УДК 519.21

О. М. Кинаш

Одна предельная теорема для марковских процессов с конечным числом состояний

Найдено асимптотическое поведение решения уравнения многомерного восстановления, составленного для одного класса однородных марковских процессов. Дано приложение найденого результата к изучению укрупненных процессов.

Знайдено асимптотичну поведінку розв'язку рівняння багатомірного відновлення, складеного для одного класу однорідних марківських процесів. Наведено застосування знайденого результату до вивчення укрупнених процесів.

Рассмотрим для каждого $\varepsilon > 0$ однородный марковский процесс $X_\varepsilon(t)$ с конечным множеством состояний E и с переходной вероятностью $P_{ij}^{\varepsilon}(t)$ за время t, где $i, j \in E$. Пусть $X(t)$ — предельный процесс с переходной вероятностью

$$P_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} P_{ij}^{\varepsilon}(t)$$

и выполнены следующие условия:

1. Будем считать, что вероятность переходов $P_{ij}^{\varepsilon}(t)$ при $t \to 0$ представляется в виде

$$P_{ij}^{\varepsilon}(t) = \delta_{ij} + t\lambda_{ij}^{\varepsilon} + o(t),$$

где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\lambda_{ij}^{\varepsilon}$ — интенсивность перехода из состояния i в состояние j.

Обозначим $\lambda_i^{\varepsilon} = -\lambda_{ii}^{\varepsilon}$; λ_i^{ε} является параметром показательного распределения времени сидения, причем λ_i^{ε} не зависит от ε, т. е. $\lambda_i^{\varepsilon} = \lambda_i$.

2. Предположим, что для любых несовпадающих i, j

$$\lambda_{ij}^{\varepsilon} = \lambda_{ij} + \varepsilon c_{ij} + o(\varepsilon),$$

где λ_{ij} — интенсивность перехода для предельного процесса.

3. Будем считать, что множество состояний E состоит из подмножеств E_k, $k = \overline{1, r}$, таких, что $E = E_1 \cup \ldots \cup E_r$, $E_k \cap E_m = \varnothing$ при $k \neq m$ и

$$\sum_{j \in E_k} P_{ij}(t) = 1, \quad i \in E_k, \ k = \overline{1, r}.$$

Т. е. если предельный процесс попадает в одно из множеств E_k, $k = \overline{1, r}$, то он не выходит за пределы этих множеств.

4. Будем считать, что ограничение $X(t)$ на каждое из множеств E_k, $k = \overline{1, r}$, является эргодическим процессом со стационарными распределениями $\pi_i^1, \ldots, \pi_1^r$ соответственно на $E_1, \ldots, E_r$.

Зафиксируем r состояний $\mathrm{o}_1 \in E_1, \ldots, \mathrm{o}_r \in E_r$. Обозначим через τ^{ε} момент возвращения процесса $X_{\varepsilon}(t)$ в множество $\{\mathrm{o}_1, \ldots, \mathrm{o}_r\}$, т. е.

$$\tau^{\varepsilon} = \inf\{t > \mathfrak{m}^{\varepsilon} : X_{\varepsilon}(t) \in \{\mathrm{o}_1, \ldots, \mathrm{o}_r\}\},$$

где $\mathfrak{m}^{\varepsilon}$ — момент первого скачка процесса $X_{\varepsilon}(t)$, и $\tau^{\varepsilon} = +\infty$, если множество под знаком inf пусто.

Пусть $f_k^{\varepsilon}(t) = \sum_{j \in A} P_{\mathrm{o}_k j}^{\varepsilon}(t)$, $k = \overline{1, r}$, где A — некоторое подмножество из E.

Тогда по формуле полной вероятности получаем систему уравнений типа восстановления

$$f_k^{\varepsilon}(t) = \mathbf{P}_{\mathrm{o}_k}\{X_{\varepsilon}(t) \in A, \ t < \tau^{\varepsilon}\} + \int_0^t \mathbf{P}_{\mathrm{o}_k}\{\tau^{\varepsilon} \in du, \ X_{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}) = \mathrm{o}_1\} f_1^{\varepsilon}(t-u) + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^t \mathbf{P}_{\mathrm{o}_k}\{\tau^{\varepsilon} \in du, \ X_{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}) = \mathrm{o}_r\} f_r^{\varepsilon}(t-u), \ k = \overline{1, r}.$$

В компактном виде

$$\vec{f}^{\varepsilon}(t) = \vec{g}^{\varepsilon}(t) + \int_0^{\varepsilon} Q^{\varepsilon}(du) \vec{f}^{\varepsilon}(t-u),$$

где элементы матрицы $Q^{\varepsilon}(du)$ имеют вид

$$q_{ij}^{\varepsilon}(du) = \mathbf{P}_{\mathrm{o}_i}\{\tau^{\varepsilon} \in du, \ X_{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon} = \mathrm{o}_j\}, \ i, j = \overline{1, r},$$

вектор

$$g_i^{\varepsilon}(t) = \mathbf{P}_{\mathrm{o}_i}\{X_{\varepsilon}(t) \in A, \ t < \tau^{\varepsilon}\}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$

$$Q^{\varepsilon}(du) \to Q(du), \ g_i^{\varepsilon}(t) \to g_i(t), \ i = \overline{1, r}.$$

Очевидно также, что предельная матрица $Q(du)$ — диагональная, и поэтому обозначим ее так:

$$Q(du) = \operatorname{diag}\{Q_1(du), \ldots, Q_r(du)\},$$

$$m_k = \int_0^{\infty} u Q_k(du), \quad k = \overline{1, r},$$

$$M = \operatorname{diag}\{m_1, \ldots, m_r\}.$$

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения функции $\vec{f}^{\varepsilon}(t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Этим мы теперь и займемся. Но прежде сформулируем определение, необходимое в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е [1]. *Семейство* $\{g_\alpha(\cdot)\}_{\alpha\in U}$ *функций на* $[0, \infty)$ *называется равномерно непосредственно интегрируемым по Риману, если ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in[k,k+1]} |g_\alpha(x)|$$

сходится равномерно по $\alpha\in U$ *и при* $h\downarrow 0$

$$\sup_{\alpha\in U}\sum_{k=0}^{\infty} h[\sup_{x\in[kh,kh+h]} g_\alpha(x) - \inf_{x\in[kh,kh+h]} g_\alpha(x)] \to 0.$$

Заметим, что если семейство $\{q_\alpha(\cdot)\}_{\alpha\in U}$ имеет непосредственно интегрируемую мажоранту, то для равномерной непосредственной интегрируемости по Риману необходима и достаточна равностепенная непрерывность на подмножестве полной лебеговой меры в каждом из интервалов $[0, n]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Легко проверить, что функции $g_i^\varepsilon(t)$, $i=\overline{1,r}$, являются равномерно непосредственно интегрируемыми по Риману. Также легко видно, что выполняется условие

$$\sup_{\varepsilon,i,j}\int_T^\infty uQ_{i,j}^\varepsilon(du)\to 0,\ T\to\infty.$$

Покажем, что при $\varepsilon\to 0$ $Q^\varepsilon[0,\infty) = E + \varepsilon D + o(\varepsilon)$, и вычислим матрицу D.

Для состояния o_l, $l=\overline{1,r}$, по формуле Дынкина [2] имеем систему

$$\mathbf{P}_{\mathrm{o}_l} h(X_{\tau^\varepsilon}) = h(\mathrm{o}_l) + \mathbf{P}_{\mathrm{o}_l}\int_0^{\tau^\varepsilon} A_\varepsilon h(X_t)\,dt,\ l=\overline{1,r}, \tag{1}$$

где

$$A_\varepsilon h = -\lambda_i h(i) + \sum_{k\neq i}\lambda_{ik}^\varepsilon h(k),\,]$$

$$\lambda_i = \sum_{k\neq i}\lambda_{ik}. \tag{2}$$

Используя условие 2, получаем

$$A_\varepsilon h(i) = -\lambda_i h(i) + \sum_{k\neq i}\lambda_{ik}h(k) + \varepsilon\sum_{k\neq i} c_{ik}h(k) + o(\varepsilon).$$

Обозначим

$$\Lambda_i(E) = \sum_{\substack{k\in E\\ i\neq k}}\lambda_{ik},\quad h(i) = h(\mathrm{o}_l),\quad i\in E_l,\quad l=\overline{1,r}.$$

Пусть $i\in E_l$, $l=\overline{1,r}$. Тогда получаем систему

$$A_\varepsilon h(i) = -\lambda_i h(\mathrm{o}_l)\Lambda_i(E_l) + \varepsilon c_i^1 h(\mathrm{o}_1) + \ldots + \varepsilon c_i^r h(\mathrm{o}_r) + o(\varepsilon),\quad l=\overline{1,r},$$

где $c_i^m = \sum_{\substack{k\in E_m\\ k\neq i}} c_{ik}$, $m=\overline{1,r}$.

Поскольку $\lambda_{ij}=0$ при $i\in E_k$, $j\in E_m$, $k\neq m$, то, учитывая (2), имеем $\lambda_i = \Lambda_i(E_l)$ для $i\in E_l$, $l=\overline{1,r}$, и тогда

$$A_\varepsilon h(i) = \varepsilon c_i^1 h(\mathrm{o}_1) + \ldots + \varepsilon c_i^r h(\mathrm{o}_r) + o(\varepsilon).$$

Из (1) получаем

$$\mathbf{P}_{\mathrm{o}_l} h(X_{\tau^\varepsilon}) = h(\mathrm{o}_l) + \varepsilon\mathbf{P}_{\mathrm{o}_l}\int_0^{\tau^\varepsilon} c_{X_t}^1 h(\mathrm{o}_1)\,dt + \ldots + \varepsilon\mathbf{P}_{\mathrm{o}_l}\int_0^{\tau^\varepsilon} c_{X_t}^r h(\mathrm{o}_r)\,dt + o(\varepsilon),\ l=\overline{1,r}.$$

Тогда эл ементы матрицы D имеют вид

$$d_{ij} = \mathbf{P}_{o_i} \int_0^{\tau} c_{ij}(X_t)\, dt, \quad i, j = \overline{1, r},$$

где $c_{ij}(n) = \sum_{\substack{k \in E_j \\ k \neq n}} c_{nk}, \quad i, j = \overline{1, r}.$

Следуя [3], имеем

$$\sum_{k \in E_j} c_{ij}(k)\, \pi_k^j = \frac{1}{m_i} \mathbf{P}_{o_i} \int_0^{\tau} c_{ij}(X_t)\, dt. \tag{3}$$

Значит,

$$d_{ij} = m_i \sum_{k \in E_j} \pi_k^j c_{ij}(k),$$

где $m_i = \mathbf{P}_{o_i}\tau, \quad i, j = \overline{1, r}.$

Таким образом, матрица D найдена. Условия работы [4] выполнены. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{f}^{\varepsilon}(t/\varepsilon) = e^{tM^{-1}D} M^{-1} \int_0^{\infty} \vec{g}(u)\, du.$$

При умножении матриц M^{-1} и D получим матрицу D^*, элементы которой

$$d_{ij}^* = \sum_{k \in E_j} \pi_k^j c_{ij}(k), \quad i, j = \overline{1, r}. \tag{4}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1—4. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \vec{f}^{\varepsilon}(t/\varepsilon) = e^{tD^*} M^{-1} \int_0^{\infty} \vec{g}(u)\, du, \tag{5}$$

где матрица D^* определяется соотношением (4).

Построим для каждого $\varepsilon > 0$ новый процесс $\hat{X}_\varepsilon(t)$ следующим образом: $\hat{X}_\varepsilon(t) = l$, если $X_\varepsilon(t) \in E_l$, $l = \overline{1, r}$. Процесс $\hat{X}_\varepsilon(t)$, вообще говоря, немарковский. Но предельный процесс $Y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{X}_\varepsilon(t)$ будет марковским процессом с r состояниями. $Y(t)$ называется предельным укрупненным процессом. Подробно такие процессы рассматриваются в работе [5]. Обозначим переходную вероятность процесса $Y(t)$ через $T_{kl}(t)$, $k, l = \overline{1, r}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_i \{X_\varepsilon(t/\varepsilon) = j\} = T_{lk}(t)\, \pi_j^k$$

при $i \in E_l$, $j \in E_k$, *где* $\| T_{lk}(t) \|_{l,k=1}^r = e^{tD^*}$.

Доказательство. Пусть $A = \{j\}$, тогда при $i = o_l$ утверждение теоремы очевидно.

Пусть $i \neq o_l$. Тогда по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}_i \{X_\varepsilon(t) = j\} \mathbf{P}_i \{X_\varepsilon(t) = j,\ t < \tau^\varepsilon\} + \sum_{k=1}^{r} \int_0^{t} \mathbf{P}_i \{\tau^\varepsilon \in du,\ X_\varepsilon(\tau^\varepsilon) = o_k\} f_k^\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_i \{X_\varepsilon(t/\varepsilon) = j\} = \lim_{\varepsilon \to 0} f_k^\varepsilon(t/\varepsilon).$$

Тогда, используя равенства (5) и (3), легко получаем утверждение теоремы.

Следует отметить, что этот результат аналогичен лемме из работы [5, с. 180]. Метод доказательства, используемый в настоящей работе, по мнению автора, более прост.

1. *Шуренков В. М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. I // Мат. сб.— 1980.— **112**, № 1.— С. 115—132.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 460 с.
3. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 336 с.
4. *Куция П. П.* Одна теорема многомерного восстановления // Изв. АН ГССР.— 1989.— 135, № 3.— С. 463—466.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 220 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 19.02.90