению с ограничением (13)) класс векторных уравнений (1), для которых применим подход I. Кроме того, по мнению автора, подход II более трудоемок, так как требует вычисления четырех вспомогательных функций и предварительного решения соответствующего для (1) линейного однородного векторного дифференциального уравнения (15) с кратным спектром у предельной матрицы.

Своим алгоритмом подход I напоминает метод неопределенных коэффициентов решения систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. А подход II — некоторую модификацию метода вариации, примененного к той же системе.

Заметим, если для (1) $c_{n1}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, то $l_0 = 0$, $k_1 = -h + 1/n$, $p = n$ и при $h = 1$, $\alpha_1 = 1$ из результатов п. 3 следуют утверждения [3] (теорема IV. 1), [4] (теорема 4.13). Если для (1) $c_{n1}(t) \equiv 0$ и $c_{n2}(t) + c_{n-1,1}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, то $l_0 = 1$ и $k_1 = 0$, что при $h = 1$, $\alpha_1 = 1$ приведет к утверждению [3] (теорема IV. 7).

Можно доказать, что построенные выше формальные решения носят асимптотический характер. Например, если $\hat{X}(t, \varepsilon)$ — отрезок ряда (2) длины m и $\mathrm{Re}\,\lambda(t) \leqslant 0$, то при некоторых традиционных ограничениях на фундаментальную матрицу решений системы (15) в области $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедлива оценка

$$\| X(t, \varepsilon) - \hat{X}(t, \varepsilon) \| \leqslant B\varepsilon^{\alpha_1 + k_1 + \delta - h + 1},$$

где постоянная B не зависит от t и ε, а $X(t, \varepsilon)$ — точное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $X(0, \varepsilon) = \hat{X}(0, \varepsilon)$.

1. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа.— М. : Наука, 1981.— 487 с.
3. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 251 с.
4. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 226 с.
5. *Жукова Г. С.* Об одном дифференциальном уравнении с малым параметром при старшей производной // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 4.— С. 417—424.
6. *Ломов С. А., Елисеев А. Г.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 3.— С. 3—53.
7. *Жукова Г. С.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем.— Киев, 1983.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.38).

Моск. хим.-технол. ин-т

Получено 24.11.89