УДК 532

П. И. Кудрик

Одна краевая задача для x^2-аналитических функций

Методом p-аналитических функций решена краевая задача о бесконечно малых изгибаниях односвязной поверхности вращения положительной кривизны в случае, когда на ограничивающей параллели задано кольцевое перемещение.

Методом p-аналітичних функцій розв'язана крайова задача про нескінченно малі згинання однозв'язної поверхні обертання додатної кривини у випадку, коли на обмежній паралелі задане кільцеве переміщення.

В замкнутом виде решена краевая задача для x^2-аналитических функций Положего, описывающих бесконечно малые изгибания одного класса поверхностей вращения. Обозначения и терминология соответствуют работам [1, 2].

Основная система уравнений по полю $\vec{z}$ теории бесконечно малых изгибаний произвольных регулярных поверхностей вращения имеет вид [3, с. 90]

$$\alpha_u + \rho'(u)\beta_u = 0; \quad \beta + \gamma_v = 0; \qquad (1)$$
$$\alpha_v + \rho'(u)T(\beta_v - \gamma) + \rho(u)\gamma_u = 0.$$

Здесь $\rho = \rho(u)$ — заданная функция, определяющая форму меридиана поверхности вращения; α, β, γ — искомые функции независимых переменных u, v.

Будем рассматривать лишь поверхности положительной гауссовой кривизны: $\rho\rho''(u) < 0$. Вводя в рассмотрение новые функции

$$\varphi = \alpha + \rho'\beta, \quad \psi = \gamma/\rho \qquad (2)$$

и переходя к новым независимым переменным x, y по формулам

$$x = \int \sqrt{-\frac{\rho''(u)}{\rho(u)}}\, du, \quad y = v, \qquad (3)$$

на основании (1) получаем следующую систему типа Положего [4]:

$$\varphi_x = \frac{1}{p(x)}\psi_y, \quad \varphi_y = -\frac{1}{p(x)}\psi_x, \qquad (4)$$

причем

$$\frac{1}{p(x)} = \sqrt{-\rho^3\rho''(u)}. \qquad (5)$$

Тогда каждая поверхность вращения однозначно отображается в полосу $G: -\infty < x < \infty;\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, у которой противоположные стороны $y = 0$ и $y = 2\pi$ соответствуют одному и тому же меридиану. Системы уравнений (1) и (4) равносильны. На основании (2), (1) получаем для компонент поля $\vec{z}$ выражения

$$\alpha = \varphi + \rho\rho'(u)\psi_v,\ \beta = -\rho\psi_v,\ \gamma = \rho\psi. \tag{6}$$

Для функции φ в силу (4) имеем уравнение

$$(p\varphi_x)_x + (p\varphi_y)_y = 0. \tag{7}$$

В теории деформации поверхностей и теории тонких упругих оболочек практический интерес представляет задача: найти вектор $\vec{z}$ бесконечно малых изгибаний односвязного куска поверхности Φ по заданному на ее ограничивающей параллели кольцевому перемещению. Эту задачу будем решать в предположении, что поверхность вращения имеет одну вершину и ограничена параллелью L, на которой $\gamma|_L = \gamma_0(v)$, где $\gamma_0(v)$ — периодическая функция с периодом 2π.

В качестве меридиана поверхности Φ примем одну из кривых

$$\rho(u) = \sqrt{\alpha_1(u-a)(u-b)}\ln\left(A\,\frac{u-a}{u-b}\right)^{\lambda} (\alpha_1 > 0;\ a > b;\ A > 0;$$

$$\lambda = \pm(2\alpha_1(a-b))^{-1/2});$$

$$\rho(u) = \sqrt{\beta_1(u-a)(u-b)}\ln\left(B\,\frac{u-a}{b-u}\right)^{\mu} (\beta_1 < 0;\ b < a;\ B > 0;$$

$$\mu = \pm(2\beta_1(b-a))^{-1/2}); \tag{8}$$

$$\rho(u) = \sqrt{\gamma_1(u-a)}\ln(Cu - Ca)^{\nu}\ (\gamma_1 > 0,\ C > 0;\ \nu = \pm(2\gamma_1)^{-1/2},$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a, b, A, B, C$ — произвольные действительные числа. В частности, если в первой формуле (8) положить $\alpha_1 = 4c;\ a = 0;\ b = -\frac{1}{2c};$ $A = 1;\ \ \lambda = -\frac{1}{2}$, то получим меридиан «стаканообразной» поверхности [5]

$$\rho(u) = \sqrt{4cu^2 + 2u}\ln\sqrt{\frac{2cu+1}{2cu}}\ .$$

Если в качестве меридиана поверхности вращения Φ принять кривую

$$\rho(u) = \sqrt{4{,}5u(u+1)}\ln\sqrt[3]{\frac{Au}{u+1}},\quad A \geqslant 1, \tag{9}$$

то в силу (3), (5) будем иметь равенства

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{Au}{u+1}\ ,\ \frac{1}{p(x)} = x^2, \tag{10}$$

а система (4) примет вид

$$\varphi_x = x^2\psi_y,\ \varphi_y = -x^2\psi_x. \tag{11}$$

Комплексная же функция $\Omega(\zeta) = \varphi(x;y) + i\psi(x;y);\ \zeta = x + iy$ на основании (11) является x^{-2}-аналитической функцией в соответствующей области, а функция $f(\zeta) = U + iV \equiv i\Omega = i\varphi - \psi$ будет в этой области x^2-аналитической. Для x^2-аналитических функций $f(\zeta) = U + iV$ и аналитических функций $w(\zeta) = \xi + i\eta$ справедливы следующие интегральные представления [5]:

$$f(\zeta) = \frac{\xi}{x} + i\int -x\xi_y dx + (x\xi_x - \xi)\,dy, \tag{12}$$

$$w(\zeta) = xU + i\int -xU_y dx + \frac{\partial}{\partial x}(xU)\,dy. \tag{13}$$

Найдем поле изгибания $\vec{z}$ той части поверхности Φ, для которой $0 \leqslant u \leqslant u_0 < \frac{1}{A-1}$; $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Эта поверхность имеет полюс при $u = 0$ и параллель L при $u = u_0$, на которой задано кольцевое перемещение $\gamma(u_0;\ v) = \gamma_0(v)$. Из условия непрерывности поля $\vec{z}$ в полюсе поверхности следует равенство $\gamma(0;\ v) = 0$. Рассматриваемой части Φ в плоскости Oxy соответствует область G: $-\infty < x \leqslant -c$; $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, где $c = \frac{1}{2}\left|\ln\frac{Au_0}{u_0+1}\right|$.

Таким образом, геометрической задаче соответствует следующая краевая задача: учитывая уравнение (7), найти в полубесконечной полосе G решение уравнения

$$U_{xx} + U_{yy} + \frac{2}{x}U_x = 0 \tag{14}$$

по краевым условиям

$$U(-c;\ y) = M(y);\quad U(-\infty;\ y) = 0;\quad U(x;\ y) = U(x;\ y+2\pi), \tag{15}$$

где $M(y) = -\gamma_0(v)/\rho(u_0)$.

Учитывая представление (12), уравнение (14) и условия (15) преобразуются к виду

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \tag{16}$$

$$\xi(-c;\ y) = -cM(y);\quad \xi(-\infty;\ y) = 0;\quad \xi(x;\ y) = \xi(x;\ y+2\pi). \tag{17}$$

Краевую задачу (16), (17) решаем методом разделения переменных, полагая $\xi(x;\ y) = X(x)Y(y)$. Внося это выражение в (16) и учитывая (17), получаем следующие формулы:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = m^2;\quad Y'' + m^2Y = 0;\quad Y(y) = Y(y+2\pi);$$

$$Y(y) = A_m\cos my + B_m\sin my;\quad m = k(0,\ 1,\ \ldots);$$

$$X'' - k^2X = 0;\quad X_k = a_ke^{kx} + b_ke^{-kx};\quad X_k(-\infty) = 0;$$

$$b_k = 0;\quad X_k = a_ke^{kx};\quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Следовательно, решение уравнения (16) при соблюдении (17) принимает вид

$$\xi(x;\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}(P_k\cos ky + Q_k\sin ky),$$

где

$$P_k = -\frac{c}{\pi}e^{kc}\int_0^{2\pi}M(t)\cos kt\,dt;$$

$$Q_k = -\frac{c}{\pi}e^{kc}\int_0^{2\pi}M(t)\sin kt\,dt,\quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Поэтому окончательно решение краевой задачи (16), (17) имеет вид

$$\xi(x;\ y) = -\frac{c}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}e^{k(x+c)}\int_0^{2\pi}M(t)\cos k(t-y)\,dt.$$

Теперь с помощью (12) x^2-аналитическую функцию, удовлетворяющую краевым условиям (15):

$$f(\zeta) = U + iV = -\frac{c}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{k(x+c)}}{x}\int_0^{2\pi}M(t)\cos k(t-y)\,dt +$$
$$+ i\int -x\xi_y dx + (x\xi_x - \xi)\,dy. \tag{18}$$

Так как $f(\zeta) = U + iV = i\varphi - \psi$, то с помощью формул (6) и (18) можно найти явные выражения для составляющих α, β, γ поля изгибания $\vec{z}$, однако эти выражения громоздки и мы их опускаем.

1. *Кудрик П. И.* Выбор формы меридиана оболочки вращения // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 9.— С. 9—10.
2. *Кудрик П. И.* О безмоментном состоянии многосвязных выпуклых оболочек // Прикл. математика и механика.— 1973.— 37, вып. 6.— С. 1141—1145.
3. *Кон-Фоссен С. Э.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.— М. : Физматгиз, 1959.— 303 с.
4. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций.— Киев : Наук. думка, 1973.— 423 с.
5. *Положій Г. М., Кияшко А. М.* Про застосування p-аналітичних функцій до розв'язання крайових задач безмоментної теорії оболонок // Прикл. механіка.— 1961.— 7, № 4.— С. 362—369.

Киев. ун-т

Получено 02.01.89