УДК 517.9

*И. О. Парасюк, В. И. Фущич*

# Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера

Известно, что нелинейное трехмерное уравнение Шредингера со степенной нелинейностью допускает редукцию к набору обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе исследована задача о существовании и асимптотическом поведении ограниченных на полуоси решений этих уравнений. На основе такого подхода описаны семейства решений уравнения Шредингера, обладающих разнообразными свойствами: квазипериодические, сферически симметрические, убывающие на бесконечности по пространственным переменным, неограниченно растущие во времени.

Відомо, що нелінійне тривимірне рівняння Шредінгера зі степеневою нелінійністю допускає редукцію до набору звичайних диференціальних рівнянь. У даній роботі досліджена задача про існування та асимтотичну поведінку обмежених на півосі розв'язків цих рівнянь. На основі такого підходу описані сім'ї розв'язків рівняння Шредінгера з різноманітними властивостями: квазіперіодичні, сферично симетричні, спадні на нескінченності щодо просторових змінних, необмежено зростаючі у часі.

В [1, 2] проведена редукция трехмерного нелинейного уравнения Шредингера

$$\left(i\partial/\partial t + (2m)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{3}\partial^2/\partial x_j^2 + \lambda\,|\,\Psi\,|^k\right)\right)\Psi = 0, \tag{1}$$

$$\Psi : R_t \times R_x^3 \to \mathbb{C}, \quad m > 0, \quad \lambda \in R, \quad k = 4/3,$$

к набору обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$a_2(\tau)\ddot{z}(\tau) + a_1(\tau)\dot{z}(\tau) + a_0(\tau)\,|\,z(\tau)\,|^k z(\tau) = 0, \tag{2}$$

где $z : R_\tau \to \mathbb{C}$, $a_n(\tau) = P_n(\tau)/Q_n(\tau)$, $P_n$ и $Q_n$ — полиномы второй степени, $n = 0, 1, 2$.

Явный вид анзацев, редуцирующих (1) к (2), приведен в [1, 2].

В настоящей работе на основе качественного анализа редуцированных уравнений описаны некоторые семейства ограниченных на множестве $[t_0, \infty) \times R_x^3$ решений уравнения (1) и исследованы их асимптотики.

**1.** Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-3/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau),$$

где $\tau = t^{-1}\alpha\cdot x$. Здесь и в дальнейшем $\alpha \in R^3$, $\alpha^2 = 1$, и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau = \omega_1$) имеет вид

$$\ddot{z} + a\,|\,z\,|^{4/3}z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{3}$$

Утверждение 1. *Если $a > 0$, то общее решение уравнения* (3) *является квазипериодической функцией*

$$z = Z(\nu_1\tau + \varphi_1,\ \nu_2\tau + \varphi_2), \tag{4}$$

*где $Z(\varphi_1, \varphi_2) : T^2 \to \mathbb{C}$; $T^2$ — стандартный двухмерный тор, $T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \in R^2\,|\,\mathrm{mod}\,2\pi\}$; $\nu_1$, $\nu_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ — вещественные параметры (произвольные постоянные).*

Доказательство. Уравнение (3) в координатах $q_1 = \mathrm{Re}\,z$, $q_2 = \mathrm{Im}\,z$ представляет собой лагранжеву систему с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{3a}{10}(q_1^2 + q_2^2)^{5/3},$$

описывающую движение частицы в центральном поле. Если $a > 0$, то потенциальная энергия является положительно определенной функцией. Известно (см., например, [3]), что в этом случае совместная поверхность уровня полной энергии и кинетического момента, являющихся интегралами движения, компактна и, следовательно, является двухмерным тором. Общее решение уравнения (3) является квазипериодической функцией, частоты которой $\nu_1$, $\nu_2$ можно считать независимыми параметрами.

**2**. Рассмотрим анзац «бегущая волна»

$$\Psi(t, x) = z(\alpha \cdot x - lt), \quad l \in R,$$

и редуцированное уравнение для функции $z(\tau)$ (см. (VII), (IX) в [1])

$$\ddot{z} - 2ik\dot{z} + a|z|^{4/3}z = 0, \quad k = lm, \quad a = 2\lambda m. \tag{5}$$

Утверждение 2. *Если $a > 0$, то уравнение* (5) *имеет квазипериодическое общее решение вида* (4). *Если $a < 0$, то наряду с квазипериодическими решениями вида* (4) *уравнение* (5) *имеет семейство асимптотически периодических решений вида*

$$z = r(\tau + \xi)\exp\left(i\left(k\tau + \int_0^\tau \mu r^{-2}(s + \xi)\,ds + \theta\right)\right),$$

*где* $\mu$, $\xi$, $\theta$ — *вещественные параметры, функция* $r(\tau): R \to R$ *удовлетворяет при некоторых положительных* $\gamma$, $r^*$ *оценке*

$$|r(\tau) - r^*| = O(\exp(-\gamma|\tau|)), \quad \tau \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Уравнение (5) отличается от уравнения (3) наличием «гироскопического члена» $-2ik\dot{z}$. Естественно поэтому положить $z = r\exp(i\varphi)$. Тогда для вещественных переменных $r$ и $\varphi$ получим систему

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + 2kr\dot{\varphi} + ar^{7/3} = 0, \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - 2k\dot{r} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножив второе уравнение на $r$, будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\varphi}) = k\frac{d}{d\tau}(r^2), \quad \dot{\varphi} = k + \mu r^{-2}, \tag{8}$$

где $\mu$ — произвольная постоянная.

С учетом (8) первое уравнение (7) примет вид

$$\ddot{r} - \mu^2 r^{-3} + k^2 r + ar^{7/3} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы, потенциальная энергия которой имеет вид

$$\Pi(r) = 2^{-1}(\mu^2 r^{-2} + k^2 r^2) + 3 \cdot 10^{-1} a r^{10/3}.$$

Если $a > 0$, то ситуация та же, что и в п. 1 (случай потенциальной ямы).

Если $a < 0$, то, уменьшая $\mu$, можно добиться того, чтобы график $\Pi(r)$ имел локальный минимум в точке $r_* > 0$ и локальный максимум в точке $r^* > r_*$. На фазовой плоскости $(r, \dot{r})$ линии уровня интеграла энергии $2^{-1}\dot{r}^2 + \Pi = E$ для $\Pi(r_*) < E < \Pi(r^*)$ в окрестности точки $(r_*, 0)$ замкнуты. Таким значениям соответствуют квазипериодические решения уравнения (5). Линия уровня для значения $E = \Pi(r^*)$ является петлей сепаратрисы седла $(r^*, 0)$. Ей соответствует однопараметрическое семейство решений уравнения (9) $r = r(\tau + \xi)$, удовлетворяющее оценке (6). Осталось воспользоваться формулой (7).

Замечание. Результаты данного пункта остаются справедливыми для уравнения Шредингера с нелинейностью более общего вида $\Phi(|\Psi|)\Psi$.

При этом если $\Phi(0) < 0$ и $\Phi(r)$ принимает положительные значения для достаточно больших $r$, то уравнение может иметь решения типа «уединенная бегущая волна».

3. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-3/4} z(t^{-1/2} \alpha \cdot x)$$

и редуцированное уравнение (см. (IV), (V) в [1], $\tau = \omega_1$)

$$\ddot{z} - im\tau\dot{z} - \frac{3}{2} imz + a|z|^{4/3} z, \quad a = 2\lambda m. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Уравнение* (10) *имеет семейство ограниченных на всей оси решений* $z = Z(\tau, c)$, *где* $c$ — *комплексный параметр, причем* $Z(\tau, c) = Z(-\tau, c)$ *и* $Z(\tau, c) = O(\tau^{-3/2})$ *при* $\tau \to \infty$.

Доказательство. Положим $s = 2^{-1}\tau^2$. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(-im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{3im}{4s} z + \frac{a}{2s}|z|^{4/3} z = 0.$$

Стандартной заменой убираем член с производной

$$z = v \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\int\left(im - \frac{1}{2s}\right) ds\right) = v \cdot s^{-1/4} \exp\left(\frac{ims}{2}\right). \tag{11}$$

Получим

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s} + \frac{3}{16s^2}\right) v + \frac{a}{2} s^{-4/3} |v|^{4/3} v = 0. \tag{12}$$

Исследуем соответствующее линейное уравнение ($a = 0$). Для него $s = 0$ — регулярная особая точка. Определяющее уравнение $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$ имеет два корня: $\rho_1 = 1/4$, $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения уравнения (12) при $a = 0$ существует конечный предел

$$\lim_{s \to 0} v(s) s^{-1/4} < \infty. \tag{13}$$

Исследуем поведение решений при $s \to \infty$. Для корней уравнения

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}\right) = 0$$

справедливо асимптотическое разложение

$$\rho_{\pm}(s) = \pm i \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}} = \pm\left(\frac{im}{2} + \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right).$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\rho_1(s) - \rho_2(s)) \neq 0$, то уравнение (12) при $a = 0$ имеет фундаментальную систему решений $v_+(s)$, $v_-(s)$, вронскиан которых равен 1 и для которых имеет место асимптотика [4]

$$v_{\pm}(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s} \rho_{\pm}(s_1)\, ds_1\right) (c_{\pm} + o(1)) = O(s^{\pm 1/2}). \tag{14}$$

Кроме того, для этих решений выполнено условие (13).

Теперь задача об ограниченных на $[0, \infty)$ решениях уравнения (12) стандартным образом с помощью метода вариации произвольных постоянных сводится к интегральному уравнению

$$v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_1^s v_+(\theta)\, \theta^{-4/3} |v(\theta)|^{4/3} v(\theta)\, d\theta\right) +$$

$$+ \frac{a}{2} v_+(s) \int_s^{\infty} v_-(\theta)\, \theta^{-4/3} |v(\theta)|^{4/3} v(\theta)\, d\theta \overset{\text{def}}{=} A[v], \tag{15}$$

где $c$ — комплексный параметр.

Нетрудно показать, что оператор $A$ на полном метрическом пространстве $B_K$ непрерывных функций $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)}|f(s)-g(s)|$ и таких, что

$$|f(s)|\leqslant\begin{cases}Ks^{1/4}, & s\in[0,1];\\ Ks^{-1/2}, & s\in[1,\infty)\end{cases} \tag{16}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и $K>0$, является оператором сжатия. Действительно, условия (13), (14) гарантируют существование константы $K_1 > 0$, не зависящей от $c$ и $K$, такой, что

$$|A[f]|\leqslant\begin{cases}K_1(|c|+K^{7/3})s^{1/4}, & s\in[0,1];\\ K_1(|c|+K^{7/3})s^{-1/2}, & s\in(1,\infty],\end{cases}$$

$$\rho(A[f],\ A[g])\leqslant K_1K^{4/3}\rho(f,g),$$

если $f, g\in B_k$. Теперь ясно, что уменьшением $|c|$ и $K$ можно добиться выполнения условий сжатия:

$$K_1(|c|+K^{7/3})\leqslant K,\quad K_1K^{4/3}<1.$$

Отсюда следует, что уравнение (16) для всех достаточно малых $c$ имеет решение $v(s,c)$, удовлетворяющее условию (13) и имеющее асимптотику $v(s,c) = O(s^{-1/2})$ при $s\to\infty$. Осталось подставить это решение в формулу (11).

4. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=t^{-3/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z\left(\frac{x^2}{t^2}\right)$$

и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau=\omega_2$)

$$\ddot{z}+\frac{3}{2\tau}\dot{z}+\frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z=0,\quad a=\frac{\lambda m}{2}. \tag{17}$$

Утверждение 4. *Если $a>0$, то уравнение* (17) *имеет семейство решений вида $z=\exp(i\theta)\,r(\tau,c)$, где $\theta$, $c$ — вещественные параметры, а $r(\tau,c)$ при фиксированном $c$ является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$ функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to0}\ddot{r}(\tau,c)\cdot\tau<\infty,\quad r(\tau,c)=O(\tau^{-3/10})\ \text{при}\ \tau\to\infty.$$

Замечание 1. В силу первого условия анзац является классическим решением уравнения (1) в области $(0,\infty)\times R^3_x$.

Доказательство. Положим $z=\exp(i\theta)\,r$, где $\theta\in R$ — параметр, а $r=r(\tau)$ — вещественное решение уравнения

$$\ddot{r}+\frac{3}{2\tau}\dot{r}+\frac{a}{\tau}r^{7/3}=0. \tag{18}$$

Выполняя затем подстановку $r=\tau^{-1/2}p$, получаем

$$\ddot{p}+\frac{1}{2\tau}\dot{p}+a\tau^{-5/3}p^{7/3}=0.$$

Производная функции

$$V(\tau,p,\dot{p})=2^{-1}(\dot{p})^2+3\cdot10^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3}$$

в силу этого уравнения удовлетворяет оценке

$$\dot{V}=-\tau^{-1}(2^{-1}(\dot{p})^2+2^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3})\leqslant-\tau^{-1}V.$$

Значит, $V(\tau,p(\tau),\dot{p}(\tau))=O(\tau^{-1})$, а тогда $p^{10/3}(\tau)=O(\tau^{2/3})$, $p(\tau)=O(\tau^{1/5})$, и, следовательно, $r(\tau)=O(\tau^{-3/10})$ для любого решения (18).

Покажем теперь, что уравнение (18) имеет однопараметрическое семейство решений $r(\tau, c)$, для которых существует конечный предел $\lim_{\tau\to+0} r(\tau, c) < \infty$.

Положим $\tau = e^{-s}$. Уравнение (18) примет вид

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dr}{ds} + ae^{-s}r^{7/3} = 0. \tag{19}$$

Это уравнение имеет для любого достаточно малого $c$ решение с асимптотикой [5]

$$r = \tilde{r}(s, c) = c + o(1), \quad s \to \infty.$$

Положим $r(\tau, c) = \tilde{r}(-\ln\tau, c)$. При фиксированном $c$ эта функция непрерывна и ограничена по $\tau$ на полуоси $[0, \infty)$. Так как для $\tau > 0$ она удовлетворяет уравнению (17), то справедливо представление

$$\dot{r}(\tau, c) = -a\tau^{-3/2}\int_0^\tau \tau_1^{1/2} r^{7/3}(\tau_1, c)\, d\tau_1.$$

Из этой формулы легко выводятся требуемые свойства функции $r(\tau, c)$.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что если $a < 0$, то уравнение (17) имеет семейство решений с асимптотикой $O(\tau^{-3/4})$, $\tau \to \infty$. Однако любое такое решение имеет особенность при $\tau = 0$ типа $\tau^{-3/4}$.

5. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-3/4} z(x^2 t^{-1})$$

и редуцированное уравнение (см. (VI) [1], $\tau = \omega_2$)

$$\ddot{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\tau} - im\right)\dot{z} - \frac{3im}{8\tau} z + \frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z = 0, \quad a = \frac{\lambda m}{2}. \tag{20}$$

У т в е р ж д е н и е 5. *Уравнение* (20) *имеет семейство решений* $z = Z(\tau, c)$, *где* $c$ — *комплексный параметр, а* $Z(\tau, c)$ *при фиксированном* $c$ *является ограниченной на полуоси* $[0, \infty)$ *функцией класса* $C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$ *и удовлетворяет условию* $\lim_{\tau\to 0} \ddot{Z}(\tau, c)\tau < \infty$ *и* $Z(\tau, c) = O(\tau^{-3/4})$ *при* $\tau \to \infty$ (*см. замечание* 1 *п.* 4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя

$$z = \exp\left(-\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{\tau} - im\right)d\tau\right)v = \exp\left(\frac{im\tau}{4}\right)\tau^{-3/4}v$$

в уравнение (20), имеем

$$\ddot{v} + \left(\frac{m^2}{16} + \frac{3}{16\tau^2}\right)v + \frac{a}{\tau^2}|v|^{4/3}v = 0. \tag{21}$$

Любое решение этого уравнения, для которого $v(\tau_0)$ достаточно мало, где $\tau_0 > 0$, ограничено на полуоси $[\tau_0, \infty)$. Значит, малые решения уравнения (20) имеют асимптотику $O(\tau^{-3/4})$ при $\tau \to \infty$. Теперь нужно среди таких решений выбрать семейство решений, остающихся ограниченными при подходе к точке $\tau = 0$. После подстановки $\tau = e^{-s}$ доказательство существования этого семейства проводится аналогично п. 4.

З а м е ч а н и е. Утверждение остается в силе на полуоси $(-\infty, 0]$.

6. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = (1 - t^2)^{-3/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1 - t^2}\right) z\left(\frac{x^2}{1 - t^2}\right)$$

и соответствующее редуцированное уравнение (см. (I) в [1], $\tau = \omega_2$)

$$\ddot{z} + \frac{3}{2\tau}\dot{z} + \frac{m^2}{4}z + \frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z = 0, \quad a = \frac{\lambda m}{2}. \tag{22}$$

Утверждение 6. *Уравнение* (22) *имеет семейство решений* $z = Z(\tau, c)$, *где* $c$ — *комплексный параметр, а функция* $Z(\tau, c)$ *обладает свойствами, указанными в утверждении* 5.

Доказательство. Выполним подстановку $z = \tau^{-3/4}v$. Уравнение для $v$ имеет вид

$$\ddot{v} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{3}{16\tau^2}\right) v + \frac{a}{\tau^2} |v|^{4/3} v = 0. \tag{23}$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в п. 5.

Для интерпретации результата данного пункта нам понадобится следующее его уточнение: для любого $\delta > 0$ можно указать такое $c_0(\delta) > 0$, что если $|c| < c_0(\delta)$, то

$$|Z(\tau, c)| \leqslant \delta \min(1, \tau^{-3/4}) \quad \forall \tau \in [0, \infty). \tag{24}$$

Это уточнение легко получается из теорем [5], использованных в пп. 4, 5.

7. В заключение отметим, что рассмотренные выше решения моделируют процессы самоорганизации в системе, описываемой уравнением (1). Например, рассмотрим решение, получаемое в соответствии с утверждением 6. Покажем, что равномерно малое в момент $t = 0$ решение п. 6 при $t \to 1$ локализуется в окрестности точки $x = 0$, причем в самой точке оно неограниченно растет.

Действительно, в соответствии с оценкой (24), если $|c| < c_0(\delta)$, то в начальный момент $t = 0$ имеем

$$|\Psi(0, x)| \leqslant \delta \min(1, \|x\|^{-3/2}), \quad \|x\| = \sqrt{x^2}.$$

Для $0 < t < 1$ в силу (24) получаем

$$|\Psi(t, x)| \leqslant \delta (1 - t^2)^{-3/4} \min(1, (1 - t^2)^{3/4} \|x\|^{-3/2}) \tag{25}$$

и

$$|\Psi(t, 0)| = (1 - t^2)^{-3/4} |\Psi(0, 0)|. \tag{26}$$

Из (25) получаем оценку

$$|\Psi(t, x)| \leqslant \delta \|x\|^{-3/2},$$

а из (26) следует неограниченный рост решения в точке $x = 0$ при $t \to 1$. Таким образом, рассмотренное решение моделирует характерный режим с обострением [6]. Аналогичное поведение демонстрируют решения пп. 4, 5 при $t \to t_*$, если предварительно преобразовать $t \to t - t_*$.


1. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phys. A : Math. and Gen.— 1987.— **20**.— P. 929—933.
2. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 335 с.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1974.— 432 с.
4. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 216 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
6. *Режимы* с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов.— М. : Наука, 1987.— 480 с.


Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.01.90