Доказательство. Функцию $g_{2*}(x, y)$ запишем как

$$g_{2*}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{nj} \varphi_{nj}(x) \varphi_{nj}(y).$$

После подстановки этого ряда в (13) получим

$$n(U_n^* - \theta^*) = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{nj} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{nj}(X_k^*) \right)^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{nj}^2 (X_k^*) \right\}. \quad (18)$$

Система функций $\{\varphi_{nj}\}$ ортонормирована относительно распределения F_n. Учитывая это, при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{nj}(X_k^*) \xrightarrow{d^*} \tau_j \ (P\text{-п. н.}),$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\varphi_{nj}^2(X_k^*) - E^* \varphi_{nj}^2 (X_1^*)] \xrightarrow{P^*} 0 \ (P\text{-п. н.}),$$

$$E\varphi_{nj}^2 (X_1^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{nj}^2 (X_k) \to 1 \quad (P\text{-п. н.})$$

для любого фиксированного $j = 1, 2, \ldots$. Из этих соотношений и из (18) с помощью аргументов, приведенных в [1, с. 97 — 98], в условиях данной теоремы вытекает (17).

Возникает проблема исследования асимптотических свойств распределений с помощью формулы (1). При таком подходе дело сводится к изучению квадратичных форм от мультиномиального вектора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ с матрицей коэффициентов $\Phi(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \ldots, N$.

1. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Теория U-статистик.— Киев : Наук. думка, 1989.— 384 с.
2. *Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа.— М. : Финансы и статистика, 1988.— 263 с.
3. *Bickel P. J., Freedman D. A.* Some asymptotic theory for the bootstrap // Ann. Statist.— 1981.— **9**, N 6.— P. 1196—1217.
4. *Laws* of large numbers for bootstrapped U-statistics / K. B. Athreya, C. Ghosh, L. J. Low, P. K. Sen // J. Statist. Plann. and Inference.— 1984.— **9**, N 2.— P. 185—194.
5. *Shi Xi Quan.* Some asymptotic properties of bootstrapping U-statistics // J. Syst. Sci. and Math. Sci.— 1987.—7, N 1.— P. 14—22.

Ленингр. ин-т текстил. и лег. пром-сти

Получено 29.11.89

УДК 517.987

М. С. Матвейчук

Индефинитная мера в J-пространствах

Предложен аналог теоремы Глисона для логики всех J-проекторов аппроксимативного W^*J-фактора в J-пространстве.

Запропоновано аналог теореми Глісона для логіки всіх J-проекторів апроксимативного W^*J-фактору в J-просторі.

Хорошо известна проблема описания мер на квантовых логиках [1]. Исчерпывающее решение проблемы получено для решетки П всех ортопроекторов W^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Существенное продвижение имеется и для логики $\mathcal{L}$ всех проекторов $\mathfrak{A}$. Предложим описание мер на логиках проекторов J-пространств.

Пусть H —пространство с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot]$ и канонической симметрией J (H — J-пространство). Относительно скалярного произведения $(x, y)=[Jx, y]$ H — гильбертово пространство. Пусть $\mathcal{P}$ $(=\mathcal{P}(\mathfrak{A}))$ — совокупность всех J-проекторов J-самосопряженной слабозамкнутой алгебры операторов $\mathfrak{A}$ в H, содержащей 1. Относительно стандартных отношений: порядка ($p \leqslant g$, если $pg = gp = p$, p, $g \in \mathcal{P}$), ортогональности ($p \perp g$, если $p\,g = gp = 0$) и перехода к ортодополнению ($p \to p^{\perp} = I - p$) множество $\mathcal{P}$ — логика (иногда говорят квантовая логика). Существуют примеры, когда логика $\mathcal{P}$ изоморфна логике Π (либо $\mathcal{L}$). Специфика J-пространств наиболее полно проявляется, когда $J \in \mathfrak{A}$.

В этом случае назовем $\mathfrak{A}$ W^*J-алгеброй (в комплексном H $\mathfrak{A}$ — W^*-алгебра). W^*J-фактор $\mathfrak{A}$ назовем $W^*\Pi$-фактором, если хотя бы один из проекторов $p^+ = 1/2\,(I + J)$ или $p^- = 1/2\,(I - J)$ конечен относительно $\mathfrak{A}$. В противном случае $\mathfrak{A}$ — W^*K-фактор. Отметим, что $W^*\Pi$- и W^*K-факторы наследуют свойства алгебры $B(H)$ в пространствах Понтрягина и Крейна соответственно. Если существует возрастающая последовательность $\mathfrak{A}_1 \subset \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots$ W^*J-факторов типа 1 такая, что слабое замыкание $\bigcup\limits_n \mathfrak{A}_n$ есть $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ — аппроксимативный W^*J-фактор. Пусть $\mathcal{P}^+$ $(\mathcal{P}^-)$ — все проекторы из $\mathcal{P}$, для которых подпространство pH положительно (соответственно отрицательно.) Любой проектор $p \in \mathcal{P}$ представим в виде $p = p_+ + p_-$, $p_\pm \in \mathcal{P}^\pm$.

Отображение $\mu : \mathcal{P} \to R$ назовем мерой, если $\mu(p) = \sum\limits_i \mu(p_i)$ для любого представления $p = \Sigma p_i$, где операторная сумма понимается в сильном смысле. Мера μ — индефинитна, если $\mu/\mathcal{P}+ \geqslant 0$ и $\mu/\mathcal{P}+ \leqslant 0$. Приведем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — аппроксимативный W^*J-фактор и $\mu : \mathcal{P} \to R$ — индефинитная мера. Тогда существует J-самосопряженный ядерный оператор T такой, что:* 1) *если $\mathfrak{A}$ — W^*K-фактор, то*

$$\mu(p) = \mathrm{Sp}(Tp) \quad \forall p \in \mathcal{P} \tag{1}$$

и $TJ \geqslant 0$: 2) *если $\mathfrak{A}$ — $W^*\Pi$-фактор и τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{A}$, то $\mu(p) = \mathrm{Sp}(Tp) + c\tau(p_+)$ $\forall p \in \mathcal{P}$, когда $\tau(p^+) < \infty$ либо $\mu(p) = \mathrm{Sp}(Tp) + c\tau(p_-)$, когда $\tau(p^-) < \infty$.*

Аналог этой теоремы для $B(H)$ анонсирован в [2]. Доказательство состоит из ряда этапов. (Если $\mathfrak{A}$ — $W^*\Pi$-фактор, для определенности считаем $\tau(p^+) < \infty$.) Для любого $p \in \mathcal{P}^+$ обозначим через e_p ортопроектор на подпространство p^+pH, а через $\hat{p}$ — ортопроектор на pH.

Лемма 1. *Пусть $p \in \mathcal{P}^+$ и проектор $e \in \Pi$, $e \leqslant \hat{p}$ таков, что $e\hat{p}p^+\hat{p} = \hat{p}p^+\hat{p}e$. Тогда для проекторов g, r из $\mathcal{P}^+$ на подпространства eH и $(\hat{p} - e)H$ соответственно имеем $p = g + r$, $e_p = e_g + e_r$.*

Пусть $p_n \xrightarrow{s} p$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ в сильной топологии. С помощью леммы 1 устанавливается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $(p_n) \subset \mathcal{P}^+$ и $p_n \xrightarrow{s} e \in \mathcal{P}^+$. Тогда существуют разбиения $e = e_{n_0} + e_{n_1}$ и $p_n = p_{n_0} + p_{n_1}$, где e_{n_0}, e_{n_1}, p_{n_0}, $p_{n_1} \in \mathcal{P}^+$ такие, что $\| e_{n_0} - p_{n_0} \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $p_{n_1} \xrightarrow{s} 0$, $e_{n_1} \xrightarrow{s} 0$.*

Будем писать $e \precsim p$ $(e, p \in \Pi)$, если существует частичная изометрия $v \in \mathfrak{A}$, для которой $vv^* = e$, $v^*v \leqslant p$. Проекторы $p \in \mathcal{P}^+$ и e_p изоклинны, если $\hat{p}e_p\hat{p} = \alpha\hat{p}$ и $e_p\hat{p}e_p = \alpha e_p$, где $\alpha \in (0, 1)$.

Лемма 3. *Пусть $g \in \mathcal{P}^+$ и $\hat{g} \precneqq p^- \wedge (e_g \vee \hat{g})^\perp$. Тогда существует проектор $p \in \mathcal{P}^+$ такой, что:* 1) *$p^+pH = p^+gH$, $\| e_p - p \| \leqslant \| e_g - g \|$ и проекторы p, e_p изоклинны;* 2) *в гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|_1$, порожденной новой канонической симметрией $J_1 = p_1^+ - p_1^- \in \mathfrak{A}$ та-*

кой, что $g \leqslant p_1^+$, имеем $p_1^+ pH = gH$, $\| g - p \|_1 \leqslant \| e_g - g \|$ и проекторы g, p изоклинны.

Для любого $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$ через $\mathfrak{A}(\mathfrak{N})$ обозначим наименьшую J-самосопряженную алгебру операторов, содержащую $\mathfrak{N}$.

Лемма 4. *Пусть $p \in \mathcal{P}^+$ и проекторы p, e_p изоклинны. Тогда подпространство $\mathfrak{K} = (e_p \vee \hat{p}) H$ проекционно полно и инвариантно относительно p, p^* и J. Сужение $\mathfrak{A}(e_p, p)$ на $\mathfrak{K}$ есть W^*J-фактор типа I_2.*

Заметим, что аналогичные леммы справедливы и для проекторов из множества $\mathcal{P}^-$. Рассмотрим свойства меры μ на $\mathcal{P}$. Меру, удовлетворяющую равенству (1), назовем линейной.

Лемма 5. 1). *Если $\mathfrak{A}$ — W^*K-фактор, то μ линейна на любом W^*J-факторе $B \subset \mathfrak{A}$ типа I_2,* 2) *Если $\mathfrak{A}$ — $W^*\Pi$-фактор, то существует константа c такая, что мера $\mu(p) - c\tau(p_+)$ $(\forall p \in \mathcal{P})$ линейна на любом W^*J-факторе $B \subset \mathfrak{A}$ типа I_2.*

С помощью лемм 2—5 доказывается следующая лемма.

Лемма 6. *Мера μ сильно непрерывна на $\mathcal{P}$.*

Положим $\mu'(p) \equiv 0$, если $\mathfrak{A}$ — W^*K-фактор и $\mu'(p) = c\tau(p_+)$ $\forall p \in \mathcal{P}$, если $\mathfrak{A}$ — $W^*\Pi$-фактор. Из результата [2] вытекает существование ультраслабонепрерывного линейного функционала f_n на $\mathfrak{A}_n$ такого, что $(\mu - \mu')(p) = f_n(Jp)$ $\forall p \in \mathcal{P} \cap \mathfrak{A}_n$. При этом $f_m / \mathfrak{A}_n \equiv f_n$, если $m \geqslant n$. Положим $\nu(e) = f_n(e)$ $\forall e \in \Pi \cap \mathfrak{A}_n$.

Лемма 7. *Функция ν единственным образом продолжается до вполне аддитивной ограниченной меры на решетку Π.*

Пусть $\dot{\nu}$ — продолжение ν до ультраслабонепрерывного линейного функционала на $\mathfrak{A}$. Для доказательства теоремы остается лишь показать, что $\mu(p) = \dot{\nu}(Jp) + \mu'(p)$.

Следующее предложение показывает, что с точки зрения положительных мер логика $\mathcal{P}$ близка логике $\mathcal{L}$.

Предложение 1. *Вероятностная мера $\mu : \mathcal{P} \to [0, 1]$ в W^*J-факторе $\mathfrak{A}$ линейна тогда и только тогда, когда $\mu = \tau / \mathcal{P}$, где τ — нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$.*

В классе линейных мер на $\mathcal{P}$ класс индефинитных является основным. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — W^*J-алгебра. Тогда всякая линейная мера $\mu : \mathcal{P} \to R$ — разность двух индефинитных линейных мер.*

Перейдем к общим (не обязательно индефинитным) мерам. Ограниченность меры на Π влечет ее линейность. Укажем соответствующий аналог (ограничение на порядок роста) для мер на $\mathcal{P}$.

Теорема 2. *Пусть $\mu : \mathcal{P}(B(H)) \to R$ — мера в J-пространстве H, $\dim H \geqslant 3$ и пусть существует константа a такая, что $|\mu(p)| \leqslant a \|p\|$ $\forall p \in \mathcal{P}$. Тогда существуют J-самосопряженный ядерный оператор T и константа c такие, что:* 1) *если H — пространство Крейна, то $\mu(p) = \mathrm{Sp}(Tp)$ $\forall p$;* 2) *если H — пространство Понтрягина и $\dim H_+ \leqslant \dim H_-$, то $\mu(p) = \mathrm{Sp}(Tp) + c \dim(p_+ H)$ $\forall p$ $(H_\pm = p^\pm H)$.*

Отметим, наконец, следующее. Пусть $\Gamma^\pm = \{x \in H : [x, x] = \pm 1\}$, H — вещественно и трехмерно. Любой одномерный J-проектор имеет вид $[x, x][\cdot, x]x$, где $x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Следовательно, одномерные проекторы отождествимы с векторами из верхней части гиперболоидов Γ^+ и Γ^-. В этом смысле логику $\mathcal{P}(B(H))$ можно назвать гиперболической, аналогично Π — сферическая логика. Топологически $\mathcal{P}(B(H))$ — двусвязна, Π и $\mathcal{L}$ — односвязны.

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток.— М. : Наука, 1984.— 564 с.
2. *Матвейчук М. С.* Индефинитные меры в J-пространствах // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 1.— С. 24—26.

Казан. ун-т

Получено 13.03.89