УДК 517.5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

We study approximations of functions from the sets $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, which are determined by convolutions of the following form:

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\hat{\psi}_{\beta}(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \quad \hat{\psi}_{\beta} \in L(-\infty, \infty),$$

where $\mathfrak{N}$ is a fixed subset of functions with locally integrable p-th powers $(p \geq 1)$. As an approximating aggregate, we use so-called Fourier operators, which are entire functions of the exponential type $\leq \sigma$ that turn into trigonometric polynomials if the function $\varphi(\cdot)$ is periodic (in particular, they may be the Fourier sums of the function approximated). Approximations are studied in the spaces $\hat{L}_p$ determined by a locally integrable norm $\|\cdot\|_{\hat{p}}$. Analogs of the Lebesgue and Favard inequalities, well-known in the periodic case, are obtained and used for finding order-exact estimates of the corresponding best approximations and estimates of approximations by Fourier operators, which are order-exact and, in some important cases, they are also exact in the sense of constants with principal terms of these estimates.

Вивчаються наближення функцій із множин $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, що задаються згортками вигляду

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\hat{\psi}_{\beta}(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \quad \hat{\psi}_{\beta} \in L(-\infty, \infty),$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксована підмножина локально інтегровних в p-му $(p \geq 1)$ степені функцій. Як наближаючі агрегати використовуються так звані оператори Фур'є — цілі функції експоненціального типу $\leq \sigma$, котрі у випадку періодичності функцій $\varphi(\cdot)$ є тригонометричними поліномами порядку $\leq \sigma$ (і, зокрема, можуть бути сумами Фур'є функції, яку наближають). Наближення досліджуються в просторах $\hat{L}_p$, що визначаються локальною інтегральною нормою $\|\cdot\|_{\hat{p}}$. Встановлюються аналоги відомих в періодичному випадку нерівностей Лебега та Фавара, і на їх основі знайдені точні за порядком оцінки відповідних найкращих наближень, а також наближень операторами Фур'є, які є точними за порядком, а в деяких важливих випадках є точними і в розумінні констант біля головних членів цих оцінок.

В качестве приближающих агрегатов для периодических функций, как правило, используются тригонометрические полиномы заданной степени n и, в частности, полиномы, порождающиеся с помощью линейных операторов — хорошо известных линейных процессов суммирования рядов Фурье. Наибольшее внимание при этом, конечно, уделяется оператору Фурье, сопоставляющему каждой функции последовательность ее частных сумм Фурье.

Для приближения функций, заданных на всей оси и не обязательно периодических, естественным аппаратом приближения являются целые функции экспоненциального типа $\leq \sigma$. Множество таких функций обозначается через $\mathfrak{E}_{\sigma}$. Тригонометрические полиномы порядка n, как хорошо известно, принадлежат к $\mathfrak{E}_n$.

Начало современной теории приближения целыми функциями положено в известных работах С. Н. Бернштейна, относящихся к началу века. Именно С. Н. Бернштейну принадлежит идея построения теории приближения функций, заданных на всей оси, которая включала бы теорию приближения периодических функций. Эта идея оказалась чрезвычайно важной для обеих теорий — на протяжении последних десятилетий они успешно развиваются параллельно, взаимно дополняя и обогащая друг друга.

Настоящая работа также находится в русле этой концепции. Здесь рассматриваются пространства $\hat{L}_p$ локально интегрируемых функций, включающие в себя пространства L_p 2π-периодических функций. Рассматриваются классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функций, заданных на всей оси, содержащие в себе классы периодических функций $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, введенные автором ранее; в пространстве $\hat{L}_1$ определяются операторы Фурье — аналоги операторов, сопоставляющие каждой функции из L_1 ее частную сумму Фурье, изучаются уклонения таких операторов на классах $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и, в частности, находятся аналоги известных в периодическом случае неравенств Лебега и Фавара.

1. Постановка задачи и общие утверждения. Пусть L_p, $p \geq 1$, — множество 2π-периодических функций $\varphi(\cdot)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_0^{\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{1}$$

и $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \operatorname{essup} |\varphi(t)|$, так что по определению $L_\infty = M$.

Пусть, далее, $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, — множество функций $\varphi(\cdot)$, заданных на действительной оси $\mathbb{R}$ (не обязательно периодических) и имеющих конечную норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, где

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \tag{1'}$$

если $p \in [1, \infty)$, и $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \operatorname*{essup}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

Ясно, что при всех $p \geq 1$ всегда справедливо включение $L_p \subset L_{\hat{p}}$. Пусть теперь $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 0$ и β — фиксированное число, для которых почти при всех $t \in R$ существует преобразование

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv. \tag{2}$$

Тогда через $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ обозначим множество функций $f \in \hat{L}_1$, которые почти при всех x представляются равенствами

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \hat{\psi}_\beta(t)\, dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \tag{3}$$

в которых A_0 — некоторая постоянная и $\varphi \in \hat{L}_1$, а интеграл понимается как предел интегралов по симметричним расширяющимся промежуткам. Если $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и при этом $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\hat{L}_1$, то полагаем $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Подмножества непрерывных функций из $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаются соответственно через $\hat{C}^{\psi}_{\beta}$ и $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функция $\varphi(\cdot)$ в представлении (3) обозначается через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ и называется (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$.

Такие классы функций введены автором в [1 – 4]. В этих работах установлен ряд их структурных и аппроксимативных свойств и, в частности, найдена связь между множествами $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и множествами периодических функций $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, которые были введены ранее (см., например, [5]) следующим образом.

Для данных функции $\varphi(\cdot)$ и чисел β через L^{ψ}_{β} обозначим множество суммируемых 2π-периодических функций $f(x)$ с рядом Фурье

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

при условии, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции f^{ψ}_{β}, которую называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ и $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L_1, то полагаем $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$; подмножества непрерывных функций из L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаем через C^{ψ}_{β} и $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Упомянутая связь устанавливается в следующем утверждении [2, с. 103].

Предложение 1. *Пусть функция $\psi(v)$ — непрерывная при всех $v \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и преобразование $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t, \beta)$ вида (2) суммируемо на всей оси ($\hat{\psi} \in L(R)$):*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)|\, dt = K < \infty. \tag{4}$$

Тогда

$$\hat{L}^{\psi}_{\beta} L^{0}_{1} = L^{\psi}_{\beta}, \tag{5}$$

где L^{0}_{1} — подмножество функций $\varphi(\cdot)$ из L_1, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0,$$

т. е. $\varphi \perp 1$ *и, стало быть, если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L^{0}_{1}, то*

$$\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}, \quad \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}. \tag{5'}$$

Таким образом, в силу (5′), всякое утверждение, доказанное для классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, при выполнении условия (4) автоматически распространяется и на классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ при $\mathfrak{N} \subset L^{0}_{1}$.

Оператором Фурье порядка (σ, c), $\sigma > c > 0$, условимся называть всякий оператор $A_{\sigma,c}$, действующий из некоторого пространства $L^{*} \subset \hat{L}_1$ в пространство $\mathfrak{E}_{\sigma}$, если каждой периодической функции $f \in \hat{L}$ он сопоставляет тригонометрический полином $t_n(\cdot)$ степени $\leq (\sigma)$, где

$$(\sigma) = \begin{cases} [\sigma], & \sigma > [\sigma], \\ \sigma - 1, & \sigma = [\sigma], \end{cases} \tag{6}$$

$[\sigma]$ — целая часть числа σ, у которого коэффициенты с номерами $\leq c$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Из этого определения, в частности, следует, что $\forall f \in L_1$

$$A_{\sigma,(\sigma)}(f) \equiv S_{(\sigma)}(f), \tag{7}$$

где $S_n(f)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(\cdot)$.

Будем рассматривать приближения функций $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ операторами вида

$$F_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t,\beta)\,dt, \tag{8}$$

$$F^{*}_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda^{*}_{\sigma,c}}\right)(t,\beta)\,dt, \tag{8'}$$

где $\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t,\beta)$ и $\left(\widehat{\psi\lambda^{*}_{\sigma,c}}\right)(t,\beta)$ — преобразования вида (2) произведений $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$ и $\psi(v)\lambda^{*}_{\sigma,c}(v)$ соответственно, в которых

$$\lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c, \\ (\sigma - v)(\sigma - c)^{-1}, & c \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma, \end{cases} \tag{9}$$

$$\lambda^{*}_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}(v), & v \in [0,c] \cup [\sigma,\infty], \\ 1 - \dfrac{v-c}{\sigma-c}\dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & c < v \le \sigma. \end{cases} \tag{9'}$$

Такие операторы рассматривались автором в [1–3]. Сформулируем доказанные в этих работах и нужные нам в дальнейшем факты, из которых, в частности, будет видно, в каких случаях эти операторы являются операторами Фурье.

Предложение 2. *Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \ge 0$, ее преобразование $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t,\beta)$ суммируемо на $\mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$, тогда* [2, с. 109, 100]:

1) $\forall\, \sigma > 0$ *и* $\forall\, c \in [0,\sigma]$ *в каждой точке x выполняется равенство*

$$\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(x,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_{\beta}(v+x)\,\hat{\lambda}_{\sigma,c}(v,0)\,dv \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\hat{\psi}_{\beta} * \hat{\lambda}_{\sigma,c}\right)(x), \tag{10}$$

вследствие которого $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$

$$F_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \left(f^{\psi}_{\beta} * \left(\hat{\psi}_{\beta} * \hat{\lambda}_{\sigma,c}(\cdot,0)\right)\right)(x); \tag{11}$$

2) *если W^2_{σ} — множество целых функций $\varphi(\cdot)$ экспоненциального типа $\le \sigma$, удовлетворяющих условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(x)|^2}{(1+|x|)^2}\,dx < \infty, \tag{12}$$

и $f(x)$ такова, что $f^{\psi}_{\beta} \in W^2_{\tau}$, то $\forall\, \tau \le c < \sigma$ в каждой точке x

$$F_{\sigma,c}(f;x) = f(x), \quad F^{*}_{\sigma,c}(f;x) = f(x). \tag{13}$$

В частности, эти равенства выполняются, если $f(x)$ — тригонометрический полином порядка $n \le c$ [2, с. 109];

3) *если $f \in L^{\psi}_{\beta}$, то $\forall\, c < \sigma$*

$$F_{\sigma,c}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k<\sigma} \lambda_{\sigma,c}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{14}$$

$$F^*_{\sigma,c}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k<\sigma} \lambda^*_{\sigma,c}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{14'}$$

где a_0, a_k и b_k, $k = 1, 2, \dots$, *— коэффициенты Фурье функции* $f(\cdot)$. *В частности, если* $n \in N$ *и* $c \in [n-1, n)$, *то*

$$F_{n,c}(f;x) = F^*_{n,c}(f;x) = S_{n-1}(f;x); \tag{14''}$$

4) *если* $\psi(v)$ *— абсолютно непрерывна при всех* $v \ge 0$, $\psi(0)\sin(\beta\pi/2) = 0$ *и* $\forall\, a > 0$ $\psi' \in L_2(0,a)$:

$$\int_0^a |\psi'|^2 dt \le K < \infty, \tag{15}$$

то $\forall\, f \in \hat{L}^\psi_\beta$ *при условии*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f^\psi_\beta(x)}{1+|x|} \right)^2 dx \le K < \infty \tag{16}$$

$\forall\, \sigma > c > 0$ *справедливы включения* $F_{\sigma,c}(f;\cdot) \in W^2_\sigma$ и $F^*_{\sigma,c}(f;\cdot) \in W^2_\sigma$.

В настоящей работе исследуются величины

$$\left\| \rho_{\sigma,c}(f;x) \right\|_{\hat{p}} \text{ и } \left\| \rho^*_{\sigma,c}(f;x) \right\|_{\hat{p}}, \tag{17}$$

где $\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - F_{\sigma,c}(f;x)$ и $\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - F^*_{\sigma,c}(f;x)$, когда $f \in \hat{L}^\psi_\beta \hat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$, $\beta \in \mathbb{R}$, и $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \ge 0$ и удовлетворяющая условию (4). В этих предположениях величины (17) корректно определены, поскольку $\hat{L}^\psi_\beta \hat{L}_p \subset \hat{L}_p$. Действительно, если $f \in \hat{L}^\psi_\beta \hat{L}_p$, то $f^\psi_\beta \in \hat{L}_p$. Поэтому, применяя неравенство Минковского, имеем

$$\| f \|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_a^{a+2\pi} \left| A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\, \hat{\psi}_\beta(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2\pi |A_0| + \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+a+t)\, \hat{\psi}_\beta(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2\pi |A_0| + \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} | f^\psi_\beta(x+a+t)|^p |\psi_\beta(t)|^p dx \right)^{1/p} dt \le$$

$$\le 2\pi |A_0| + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\beta(t)| \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} | f^\psi_\beta(x+a+t)|^p dx \right)^{1/p} dt =$$

$$= 2\pi |A_0| + \| f^\psi_\beta \|_{\hat{p}} K,$$

т. е. $f \in \hat{L}_p$, что и доказывает нужное включение.

Операторы $F_{\sigma,c}(f;x)$ и $F^*_{\sigma,c}(f;x)$, а значит, и величины $\rho_{\sigma,c}(f;x)$ и $\rho^*_{\sigma,c}(f;x)$ отличаются на величину

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = F_{\sigma,c}(f;x) - F^*_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\, \hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\, dt, \tag{18}$$

где

$$\hat{\delta}_{\sigma,c}(t) = \delta_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{(\sigma-c)\pi}\int_c^\sigma (v-c)(\psi(v)-\psi(\sigma))\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{19}$$

В принятых в настоящей работе условиях относительно функций $\psi(\cdot)$, в случае, когда $f(\cdot)$ — 2π-периодическая функция, величина $\Delta_{\sigma,c}(f;x)$ представляет собой сумму гармоник ее ряда Фурье с номерами $k\in(c;\sigma)$, взятых с определенными коэффициентами. Стало быть, если в промежутке $(c;\sigma)$ целые числа отсутствуют, то $\Delta_{\sigma,c}(f;x)\equiv 0$ и тогда операторы $F_{\sigma,c}(f;x)$ и $F^*_{\sigma,c}(f;x)$ тождественно равны и совпадают с частными суммами порядка (σ) ряда $S[f]$. В общем случае $\Delta_{\sigma,c}(f;x)$ — целая функция экспоненциального типа $\le\sigma$. Точнее, справедливо следующее утверждение [2, с. 110, 111].

Предложение 3. *Пусть* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тогда если функции* $\psi(\cdot)$ и $f(\cdot)$ *удовлетворяют требованиям п. 4 предложения 2, то* $\Delta_{\sigma,c}(f;x)$ — *целая функция экспоненциального типа* $\le\sigma$. *Если же выполнены условия 3 предложения 2, то* $\forall\,\tau\le c<\sigma$ *справедливо тождество* $\Delta_{\sigma,c}(F;x)\equiv 0$.

Последний факт позволяет получить для величины $\Delta_{\sigma,c}(F;x)$ следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть* $\psi(v)$ — *функция, непрерывная при всех* $v\ge 0$, *удовлетворяющая условию* (4). *Тогда для любых* $\sigma>0$, $0\le c<\sigma$, $\forall f\in\hat{L}^\psi_\beta\hat{L}_p$, $p\in[1,\infty]$, *и* $\forall\,\beta\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$\|\Delta_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} \le E_c(f^\psi_\beta)_{\hat{p}}\,\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\|_1, \tag{20}$$

в котором

$$E_\tau(h)_{\hat{p}} = \inf_{\varphi\in W^2_\tau}\|h(t)-\varphi(t)\|_{\hat{p}} \tag{21}$$

и $\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\delta}_{\sigma,c}|\,dt.$

Действительно, пусть $\varphi(\cdot)$ — любая функция из W^2_c и $h(v) = f^\psi_\beta(v) - \varphi(v)$. Тогда

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty}(f^\psi_\beta(x+t)-\varphi(x+t))\,\hat{\delta}^{(t)}_{\sigma,c}\,dt.$$

Поэтому, применяя неравенства Минковского, получаем

$$\|\Delta_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int_a^{a+2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(x+t)\,\hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\delta}_{\sigma,c}|\sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|h(x+a+t)|^p\,dx\right)^{1/p}dt = \|h\|_{\hat{p}}\,\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\|_1. \tag{22}$$

Отсюда, рассматривая нижнюю грань при $\varphi\in W^2_c$, получаем оценку (20).

Теперь получим оценку, аналогичную оценке (20) для величины $\|\rho^*_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}$. Принимая во внимание равенства (3), (8′) и (9′), видим, что $\forall f\in\hat{L}^\psi_\beta\hat{L}_p$

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\,\hat{r}^c_{\sigma}(t)\,dt, \tag{23}$$

где

$$\hat{r}^c_{\sigma}(t) = \hat{r}^c_{\sigma}(t,\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} r^c_{\sigma}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv, \tag{24}$$

$$r^c_{\sigma}(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c, \\ (v-c)(\sigma-c)^{-1}\psi(\sigma), & c < v \le \sigma, \\ \psi(v), & v \ge \sigma. \end{cases} \tag{25}$$

Учитывая утверждение п. 2 предложения 2, видим, что $\forall\ \varphi \in W^2_{\tau}$, при $\tau \le \le c < \sigma$,

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\hat{r}^c_{\sigma}(t)\,dt \equiv 0. \tag{26}$$

Действительно, $J(x)$ представляет собой величину $\Phi(x) - F^*_{\sigma,c}(\Phi;x)$, где $\Phi(\cdot)$ — функция, (ψ,β)-производная которой есть $\varphi(\cdot)$, и, так как $\varphi \in W^2_{\tau}$, согласно (13) $F^*_{\sigma,c}(\Phi;x) \equiv \Phi(x)$ и, значит, (26) имеет место.

Таким образом, функция $\hat{r}^c_{\sigma}$ ортогональна всем сдвижкам любой функции из W^2_{τ}. Поэтому, полагая $f^{\psi}_{\beta}(v) - \varphi(v) = h(v)$, $\forall\ \varphi \in W^2_{\tau}$, согласно (23) и (26) находим

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\,\hat{r}^c_{\sigma}(t)\,dt. \tag{27}$$

Отсюда, поступая так же, как и при получении оценки (22), получаем

$$\left\|\rho^*_{\sigma,c}(f;x)\right\|_{\hat{p}} = \|h\|_{\hat{p}}\,\left\|\hat{r}^c_{\sigma}\right\|_1, \tag{28}$$

и, рассматривая нижнюю грань при $\varphi \in W^2_c$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть* $\psi(v)$ *— функция, непрерывная при всех* $v \ge 0$, *удовлетворяющая условию* (4). *Тогда для любых* $\sigma > 0$, $0 \le c < \sigma$, $\forall\ f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, $p \in \in [1,\infty]$, *и* $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho^*_{\sigma,c}(f;x)\right\|_{\hat{p}} \le E_c(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}\,\left\|\hat{r}^c_{\sigma}(t;\beta)\right\|_1, \tag{29}$$

в котором величина $E_c(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}$ *определяется равенством* (21), *а*

$$\left\|\hat{r}^c_{\sigma}(t;\beta)\right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{r}^c_{\sigma}(t;\beta)\right|dt, \tag{30}$$

функция $\hat{r}^c_{\sigma}(\cdot)$ *определяется равенством* (24).

Неравенство (29) естественно назвать неравенством Лебега для операторов Фурье, поскольку, как увидим в дальнейшем, в периодическом случае оно переходит в классическое неравенство Лебега для сумм Фурье.

Получим теперь для операторов Фурье аналог известного неравенства Фавара. С этой целью воспользуемся операторами $F_{\sigma,c}(f;x)$ и проведем оценку сверху величины $\left\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\right\|_{\hat{p}}$.

Пусть $\lambda_{\sigma,c}(v)$ — функция, определенная соотношением (9), и

$$\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}(t) = \hat{\lambda}_{\sigma,c}(t,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_{\sigma,c}(v)\cos vt\,dv = \frac{\cos ct-\cos\sigma t}{\pi(\sigma-c)t^2}. \tag{31}$$

Тогда $\forall\ \varphi\in\hat{L}_1$ положим

$$S_{\sigma,c}(\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\,\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}(t)\,dt = \left(\varphi*\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}\right)(x). \tag{32}$$

Пусть, далее, $f\in\hat{L}_\beta^\psi L_p$ и $\psi(v)$ удовлетворяет всем требованиям предложения 2. Рассмотрим свертку

$$\left(\left(f_\beta^\psi-S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi;\cdot)\right)*\hat{\psi}_\beta\right)(x) = \left(f_\beta^\psi*\hat{\psi}_\beta\right)(x)-\left(S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi;\cdot)*\hat{\psi}_\beta\right)(x) =$$

$$= f(x)-A_0-\left(\left(f_\beta^\psi*\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}\right)*\hat{\psi}_\beta\right)(x). \tag{33}$$

Но в силу (10) $\left(\hat{\psi}_\beta*\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}\right)(x) = \left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t,\beta)$, поэтому (необходимая замена порядка интегрирования легко обосновывается с учетом равенства (31)) согласно (11)

$$\left(\left(f_\beta^\psi*\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}\right)*\hat{\psi}_\beta\right)(x) = \left(f_\beta^\psi*\left(\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)}*\hat{\psi}_\beta\right)\right)(x) = F_{\sigma,c}(f;x)-A_0$$

и, таким образом, вследствие (33) имеем

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty}H(x+t)\,\hat{\psi}(t;\beta)\,dt, \tag{34}$$

где

$$H(v) = f_\beta^\psi(v)-S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi;v). \tag{35}$$

Операторы $S_{\sigma,c}(\varphi)$ рассматривались Н. И. Ахиезером в [6, с. 255], где установлены следующие их свойства:

1) если

$$\varphi\in W^1 = \left\{\varphi\colon\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{1+|x|}\,dx\le K_1\right\}$$

или

$$\varphi\in W^2 = \left\{\varphi\colon\ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{1+|x|}\right]^2dx\le K_2\right\},$$

то $S_{\sigma,c}(\varphi;\cdot)\in W_\sigma^2$;

2) если $\varphi\in W_\tau^2$ при $\tau\le c$, то $S_{\sigma,\tau}(\varphi;x)\equiv\varphi(x)$;

3) если $\varphi(x)$ — интегрируемая функция с периодом 2π и

$$S[\varphi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ikx}$$

— ее ряд Фурье, то

$$S_{\sigma,\tau}(\varphi;x) = \sum_{|k|<\sigma}\lambda\left(\frac{k}{\tau}\right)C_k e^{ikx}.$$

В частности, если n — натуральное число, то

$$S_{n,n-1}(\varphi; x) = \sum_{|k| \le n-1} C_k e^{ikx} = S_{n-1}(\varphi; x).$$

Пусть теперь $u(x)$ — произвольная функция из $W_c^2 \cap L_1(R)$ и $f_\beta^\psi \in \hat{L}_p$. Учитывая соотношения (31) и (32), получаем

$$\left(S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi; \cdot) * u \right)(x) = \left(\left(f_\beta^\psi * \hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)} \right) * u \right)(x) =$$

$$= \left(f_\beta^\psi * \left(\hat{\lambda}_{\sigma,c}^{(0)} * u \right) \right)(x) = \left(f_\beta^\psi * S_{\sigma,c}(u; \cdot) \right)(x).$$

Но в силу свойства 2 операторов $S_{\sigma,c}(\cdot; \cdot)$ $S_{\sigma,c}(u; t) = u(t)$, поэтому

$$\left(S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi; \cdot) * u \right)(x) = \left(f_\beta^\psi * u \right)(x)$$

и тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x+t) u(t) dt = \left(f_\beta^\psi * u \right)(x) - \left(S_{\sigma,c}(f_\beta \quad * u \right)(x) \equiv 0.$$

Стало быть, в этом случае равенство (34) может принять в

$$\rho_{\sigma,c}(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x+t) \left(\hat{\psi}(t; \beta) - u(t) \right) dt. \tag{36}$$

Применяя неравенство Минковского, отсюда получаем

$$\left\| \rho_{\sigma,c}(f; x) \right\|_{\hat{p}} \le \mathfrak{E}_{\sigma,c}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}} \left\| \hat{\psi}(t; \beta) - u(t) \right\|_1, \tag{37}$$

где

$$\mathfrak{E}_{\sigma,c}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}} = \left\| f_\beta^\psi(\cdot) - S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi; \cdot) \right\|_{\hat{p}}, \tag{38}$$

$$\left\| \hat{\psi}(t; \beta) - u(t) \right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(t; \beta) - u(t) \right| dt. \tag{39}$$

Замечая, что $\overline{W}_\sigma \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{E}_\sigma \cap L_1(R) \subset W_\sigma^2$ $\Big($поскольку, как известно (см., например, [6, с. 335]), если $f \in \mathfrak{E}_\sigma \cap L_p(R)$, $p \ge 1$, то $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \Big)$ и полагая

$$e_\sigma(f)_1 = \inf_{u \in \overline{W}_\sigma} \left\| f(t) - u(t) \right\|_1, \tag{40}$$

подытоживаем доказанное в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(v)$ *— функция, непрерывная при всех* $v \ge 0$, *удовлетворяющая условию* (4). *Тогда для любых* $\sigma > 0$, $0 \le c < \sigma$, $\forall f \in \hat{L}_\beta^\psi \hat{L}_p$, $p \in [1, \infty]$, *и* $\forall \beta \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \rho_{\sigma,c}(f; x) \right\|_{\hat{p}} = \mathfrak{E}_{\sigma,c}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}} \, e_c(\hat{\psi}_\beta)_1, \tag{41}$$

в котором выражения в правой части определяются равенствами (38) *и* (40).

В периодическом случае неравенству (41) отвечает известное неравенство Фавара. Оценка (41) представляет наибольший интерес при $p \in (1, \infty)$, поскольку нормы операторов $\left\| S_{\sigma,c}(f_\beta^\psi; \cdot) \right\|_{\hat{p}}$ в этом случае ограничены.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \hat{L}_p$, $p \ge 1$. *Тогда* $\forall \tau > 0$, $d \in [0, \tau)$

$$\|S_{\tau,d}(f;\cdot)\|_{\hat{p}} \le C_{d,\tau}\,\|f\|_{\hat{p}}, \tag{42}$$

где $C_{d,\tau}$ *— величина, которая допускает оценки*

$$\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\tau+d}{\tau-d} + \frac{1}{3} < C_{d,\tau} < \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\tau+d}{\tau-d} + 2. \tag{43}$$

Если при этом $p \in (1,\infty)$, *то*

$$\|S_{\tau,d}(f;\cdot)\|_{\hat{p}} \le C_p((\tau-d)^{-1} + 1)\|f\|_{\hat{p}}, \tag{44}$$

где C_p *— величина, которая может зависеть только от* p.

Доказательство. Поскольку норма $\|\cdot\|_{\hat{p}}$ инвариантна относительно сдвига, то соотношения (42) и (43) следуют из результатов, доказанных в книге Н. И. Ахиезера [6, с. 254]. Чтобы доказать справедливость неравенства (44), установим сначала следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \hat{L}_p$ *и* J_a *— интервал* $(a, a+2\pi)$, $f_a(x)$ *—* 2π*-периодическая функция, для которой*

$$f_a(x) = f(x), \ \ x \in J_a. \tag{45}$$

Пусть, далее, J'_a *— интервал, целиком лежащий в* J_a. *Тогда* $\forall\, p \ge 1$

$$\left(\int_{J'_a} |S_{\tau,d}(f;x) - S_{\tau,d}(f_a;x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \frac{4\|f\|_{\hat{p}}}{\delta(\tau-d)}, \tag{46}$$

где δ *— расстояние от* J'_a *до множества* $R \setminus J'_a$.

Ясно, что, не ограничивая общности, можно считать, что $J_a = (-\pi,\pi) \overset{\mathrm{df}}{=} J$; функцию $f_\pi(\cdot)$ обозначим через $\tilde{f}(\cdot)$. Пусть J' — интервал, целиком лежащий в J, и δ — меньшее из расстояний между концами отрезков $\dot{J}$ и J'.

Рассмотрим разность

$$R_1(x) = S_{\tau,d}(f;x) - \int_{|t|\le\delta} f(x+t)\,\hat{\lambda}^{(0)}_{\tau,d}(t)\,dt = \int_{|t|\ge\delta} f(x+t)\,\hat{\lambda}^{(0)}_{\tau,d}(t)\,dt, \tag{47}$$

$f \in \hat{L}_p$. Применяя неравенство Минковского и учитывая соотношения (31), (47), находим

$$\left(\int_{J'} |R_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \|f\|_{\hat{p}}\, 2\int_{\delta}^{\infty} \left|\hat{\lambda}^{(0)}_{\tau,d}(t)\right| dt = \frac{2\|f\|_{\hat{p}}}{\delta(\tau-d)}.$$

Поэтому

$$\left(\int_{J'} |S_{\tau,d}(f;x) - S_{\tau,d}(\tilde{f};x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_{J'} \left|\int_{|t|\le\delta} (f(x+t) - \tilde{f}(x+t))\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} + \frac{4\|f\|_{\hat{p}}}{\delta(\tau-d)}. \tag{48}$$

Но, если $x \in J'$ и $|t| \le \delta$, то $x+t \in J$. Следовательно, в силу (45) первое слагаемое в правой части (48) есть нуль, откуда и следует оценка (46).

Перейдем к доказательству теоремы. Имеем

$$\|S_{\tau,d}(f;\cdot)\|_{\hat p} = \sup_{u\in R}\left(\int_u^{u+2\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{49}$$

При каждом фиксированном u обозначим через $\tilde f_1(x)$ и $\tilde f_2(x)$ 2π-периодические функции, которые совпадают с $f(x)$ на промежутках $(u-\pi/2, u+3\pi/2)$ и $(u+\pi/2, u+5\pi/2)$ соответственно. Тогда

$$\left(\int_u^{u+2\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_u^{u+\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_{u+\pi}^{u+2\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{50}$$

Но в силу леммы 1 (при $a = u-\pi/2$, $J_a' = (u, u+\pi)$ и, значит, $\delta = \pi/2$)

$$\left(\int_u^{u+\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_u^{u+\pi}|S_{\tau,d}(f;x) - S_{\tau,d}(\tilde f_1;x)|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_u^{u+\pi}|S_{\tau,d}(\tilde f_1;x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{8\|f\|_{\hat p}}{\pi(\tau-d)} + \left\|S_{\tau,d}\left(\tilde f_1;x\right)\right\|_{\hat p}. \tag{51}$$

Аналогично получаем

$$\left(\int_{u+\pi}^{u+2\pi}|S_\tau^d(f;x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{8\|f\|_{\hat p}}{\pi(\tau-d)} + \left\|S_\tau^d\left(\tilde f_1;x\right)\right\|_{\hat p}. \tag{52}$$

Объединяя соотношения (49) – (52), находим

$$\left(\int_u^{u+\pi}|S_{\tau,d}(f;x)|^p dx\right)^{1/p} \le \frac{16\|f\|_{\hat p}}{\pi(\tau-d)} + \left\|S_{\tau,d}\left(\tilde f_1;x\right)\right\|_{\hat p} + \left\|S_{\tau,d}\left(\tilde f_2;x\right)\right\|_{\hat p}. \tag{53}$$

Согласно свойству 3 оператор $S_{\tau,d}(\cdot, x)$ каждой суммируемой 2π-периодической функции $f(\cdot)$ сопоставляет тригонометрический полином, коэффициенты которого — суть коэффициенты Фурье исходной функции, умноженные на числа $\lambda_{\tau,d}(k)$ и, таким образом, является мультипликатором, порождаемым последовательностью

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_{\tau,d}, & k = 0,1,\ldots,[\tau], \\ 0, & k \ge [\tau]. \end{cases}$$

Эта последовательность удовлетворяет известной теореме Марцинкевича (см., например, [7, с. 346] или [5, с. 205], согласно которой заключаем, что $\forall p \in (1,\infty)$ при произвольных числах $\tau > d > 0$

$$\|S_{\tau,d}(f;x)\|_{\hat p} = \|S_{\tau,d}(f;\cdot)\|_p \le C_p\|f\|_p = C_p\|f\|_{\hat p}, \tag{54}$$

где C_p — величина, которая может зависеть только от p.

Принимая во внимание оценку (54), имеем

$$\left\|S_{\tau,d}\left(\tilde f_1;x\right)\right\|_{\hat p} + \left\|S_{\tau,d}\left(\tilde f_2;x\right)\right\|_{\hat p} \le 2C_p\|f\|_{\hat p}.$$

Сопоставляя это соотношение с неравенством (53), получаем оценку (44). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любой функции* $\varphi \in \hat{L}_p$, $p \geq 1$, *при любых* $\sigma > 0$ *и* $0 \leq c < \sigma$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{\sigma,c}(\varphi)_{\hat{p}} = \|\varphi(\cdot) - S_{\sigma,c}(\varphi;\cdot)\|_{\hat{p}} \leq K_{\sigma,c} E_c(\varphi)_{\hat{p}}, \tag{55}$$

в котором величина $K_{\sigma,c}$ *допускает оценки*

$$\frac{4}{\pi^2} \ln \frac{\sigma + c}{\sigma - c} + \frac{1}{3} < K_{\sigma,c} < \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{\sigma + c}{\sigma - c} + 3. \tag{56}$$

Если при этом $p \in (1, \infty)$, *то*

$$\mathcal{E}_{\sigma,c}(\varphi)_{\hat{p}} \leq K_p \left((\sigma - c)^{-1} + 1\right) E_c(\varphi)_{\hat{p}}, \tag{57}$$

K_p — *величина, которая может зависеть только от* p, *а* $E_c(\varphi)_{\hat{p}}$ *определяется равенством* (21).

В самом деле, если $u(\cdot)$ — любая функция из W_c^2, то согласно свойству 2 операторов $S_{\sigma,c}(\cdot;\cdot)$ справедливо тождество $S_{\sigma,c}(u;x) \equiv u(x)$. Значит,

$$E_{\sigma,c}(\varphi)_{\hat{p}} = \|(\varphi(\cdot) - u(\cdot)) + S_{\sigma,c}(u - \varphi;\cdot)\|_{\hat{p}} \leq$$
$$\leq \|(\varphi(\cdot) - u(\cdot))\|_{\hat{p}} + \|S_{\sigma,c}(u - \varphi;\cdot)\|_{\hat{p}}.$$

Отсюда, пользуясь теоремой 3 и рассматривая нижнюю грань при $u \in W_\sigma^2$, получаем оценки (55) – (57).

Неравенства (55) и (57) позволяют нужным образом оценивать первый сомножитель правой части (41). Второй сомножитель можно оценивать, руководствуясь следующим утверждением.

Предложение 5. *Пусть функция* $\psi(v)$ *непрерывна при* $v \geq 0$ *и для нее выполняется условие* (4). *Тогда при любых* $c > d \geq 0$ *и* $\beta \in R$

$$e_c(\hat{\psi})_1 \leq \|\hat{r}_c^d(\cdot;\beta)\|_1, \tag{58}$$

где

$$\hat{r}_c^d(t;\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r_c^d(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv, \tag{59}$$

$$r_c^d(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq d, \\ (v - d)(c - d)^{-1} \psi(c), & d \leq v \leq c, \\ \psi(v), & v \geq c. \end{cases} \tag{60}$$

Действительно, пусть

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv, \tag{61}$$

где

$$\varphi(v) = \begin{cases} 0, & v \geq c, \\ \psi(v) - (v - d)(c - d)^{-1} \psi(c), & d \leq v \leq c, \\ \psi(v), & 0 \leq v \leq d. \end{cases} \tag{62}$$

Согласно теореме Винера – Пэли (см., например, [6, с. 179]), $u \in \mathcal{E}_c$ и вследствие равенств (59) – (62) $\hat{\psi}_\beta(t) - u(t) = \hat{r}_c^d(t;\beta)$. Поэтому

$$e_c(\hat{\psi})_1 \leq \|\hat{\psi}_\beta(t) - u(t)\|_1 = \|\hat{r}_c^d(\cdot;\beta)\|_1.$$

Сопоставляя утверждения теорем 1 и 2, а также следствия 1 и предложения 5, видим, что оценки (29) и (41) станут конструктивными, если будут найдены конструктивные оценки величин $\|\hat{r}_\sigma^\tau(\cdot;\beta)\|_1$. Для получения таких оценок потребуется ряд дополнительных фактов.

2. О функциях $\psi(\cdot)$, определяющих множества $\hat{L}_\beta^\psi$. До сих пор предполагалось, что функции $\psi(\cdot)$, входящие в определение множеств $\hat{L}_\beta^\psi$, непрерывны на положительной полуоси и удовлетворяют условию (4). Чтобы получить желаемые оценки величин $\|\hat{r}_\sigma^\tau(\cdot;\beta)\|_1$, круг допустимых функций мы вынуждены сузить.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых вниз при всех $v \geq 1$ функций $\psi(\cdot)$, для которых

$$\lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0. \tag{63}$$

Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на участок $[0, 1)$ так, чтобы полученная функция (которую по-прежнему будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывной при всех $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0, \infty)$:

$$\bigvee_0^\infty \psi'(t) \leq K < \infty.$$

Множество таких функций $\psi(\cdot)$ обозначается через $\mathfrak{A}$. Подмножество $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt \leq K < \infty, \tag{64}$$

обозначается через F.

Для функции $\psi \in \mathfrak{A}$ в [2, с. 111] доказано следующее утверждение.

Предложение 6. *Если $\psi \in F$ и $\beta \in R$, то функция*

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv \tag{65}$$

суммируема на R, причем при $|t|\to\infty$ $\hat{\psi}(t) = O(t^{-2})$.

Если же $\psi \in \mathfrak{A}$, то такое же заключение верно для функции $\hat{\psi}_0(t) = \hat{\psi}(t, 0)$ (т. е. для функции (65) при $\beta = 0$).

Из этого утверждения следует, что функции $\psi(\cdot)$ из множества F при любом $\beta \in R$ и функции $\psi \in \mathfrak{A}$ при $\beta = 0$ удовлетворяют всем требованиям, которые предъявлялись к ним в предложениях 1 – 5, а также в теоремах 1 и 2.

Из множества $\mathfrak{M}$ выделяются три подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$. Эти подмножества часто встречаются в работах автора и его последователей, однако, для удобства, приведем их определения.

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, положив [5, с. 94]

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}. \tag{66}$$

Ко множеству $\mathfrak{M}_c$ относятся все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых можно указать такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от

$\psi(\cdot)$), что $0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 < \infty$; ко множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$ для которых $0 < \mu(\psi; t) < \text{const} < \infty$. Ясно, что $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_c$. В связи с этим полагаем $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \backslash \mathfrak{M}_c$. Через $\mathfrak{M}_\infty$ обозначается подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно и неограниченно возрастает: $\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}$.

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_c$ являются функции $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, $t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t+1)$, $\varepsilon \in R$, и др., множества $\mathfrak{M}'_0$ — функции $\ln^{\varepsilon}(t+1)$ при $\varepsilon < 0$. Множеству $\mathfrak{M}_\infty$ принадлежат функции $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

Если $\psi \in \mathfrak{A}$ и при этом на участке $t \ge 1$ $\psi \in \mathfrak{M}_X$, где X обозначает либо c, либо 0, либо ∞, то полагаем $\psi \in \mathfrak{A}_X$.

К настоящему времени для функций $\psi \in \mathfrak{M}_X$ установлен целый ряд фактов (см., например, [5], § 3.5). Эти факты будем приводить по мере их использования, а сейчас отметим лишь следующее.

Предложение 6. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_{c,\infty} = \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}_\infty$, *то* $\psi \in F$, *т. е.* $\mathfrak{A}_{c,\infty} \subset F$.

Предложение 7. *Пусть* F_0 *— подмножество функций* $\psi \in \mathfrak{M}$, *для которых*

$$0 < \eta'(t) = \eta'(\psi; t) < \text{const}, \quad t \ge 1, \quad \eta'(t) \stackrel{\text{df}}{=} \eta'(t+0). \tag{67}$$

Тогда $\forall\, \psi \in F_0$ *найдется постоянная* K *такая, что* $\forall\, t \ge 1$ $\mu(\psi; t) > K > 0$ *и, кроме того, выполняется условие* (63).

Утверждения этих предложений доказаны в [2, с. 112].

В дальнейшем множество функций $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых выполнено (67), обозначаются также через F_0. Предложение 7, таким образом, означает, что $F_0 \subset F$.

Предложение 8. *Справедливо включение* $\mathfrak{A}_{c,\infty} \subset F_0$ *и, значит,*

$$\mathfrak{A}_{c,\infty} \subset F_0 \subset F. \tag{68}$$

Это утверждение доказано в [3, с. 215]. Отметим при этом, что функции $\psi(\cdot)$, принадлежащие $\mathfrak{A}_0$, к F_0 могут и не принадлежать: для них условие (64) не обязательно, поэтому они могут не входить даже во множество F.

3. Оценки величин $\|\hat{r}^c_\sigma(t,\beta)\|_1$ при $c = \sigma - h$, где h — фиксированное число, $h > 0$. Согласно формулам (24) и (25) $\forall\, \psi \in F$

$$\hat{r}^c_\sigma(t,\beta) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_c^\sigma \frac{v-c}{\sigma-c}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv \stackrel{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} J_1(\sigma, t, c) + J_2(\sigma, t). \tag{69}$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$J_1(\sigma, t, c) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left[\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{2\sin((\sigma+c)t + \beta\pi/2)\sin((\sigma-c)t/2)}{(\sigma-c)t^2}\right] =$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left[\frac{(\sigma-c)t - \sin((\sigma-c)t)}{(\sigma-c)t^2}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right. \tag{70}$$

$$+ \frac{1-\cos((\sigma-c)t)}{(\sigma-c)t^2}\cos\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Big]. \tag{71}$$

Величина $J_2(\sigma, t)$, как видим, от значения c не зависит и может быть представлена в виде

$$J_2(\sigma,t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi t}\int_{\sigma}^{\infty}\psi'(v)\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}J_3(\sigma,t). \tag{72}$$

Пусть теперь $a = a(\sigma)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma > 0$, такая, что $\sigma a(\sigma) \geq a_0 > 0$ $\forall\, \sigma > 0$; $m_a = \min(a(\sigma), 1)$, $M_a = \max(a(\sigma), 1)$.

Отправляясь от формул (71) при $c = \sigma - h$ и (72), полагаем

$$B_\sigma^\psi(a) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{m_a\leq|t|\leq M_a}\left|\frac{\sin(\sigma t+\beta\pi/2)}{t}\right|dt, \tag{73}$$

$$P_\sigma^\psi(a) = \int_{|t|\leq a(\sigma)}|J_2(\sigma;t)|\,dt, \quad R_\sigma^\psi(a) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq a(\sigma)}|J_3(\sigma;t)|\,dt, \tag{74}$$

$$\gamma_\sigma(h) = \int_{-1}^{1}|J_1^h(\sigma;t)|\,dt, \quad J_1^h(\sigma;t) = J_2(\sigma,t,\sigma-h),$$

$$\delta_\sigma(h) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi h}\int_{|t|\geq 1}\frac{|\sin((2\sigma+h)t/2+\beta\pi/2)\sin(ht/2)|}{ht^2}\,dt. \tag{75}$$

Тогда нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\|\hat{r}_c^{\sigma-h}(t,\beta)\|_1 \leq B_\sigma^\psi(a) + P_\sigma^\psi(a) + R_\sigma^\psi(a) + \gamma_\sigma(h) + \delta_\sigma(h). \tag{76}$$

Произведем оценку каждого слагаемого правой части последнего выражения. Анализируя ход установления неравенств (72) и (75) в работе [3], приходим к выводу, что $\forall\, \psi \in F$ при $\sigma \to \infty$

$$B_\sigma^\psi(a) \leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}(|\ln a(\sigma)| + O(1)), \tag{77}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по σ,

$$P_\sigma^\psi(a) + R_\sigma^\psi(a) \leq K_1(\psi(\sigma) + Q_\sigma^\psi(a)), \tag{78}$$

где K_1 — величина, не зависящая от σ и

$$Q_\sigma^\psi(a) = \int_{1/a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt + \int_{a(\sigma)}^{\infty}t^{-1}\left(\psi(\sigma)-\psi\left(\sigma+\frac{1}{t}\right)\right)dt. \tag{79}$$

Принимая во внимание равенство (71) при $c = \sigma - h$, находим

$$\gamma_\sigma(h) \leq \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left(\int_{-1}^{1}\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\,dt + \int_{-1}^{1}\frac{1-\cos ht}{ht^2}\,dt\right) \leq \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{h^2}{6}+h\right). \tag{80}$$

Наконец,

$$\delta_\sigma(h) \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi h} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi h}. \tag{81}$$

Объединяя соотношения (76) – (81), приходим к следующему утверждению.

Предложение 9. *Пусть $\psi \in F$ и $a = a(\sigma)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma > 0$, такая, что $\sigma a(\sigma) \ge a_0 > 0$.*

Тогда для любых $\beta \in R$ и $h > 0$ при всех $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$\|\hat{r}_\sigma^{\sigma-h}(t,\beta)\|_1 \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(|\ln a(\sigma)| + K(h^2+h^{-1})\right) + Q_\sigma^\psi(a), \tag{82}$$

в котором K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

В ([18], лемма 8) показано, что если $\psi \in F_0$ и в качестве $a(\sigma)$ взята величина $a^*(\sigma) = \mu(\psi;\sigma)/\sigma$, то при $\sigma \in N$ справедливо неравенство $Q_\sigma^\psi(a^*) \le \le K\psi(\sigma)$. Включение $\sigma \in N$ не принципиально, т. е. эта оценка верна $\forall\, \sigma \ge 0$. Кроме того, согласно предложению 7 $\exists\, a_0 > 0$ такое, что $\forall\, \sigma \ge 1$ будет $\sigma a^*(\sigma) > a_0$. Принимая во внимание эти факты и полагая в предложении 9 $a(\sigma) = a^*(\sigma) = 1/(\eta(\sigma) - \sigma)$, приходим к такому утверждению.

Теорема 4. *Пусть $\psi \in F_0$. Тогда при любых $\beta \in R$, $\sigma \ge 1$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\|\hat{r}_\sigma^{\sigma-h}(t,\beta)\|_1 \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)| + K(h^2+h^{-1})\right), \tag{83}$$

в котором $\sigma > h$ и K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$ и $\eta(\sigma) = \eta(\psi;\sigma) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$.

В предложении 6 отмечалось, что $\mathfrak{A}_{c,\infty} = \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}_\infty \subset F_0$. Очевидно, $\mathfrak{A}_0 \supset \supset \mathfrak{A}_c$, но $\mathfrak{A}_0$ содержит и элементы, которые убывают столь медленно, что не обеспечивается выполнение условия (64), которое для $\psi \in \mathfrak{A}_c$ заведомо выполнено. В связи с этим положим $\mathfrak{A}_0' = \mathfrak{A}_0 \setminus \mathfrak{A}_c$ и найдем для $\psi \in \mathfrak{A}_0'$ аналог теоремы 4.

Теорема 4′. *Пусть $\psi \in \mathfrak{A}_0$. Тогда при любых $\sigma \ge 1$ и $h > 0$*

$$\|\hat{r}_\sigma^{\sigma-h}(t,0)\|_1 \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(\ln\sigma + K(h^2+h^{-1})\right), \tag{84}$$

где $\sigma > h$ и K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Заметим, что если $\psi \in \mathfrak{A}_c$, то из определения множеств $\mathfrak{A}_c$ следует равенство $\eta(\psi;t) - t = \theta t$, где θ — величина, которая ограничена сверху и снизу некоторыми положительными константами. Поэтому оценка (84) при $\psi \in \in \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_c$ совпадает с оценкой (83). Чтобы получить оценку (84), положим

$$B_\sigma^\psi = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{|t|\le 1} \left|\frac{\sin\sigma t}{t}\right| dt, \quad R_\sigma^\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |J_{3,0}(\sigma,t)|\, dt,$$

[illegible]$$(h) = \int_{|t|\le 1} |J_{1,0}^h(\sigma,t)|\, dt,$$

$$\delta_\sigma^{(0)}(h) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{|t|\le 1} \frac{|\sin ht/2|}{t^2} \left|\sin\left(\sigma t + \frac{ht}{2}\right)\right| dt,$$

где $J_3^{(0)}(\sigma;t)$ и $J_{1,0}^{h}(\sigma;t)$ определяются формулами (72) и (71) соответственно при $\beta=0$ и $c=\sigma-h$.

Тогда, учитывая соотношения (69) – (72), нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\left\|\hat{r}_\sigma^{\tau}(t,0)\right\|_1 \le B_\sigma^{\psi} + R_\sigma^{\psi} + \gamma_\sigma^{(0)}(h) + \delta_\sigma^{(0)}(h). \tag{85}$$

Оценки (80) и (81) верны при любых $\beta\in R$, поэтому

$$\gamma_\sigma^{(0)}(h) + \delta_\sigma^{(0)}(h) \le K(h^2+h^{-1})\psi(\sigma). \tag{86}$$

Величина R_σ^{ψ} оценена в [5, с. 133]:

$$R_\sigma^{\psi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|J_3^{(0)}(\sigma,t)|\,dt \le K\psi(n). \tag{87}$$

Поэтому, если учесть, что

$$\int_0^1 \frac{|\sin\sigma t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\ln\sigma + O(1), \tag{88}$$

и сопоставить соотношения (85) – (88), то сразу получим неравенство (84).

4. Оценки величин $\|\hat{r}_\sigma^{c}(t,\beta)\|_1$ при $c=\theta\sigma$, $0\le\theta<1$ и $\psi\in\mathfrak{A}_c$. Принимая во внимание равенства (69) – (72) и полагая

$$\gamma_\sigma(\theta) = \int_{|t|\le 1/\sigma}|J_1(\sigma;t;\theta\sigma)|\,dt,$$

$$\delta_\sigma(\theta) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\int_{|t|\ge 1/\sigma}\frac{|\sin((1+\theta)\sigma t + \beta\pi/2)\sin((1-\theta)\sigma t/2)|}{(1-\theta)\sigma t^2}\,dt,$$

$$P_\sigma^{\psi} = \int_{|t|\le 1/\sigma}|J_2(\sigma,t)|\,dt, \quad R_\sigma^{\psi} = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge 1/\sigma}|J_3(\sigma,t)|\,dt,$$

будем иметь

$$\left\|r_\sigma^{\theta\sigma}(t,\beta)\right\|_1 \le \gamma_\sigma(\theta) + \delta_\sigma(\theta) + P_\sigma^{\psi} + R_\sigma^{\psi}. \tag{89}$$

Согласно равенству (71) получаем

$$\gamma_\sigma(\theta) \le \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left(\int_0^{1/\sigma}\frac{|(1-\theta)\sigma t - \sin((1-\theta)\sigma t)|}{(1-\theta)\sigma t^2}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1/\sigma}\frac{|1-\cos((t-\theta)\sigma t)|}{(1-\theta)\sigma t^2}\,dt\right) \le \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{(1-\theta)^2}{12} + \frac{1-\theta}{2}\right). \tag{90}$$

Аналогично,

$$\delta_\sigma(\theta) \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi}\int_{1/\sigma}^{\infty}\frac{dt}{(1-\theta)\sigma t^2} = \frac{4\psi(\sigma)}{\pi(1-\theta)}. \tag{91}$$

Далее, принимая во внимание соотношения (78) и (79) и полагая в них $a(\sigma) = 1/\sigma$, находим

$$P_\sigma^{\psi} + R_\sigma^{\psi} \le K_1\left(\psi(\sigma) + \int_\sigma^{\infty}\frac{\psi(\sigma+t)}{t}\,dt + \int_{1/\sigma}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t)}{t}\,dt\right). \tag{92}$$

Здесь K_1 и далее K_i, $i = 2, \ldots,$ — величины, которые могут зависеть только от функций $\psi(\cdot)$.

В [5, с. 6] показано, что $\forall\, \psi \in \mathfrak{A}_{c,\infty}$

$$A_1(\sigma) = \int\limits_{\eta(\sigma)-\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt \le K_2\psi(\sigma), \tag{93}$$

$$A_2(\sigma) = \int\limits_{1/(\eta(\sigma)-\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t)}{t}\, dt \le K_3\psi(\sigma). \tag{94}$$

Поэтому $\forall\, \psi \in \mathfrak{A}_{c,\infty}$

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt \le A_1(\sigma) + \left| \int\limits_{\sigma}^{\eta(\sigma)-\sigma} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt \right| \le K_2\psi(\sigma) + \psi(\sigma) \left| \ln\frac{1}{\mu(\sigma)} \right| \tag{95}$$

и

$$\int\limits_{1/\sigma}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t)}{t}\, dt = A_2(\sigma) + \left| \int\limits_{1/\sigma}^{1/(\eta(\sigma)-\sigma)} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t)}{t}\, dt \right| \le$$

$$\le K_3\psi(\sigma) + \psi(\sigma)\,|\ln\mu(\sigma)|. \tag{95$'$}$$

Если $\psi \in \mathfrak{A}_c$, то согласно определению величина $\mu(\sigma) = \mu(\psi;\sigma)$ ограничена снизу и сверху положительными постоянными. Значит, в этом случае вследствие (92) – (95′) будем иметь

$$P_\sigma^\psi + R_\sigma^\psi \le K_4\psi(\sigma). \tag{96}$$

Объединяя соотношения (89) – (91) и (96), получаем такое утверждение.

Теорема 5. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_c$, $\theta \in [0, 1)$ *и* $\beta \in R$, *то* $\forall\, \sigma \ge 1$

$$\|\hat{r}_\sigma^{\theta\sigma}(t,\beta)\|_1 \le \frac{K}{1-\theta}\psi(\sigma), \tag{97}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

5. Оценки величин $\|\hat{r}_\sigma^c(t,\beta)\|_1$ при $c = 2\sigma - \eta(\sigma)$ и $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$.

Теорема 5′. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, $c^* = \max(2\sigma - \eta(\sigma), 0)$ *и* $\beta \in R$, *то* $\forall\, \sigma \ge 1$

$$\|\hat{r}_\sigma^{c^*}(t,\beta)\|_1 \le K\psi(\sigma). \tag{98}$$

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, то величина $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$ согласно определению множеств $\mathfrak{A}_\infty$ монотонно и неограниченно возрастает. Поэтому при $\sigma \to \infty$ величина $(2\sigma - \eta(\sigma))/\sigma$, возрастая, стремится к единице. Стало быть, начиная с некоторого σ_0 всегда выполняется условие $2\sigma - \eta(\sigma) > 0$ и, значит, не ограничивая общности, в дальнейшем можно считать, что $c^* = 2\sigma - \eta(\sigma)$, поскольку неравенство (98) при $\sigma \in [1, \sigma_0)$ можно получить подбором постоянной K.

Отправляясь от равенств (69) – (72), полагаем

$$\gamma_\sigma^* = \int\limits_{|t| \le 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |J_1(\sigma; t; c^*)|\, dt,$$

$$\delta_\sigma^* = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi h} \int\limits_{|t|\geq 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} \frac{\left|\sin\left((\sigma+c^*)t + \beta\pi/2\right)\sin\left((\sigma-c^*)t/2\right)\right|}{(\sigma-c^*)t^2}\, dt,$$

$$P_\sigma^\psi = \int\limits_{|t|\leq 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |J_2(\sigma,t)|\, dt, \quad R_\sigma^\psi \doteq \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |J_3(\sigma,t)|\, dt.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\left\|\hat{r}_\sigma^{c^*}(t,\beta)\right\|_1 \leq \gamma_\sigma^* + \delta_\sigma^* + P_\sigma^\psi + R_\sigma^\psi. \tag{99}$$

Используя неравенства (78), (93) и (94), находим

$$P_\sigma^\psi + R_\sigma^\psi \leq K_1 \left(\psi(\sigma) + \int\limits_{\eta(\sigma)-\sigma}^{\infty} \frac{\psi(\sigma+t)}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{1/(\eta(\sigma)-\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma+1/t)}{t}\, dt \right) \leq K_5\psi(\sigma). \tag{100}$$

Далее, учитывая (71) и полагая $\eta(\sigma)-c = z$, имеем

$$\gamma_\sigma^* = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_0^{1/(\eta(\sigma)-\sigma)} \frac{(\sigma-c^*)t - \sin\left((\sigma-c^*)t\right) + 1 - \cos\left((\sigma-c^*)t\right)}{(\sigma-c^*)t^2}\, dt =$$

$$= \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_0^{1/z} \frac{zt - \sin zt + 1 - \cos zt}{zt^2}\, dt \leq K_6\psi(\sigma), \tag{101}$$

$$\delta_\sigma^* = \frac{4\psi(\sigma)}{z\pi} \int\limits_0^{1/z} \frac{dt}{t^2}\, dt \leq K_7\psi(\sigma). \tag{102}$$

Сопоставляя оценки (99) – (102), получаем неравенство (98).

6. Оценки величин $\left\|\hat{r}_\sigma^c(t,0)\right\|_1$ при $c = \theta\sigma$, $0 \leq \theta < 1$ и $\psi \in \mathfrak{A}_0$.

Теорема 5″. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_c$, $0 \leq \theta < 1$, *то* $\forall\, \sigma \geq 1$

$$\left\|\hat{r}_\sigma^{\theta\sigma}(t,0)\right\|_1 \leq \frac{K}{1-\theta}\psi(\sigma), \tag{103}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Доказательство. Обозначим через $J_1^{(0)}(\sigma;t,\theta\sigma)$ и $J_2^{(0)}(\sigma;t)$ значения интегралов $J_1(\sigma;t,c)$ и $J_2(\sigma;t)$ в случае, когда $\beta=0$ и $c=\theta\sigma$. Тогда согласно соотношениям (69), (70) и (71) будем иметь

$$\hat{r}_\sigma^{\theta\sigma}(t,0) = J_1^{(0)}(\sigma;t,\theta\sigma) + J_2^{(0)}(\sigma;t),$$

$$J_1^{(0)}(\sigma;t,\theta\sigma) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left[\frac{\sin\sigma t}{t} - \frac{2\sin\left((1+\theta)\sigma t/2\right)\sin\left((1-\theta)\sigma t/2\right)}{(1-\theta)\,t^2} \right],$$

$$J_2^{(0)}(\sigma;t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\sigma t - \frac{1}{\pi t}\int\limits_0^1 \psi'(v)\sin vt\, dv \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\sigma t - \frac{1}{\pi}\, J_2^{(0)}(\sigma;t).$$

Значит,

$$\left\|\hat{r}_\sigma^{\theta\sigma}(t,0)\right\|_1 \leq -\frac{4\psi(\sigma)}{\pi(1-\theta)\sigma}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\left|\sin\left((1+\theta)\sigma t/2\right)\sin\left((1-\theta)\sigma t/2\right)\right|}{t^2}\, dt \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |J_3^{(0)}(\sigma; t)|\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{4\psi(\sigma)}{\pi} J(\theta) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |J_3^{(0)}(\sigma; t)|\, dt. \qquad (104)$$

Полагая $z = \sigma t/2$, имеем

$$J(\theta) = \frac{1}{2(1-\theta)} \int_0^\infty \frac{|\sin((1+\theta)z)\sin((1-\theta)z)|}{z^2}\, dz.$$

Разбивая промежуток интегрирования на множества $\theta \le z \le 1$ и $z \ge 1$ получаем

$$J(\theta) \le \frac{1+\theta}{2} + \frac{1}{2(1-\theta)} < 1 + \frac{1}{2(1-\theta)}. \qquad (106)$$

Объединяя соотношения (104), (105) и (87), получаем оценку (103).

7. Оценки величин $\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\|_1$. Применяя теорему о среднем значении интеграла, согласно (19) имеем

$$\hat{\delta}_{\sigma,c}(t) = (\psi(\zeta) - \psi(\sigma)) \int_c^\sigma \frac{v-c}{\sigma-c} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= \frac{\psi(\zeta) - \psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} J_1(\sigma; t, c), \qquad (105)$$

где ζ — некоторая точка из промежутка (c, σ), а $J_1(\sigma; t, c)$ — интеграл из (69).

Оценкой (106) удобно пользоваться при малых значениях $|t|$. Для больших значений $|t|$ нужную оценку получим, проинтегрировав два раза по частям представление (19):

$$\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta) = \frac{1}{(\sigma-c)\pi t^2}\Bigg((\sigma-c)\psi'(\sigma)\cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - (\psi(c) -$$

$$- \psi(\sigma))\cos\left(ct + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \int_c^\sigma (2\psi'(v) + (v-c)\psi''(\sigma))\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\Bigg).$$

Тогда

$$|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)| \le \frac{1}{(\sigma-c)\pi t^2}\Bigg((\sigma-c)|\psi'(\sigma)| + (\psi(c) - \psi(\sigma)) +$$

$$+ \int_c^\sigma (2|\psi'(v)| + (v-c)\psi''(v))\, dv\Bigg) = \frac{2}{\pi t^2}\left(\psi'(\sigma) + 2\frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\sigma-c}\right).$$

Заметим, что ввиду выпуклости функции $\psi(v)$ при $v > 1$, $c \ge 1$

$$\psi(c) - \psi(\sigma) = -\int_c^\sigma \psi'(t)\,dt = \int_c^\sigma |\psi'(t)|\,dt > |\psi'(\sigma)|(\sigma - c).$$

Стало быть, если $1 \le c < \sigma$, то

$$|\delta_{\sigma,c}(t,\beta)| = \frac{6}{\pi t^2}\,\frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\sigma-c}. \qquad (107)$$

Пусть сначала $c = \sigma - h$, где h — некоторое число такое, что $\sigma - h > 1$. Тогда в силу (106) и (107)

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\right\|_1 \leq \int\limits_{|t|\leq 1} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt + \int\limits_{|t|>1} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} \int\limits_{|t|\leq 1} |J_1(\sigma;t,c)|\,dt + \frac{24}{\pi}\,\frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\sigma-c}.$$

Отсюда, замечая, что в рассматриваемом случае $J_1(\sigma;t,c) = J_1^h(\sigma;t)$ и принимая во внимание оценку (80), приходим к следующему утверждению.

Предложение 10. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}$, $c=\sigma-h>1$, *то* $\forall\,\beta\in R$

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\right\|_1 \leq \frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\pi}\left[\,h^2+h+\frac{24}{h}\,\right]. \tag{108}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $c=\theta\sigma$, $0<\theta<1$ и $\psi\in\mathfrak{A}_c$. Вследствие соотношений (106) и (107) имеем

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\right\|_1 \leq \int\limits_{|t|\leq 1/\sigma} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt + \int\limits_{|t|>1/\sigma} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt =$$

$$= \frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} \int\limits_{|t|\leq 1/\sigma} |J_1(\sigma;t,c)|\,dt + \frac{6}{\pi}\,\frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{1-\theta}.$$

Поэтому, учитывая оценку (90), получаем следующее утверждение.

Предложение 11. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}_c$ *и* $c=\theta\sigma$, $0<\theta<1$, *то* $\forall\,\beta\in R$

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\right\|_1 \leq \frac{8(\psi(c)-\psi(\sigma))}{\pi(1-\theta)}, \tag{109}$$

Пусть, наконец, $\psi\in\mathfrak{A}_\infty$ и $c=2\sigma-\eta(\sigma)>1$. В этом случае

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)\right\|_1 = \int\limits_{|t|\leq 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt + \int\limits_{|t|>1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |\hat{\delta}_{\sigma,c}(t,\beta)|\,dt =$$

$$= \frac{\psi(c)-\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} \int\limits_{|t|\leq 1/(\eta(\sigma)-\sigma)} |J_2(\sigma;t,\theta\sigma)|\,dt + \frac{6}{\pi}\,(\psi(c)-\psi(\sigma)).$$

Поэтому, приняв во внимание оценку (101), получаем следующее предложение.

Предложение 12. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}_\infty$ *и* $c^*=2\sigma-\eta(\sigma)>1$, $\eta(\sigma)=\eta(\psi;\sigma)=$ $=\psi^{-1}(1/2\psi(\sigma))$, *то* $\forall\,\beta\in R$

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c^*}(t,\beta)\right\|_1 \leq \frac{8}{\pi}\,(\psi(c^*)-\psi(\sigma)). \tag{110}$$

8. Основные утверждения. Объединяя утверждения теорем 1 и 4, приходим к такому результату.

Теорема 6. *Пусть* $\psi\in F_0$, $\beta\in R$ *и* $h>0$. *Тогда* $\forall\, f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, $p\in$ $\in[1,\infty]$, *и* $\forall\,\sigma>1$ *при* $\sigma>h$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\right\|_{\hat{p}} \leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\,(|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)| + K(h^2+h^{-1}))\,E_{\sigma-h}\big(f^{\psi}_{\beta}\big)_{\hat{p}}, \tag{111}$$

в котором $\eta(\sigma)=\psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$ *и* K — *величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Эта теорема при $p=\infty$ и $h=1$ доказана автором в [3, с. 214], при $p=1$ и $h=1$ — в [4, с. 123].

Обозначим теперь через $\hat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ подмножество функций $f(\cdot)$ из $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, у которых $\|f^{\psi}_{\beta}\|_{\hat{p}} \le 1$. Ясно, что $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ и $\forall \tau$ справедливо неравенство $E_{\tau}(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}} \le 1$. Поэтому, рассматривая верхние грани обеих частей неравенства (111) по множеству $\hat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, в качестве следствия из теоремы 6 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $\psi \in F_0$, $\beta \in R$, $h > 0$ *и* $p \in [1,\infty]$. *Тогда* $\forall \sigma > 1$ *при* $\sigma > h$

$$\sup_{f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta,p}} \|\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat{p}} \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(|\ln(\eta(\sigma)-\sigma)| + K(h^2+h^{-1})\right), \quad (112)$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Неравенство (112) при $p=\infty$ и $h=1$ получено автором в [3, с. 215], при $p=1$ и $h=1$ — в [4, с. 124]. В этих случаях, как указано в названных работах, соотношение (112) является асимптотическим равенством при $\sigma \to \infty$. Отсюда следует, что в общем случае неравенства (112) и (111) точны не только по порядку при $\sigma \to \infty$, но также точны и в смысле констант при главном члене: постоянная $4/\pi^2$ в (111) и (112) уменьшена быть не может.

Если сопоставим теоремы 1 и 4′, то получим такое утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{A}_0$ *и* $h > 0$. *Тогда* $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_0\hat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$ *и* $\forall \sigma > 1$ *при* $\sigma > h$

$$\sup_{f \in \hat{L}^{\psi}_{0,p}} \|\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat{p}} \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(\ln\sigma + K(h^2+h^{-1})\right) E_{\sigma-h}(f^{\psi}_0)_{\hat{p}}, \quad (113)$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

При этом

$$\sup_{f \in \hat{L}^{\psi}_{0,p}} \|\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat{p}} \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\left(\ln\sigma + K(h^2+h^{-1})\right). \quad (114)$$

В случае, когда $h=1$ и $p=\infty$ оценки (113) и (114) установлены автором ранее в [3, с. 215, 216]; если $p=1$ — в [4, с. 124]. В этих работах отмечено, что при $h=1$ и $p=\infty$ или $p=1$ соотношения (113) и (114) точны по порядку при $\sigma \to \infty$, а также точны и в смысле констант при главном члене.

В случае, когда $f \in L^{\psi}_{\beta}$, $\sigma = n \in N$ и $h \in (0,1]$, согласно предложению 2 $F^*_{n,n-h}(f;x) = S_{n-1}(f;x)$. Поэтому утверждения теорем 6–8 можно рассматривать как обобщения соответствующих результатов из [9] о приближении периодических функций суммами Фурье на случай приближения функций из классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta}L_p$ операторами Фурье $F^*_{\sigma,c}(f;x)$. Следующее утверждение позволит получить с помощью операторов $F^*_{\sigma,c}(f;x)$ оценки наилучших приближений функций из этих классов посредством целых функций экспоненциального типа $\le \sigma$.

Теорема 9. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{A}_0$ *и* $\theta \in (0,1)$. *Тогда* $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_0\hat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$ *и* $\forall \sigma \ge 1$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\rho^*_{\sigma,\theta\sigma}(f;x)\right\|_{\hat p} \le \frac{K\psi(\sigma)}{1-\theta}\, E_{\theta\sigma}\big(f_0^{\psi}\big)_{p}. \tag{115}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_c$ *и* $\theta\in(0,1)$, *то* $\forall f\in \hat L_0^{\psi}\hat L_p$, $p\in[1,\infty]$, $\forall\beta\in R$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$\left\|\rho^*_{\sigma,\theta\sigma}(f;x)\right\|_{\hat p} \le \frac{K\psi(\sigma)}{1-\theta}\, E_{\theta\sigma}\big(f_0^{\psi}\big)_{\hat p}. \tag{116}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall f\in \hat L_0^{\psi}\hat L_p$, $p\in[1,\infty]$, $\forall\beta\in R$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$\left\|\rho^*_{\sigma,c^*}(f;x)\right\|_{\hat p} \le K\psi(\sigma)\, E_{c^*}\big(f_0^{\psi}\big)_{\hat p},\quad c^* = 2\sigma-\eta(\sigma). \tag{117}$$

В соотношениях (115)–(117) K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$; $\eta(\sigma)=\psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$.

Доказательство этой теоремы получается путем объединения соотношений (29), (103), (97) и (98).

Обозначим через $\hat L_0^{\psi}\hat L_p'$ подмножество функций $f\in\hat L_0^{\psi}\hat L_p$, для которых выполняется условие (16). Тогда согласно предложению 2 если $f\in\hat L_0^{\psi}\hat L_p'$, то $\forall\sigma>c>0$ $F^*_{\sigma,c}(f;\cdot)\in W^2_\sigma$. Поэтому из теоремы 9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}_0$, *то* $\forall\theta\in(0,1)$, $\forall f\in\hat L_0^{\psi}\hat L_p'$, $p\in[1,\infty]$ *и* $\forall\sigma\ge 1$ *справедливо неравенство*

$$E_\sigma(f)_{\hat p} \le \frac{K\psi(\sigma)}{1-\theta}\, E_{\theta\sigma}\big(f_0^{\psi}\big)_{\hat p}. \tag{118}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_c$, *то* $\forall\theta\in(0,1)$, $\forall f\in\hat L_\beta^{\psi}\hat L_p'$, $p\in[1,\infty]$, $\forall\beta\in R$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$E_\sigma(f)_{\hat p} \le \frac{K\psi(\sigma)}{1-\theta}\, E_{\theta\sigma}\big(f_\beta^{\psi}\big)_{\hat p}. \tag{119}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall f\in\hat L_\beta^{\psi}\hat L_p'$, $p\in[1,\infty]$, $\forall\beta\in R$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$E_\sigma(f)_{\hat p} \le K\psi(\sigma)\, E_{2\sigma-\eta(\sigma)}\big(f_\beta^{\psi}\big)_{\hat p}. \tag{120}$$

В соотношениях (118)–(120) K *— величина, которая может зависет только от функции* $\psi(\cdot)$: $\eta(\sigma)=\psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$.

Полагая $\hat L^{\psi,1}_{\beta,p} = \left\{ f\colon f\in\hat L_0^{\psi}\hat L_p',\ \left\|f_\beta^{\psi}\right\|_{\hat p}\le 1\right\}$ и

$$E_\sigma(\mathfrak{N})_{\hat p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_\sigma(f)_{\hat p}, \tag{121}$$

из теоремы 10 получаем такое следствие.

Теорема 11. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}_0$, *то* $\forall p\in[1,\infty]$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$E_\sigma\big(\hat L^{\psi,1}_{0,p}\big)_{\hat p} \le K\psi(\sigma). \tag{122}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_c\cup\mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall p\in[1,\infty]$, $\forall\beta\in R$ *и* $\forall\sigma\ge 1$

$$E_\sigma\big(\hat L^{\psi,1}_{0,p}\big)_{\hat p} \le K\psi(\sigma). \tag{123}$$

В соотношениях (122) *и* (123) K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

При $p=\infty$ и $\theta=1/2$ соотношения (118) – (120) и (122), (123) доказаны в [3, с. 217, 222]; при $p=1$ и $\theta=1/2$ эти соотношения установлены в [4]. В этих случаях, как отмечено в названных статьях, неравенства (118) – (123) точны по порядку.

Отметим, что в периодическом случае, т. е. для классов $L^{\psi}_{\beta,p}=\left\{f\colon f\in L^{\psi}_{\beta}L_p,\ \|f^{\psi}_{\beta}\|_p\le 1\right\}$ при $\sigma\in N$ доказано [5, с. 212], что найдутся абсолютные положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что $\forall\, n\in N$, $\forall\,\psi\in\mathfrak{M}$, $\forall\,\beta\in R$ и $p\in(1,\infty)$

$$K_1\,\psi(n)\le E_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_p\le K_2\,\psi(n). \tag{124}$$

Здесь

$$E_n\left(\mathfrak{N}\right)_p=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\inf_{T_n\in\mathcal{T}_n}\|f-T_n\|_p \tag{125}$$

— величина наилучшего приближения класса $\mathfrak{N}$ посредством тригонометрических полиномов $T_n(\cdot)$ степени $\le n$. Поскольку $L^{\psi}_{\beta,p}\subset\hat{L}^{\psi,1}_{\beta,p}$, то соотношение (125) означает, что неравенства (122) и (123) также не могут быть улучшены по порядку и при $p\in(1,\infty)$.

Теперь перейдем к формулировке утверждений для величин $\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}$. Сначала приведем промежуточное утверждение, которое получается путем объединения теоремы 2, следствия 1 и предложения 5.

Предложение 13. *Пусть* $\psi(v)$ *— функция, непрерывная при всех* $v\ge 0$, *для которой выполняются условие* (4). *Тогда для любых* $\sigma>0$, $0\le d<c<\sigma$, $\forall\, f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, $p\in[1,\infty]$, *и* $\forall\,\beta\in R$ *в обозначениях, принятых в теореме* 2, *следствии* 1 *и предложении* 5, *справедливо неравенство*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}\le K_{\sigma,c}\,E_c(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}\,\|\hat{r}^{\,d}_c(\cdot,\beta)\|_1. \tag{126}$$

Если при этом $p\in(1,\infty)$, *то*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}\le K_p\left(\frac{1}{\sigma-c}+1\right)E_c(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}\,\|\hat{r}^{\,d}_c(\cdot,\beta)\|_1. \tag{127}$$

Если $\psi\in\mathfrak{A}_c$ и $d=\theta c$, $\theta\in(0,1)$, то согласно (97) $\forall\,\beta\in R$ и $c\ge 1$

$$\|\hat{r}^{\,\theta c}_c(t;\beta)\|_1\le\frac{K}{1-\theta}\,\psi(c). \tag{128}$$

В силу (103) эта же оценка сохраняется и для $\psi\in\mathfrak{A}_0$ при $\beta=0$. Здесь K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$. Так как величина $\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}$ от значения d не зависит, при ее оценке в (126) и (127) в случае, когда $\psi\in\mathfrak{A}_c$ и $\mathfrak{A}_0$, можно пользоваться неравенством (128) при $\theta=0$, т. е. оценкой $\|r^d_c(\cdot,\beta)\|_1\le K\psi(c)$.

Такая же оценка вследствие теоремы 5′ возможна и при $\psi\in\mathfrak{A}_\infty$. Поэтому из предложения 13 вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. *Если* $\psi\in\mathfrak{A}_c\cup\mathfrak{A}_\infty$, $f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, *то* $\forall\, p\in[1,\infty]$, $\forall\,\beta\in R$ *и* $\sigma>c>0$ *справедливо неравенство*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} = K\psi(c)E_c(f_\beta^\psi)_{\hat{p}} \ln\frac{\sigma+c}{\sigma-c}, \tag{129}$$

где K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Если при этом $p \in (1,\infty)$, то

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} \le K_p\left(\frac{1}{\sigma-c}+1\right)\psi(c)E_c(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}, \tag{130}$$

где K_p — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$ и числа p.

Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то оценки (129) и (130) верны при $\beta = 0$, т. е. для $f \in \hat{L}_0^\psi \hat{L}_p$.

Согласно определению множеств $\mathfrak{M}_0$ для его элементов $\psi(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t} \le K < \infty, \quad t \ge 1, \tag{131}$$

в котором $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и K — постоянная, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$. Поэтому, если положим $\eta_1(t) = \eta(\eta(t))$, $\eta_\nu(t) = \eta(\eta_{\nu-1}(t))$, $\nu = 1, 2, \ldots$, то в силу (131) $\forall\,\theta \in (0,1)$, и $\sigma > 1$ таких, что $\theta\sigma > 1$, будем иметь

$$\eta_\nu(\theta\sigma) \ge \left(1+\frac{1}{K}\right)\eta_{\nu-1}(\theta\sigma) > \ldots$$

$$\ldots > \left(1-\frac{1}{K}\right)^\nu \eta(\theta\sigma) > \left(1+\frac{1}{K}\right)^{\nu+1}(\theta\sigma).$$

Значит, $\forall\,\psi \in \mathfrak{M}_0$ найдется натуральное ν' такое, что $\eta_{\nu'}(\theta\sigma)$ будет больше, чем σ, и тогда $\psi(\sigma) \ge \psi(\eta_{\nu'}(\theta\sigma))$. На каждом промежутке $(\eta_i(\cdot), \eta_{i+1}(\cdot))$ функция $\psi(\cdot)$ уменьшается ровно в два раза. Стало быть, $\psi(\eta_{\nu'}(\theta\sigma)) = \psi(\theta\sigma)/2^{\nu'+1}$ и тогда мы имеем

$$\psi(\theta\sigma) \le 2^{\nu'+1}\psi(\sigma), \quad \theta\sigma > 1. \tag{132}$$

Принимая во внимание этот факт, из теоремы 12 получаем следующий аналог теоремы 9 для величин $\rho_{\sigma,\theta\sigma}(f;x)$.

Следствие 2. *Если $\psi \in \mathfrak{A}_c$, то $\forall\,\theta \in (0,1)$, $\forall f \in \hat{L}_0^\psi \hat{L}'_p$, $p \in [1,\infty]$, и $\forall\,\sigma \ge 1$ и $\beta \in R$, при всех σ таких, что $\theta\sigma > 1$,*

$$\|\rho_{\sigma,\theta\sigma}(f;x)\|_{\hat{p}} \le K\psi(\sigma)\,E_{\theta\sigma}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}, \tag{133}$$

где K — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$ и числа θ. Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то оценка (133) верна для классов $\hat{L}_0^\psi \hat{L}_p$.

Для $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ соотношение (132) выполненным быть не может ни при каком ν_0. Тем не менее, и в таком случае в соотношениях (129) и (130) вместо $\psi(c)$ можно поставить величину $\psi(\sigma)$ за счет надлежащего выбора параметра c. К примеру, в качестве c возьмем величину $c^* = 2\sigma - \eta(\sigma)$ для σ таких, что $c^* \ge 1$. Тогда получается следующее утверждение.

Следствие 3. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall f \in \hat{L}_0^\psi \hat{L}_p$, $p \in [1, \infty]$, $\beta \in R$, *при всех* σ *таких, что* $\sigma \geq \eta(\psi; 1)$, *справедливо неравенство*

$$\left\| \rho_{\sigma, c^*}(f; x) \right\|_{\hat{p}} \leq K \psi(\sigma) E_{c^*}\left(f_\beta^\psi\right)_{\hat{p}} \ln \frac{\sigma + c^*}{\sigma - c^*}, \tag{134}$$

где K — *величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и числа* $c^* = 2\sigma - \eta(\sigma) \geq 1$.

Если при этом $p \in (1, \infty)$, *то*

$$\left\| \rho_{\sigma, c^*}(f; x) \right\|_{\hat{p}} \leq K_p \left(\frac{1}{\sigma - c^*} + 1 \right) \psi(\sigma) E_{c^*}\left(f_\beta^\psi\right)_{\hat{p}}, \tag{135}$$

где K — *величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и числа* p.

Чтобы убедиться в справедливости оценок (134) и (135), в силу (129) и (130) достаточно показать, что найдется абсолютная постоянная K, для которой $\psi(c^*) \leq K \psi(\sigma)$ $\forall \sigma > 1$. С этой целью определим точки c_i, $i = 0, 1, \ldots$, из равенств $\sigma \overset{\text{df}}{=} c_1$, $\eta(c_1) = c_0$, $\eta(c_2) = c_1$, $\ldots$, $\eta(c_\nu) = c_{\nu-1}$, и покажем, что $\forall \psi \in \mathfrak{M}_\infty$ найдется число ν', которое не зависит от значения σ и такое, что $c_{\nu'} \leq c^*$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$\frac{c_{i-1} - c_i}{c_i - c_{i+1}} = \frac{\eta(\eta(c_{i+1})) - \eta(c_{i+1})}{\eta(c_{i+1}) - c_{i+1}} = \eta'(\zeta_i), \ \ \zeta_i \in (c_i, c_{i-1}), \ i = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$\Delta_1 = c_1 - c_2 \leq \frac{\Delta_0}{\eta'(\zeta_1)}, \quad \Delta_0 = c_0 - c_1 = \eta(\sigma) - \sigma,$$

$$\Delta_2 = c_2 - c_3 = \frac{\Delta_1}{\eta'(\zeta_2)} = \frac{\eta(\sigma) - \sigma}{\eta'(\zeta_1)\eta'(\zeta_2)}, \ldots$$

$$\ldots, \Delta_{\nu-1} = c_{\nu-1} - c_\nu = (\eta(\sigma) - \sigma) \left(\prod_{i=1}^{\nu} \eta'(\zeta_i) \right)^{-1}.$$

Значит, при любом $\nu > 1$

$$\sigma - c_\nu = \sum_{i=1}^{\nu-1} \Delta_i = (\eta(\sigma) - \sigma) \sum_{j=1}^{\nu-1} \left(\prod_{i=1}^{j} \eta'(\zeta_i) \right)^{-1}.$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то по определению величина $\mu(\psi; t)$ монотонно стремится к ∞. Отсюда следует, что при всех $t \geq 1$ $\eta(t) = t(1 + \alpha(t))$, где $\alpha(t)$ — дифференцируемая неотрицательная функция, монотонно стремящаяся к нулю. Следовательно, $\forall t \geq 1$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} = \eta'(t) = 1 + \alpha(t) + t\alpha'(t) < 1 + \alpha(t).$$

Следовательно, $\forall \delta \in (0, 1)$, начиная с некоторого t_δ, при $t > t_\delta$ $1/2 \leq \eta'(t) \leq 2 - \delta$ и, стало быть, найдется σ_δ такое, что при $\sigma > \sigma_\delta$ $3\sigma - 2\eta(\sigma) > t_\delta$ и на участке $\dot{I} = (3\sigma - 2\eta(\sigma), \eta(\sigma))$, $\eta'(t) < 2 - \delta$. Поэтому, если $c_\nu \in \dot{I}$, то

$$\sigma - c_\nu = (\eta(\sigma) - \sigma) \sum_{i=1}^{\nu-1} (2 - \delta)^{-i}.$$

Значение последней суммы при возрастании ν монотонно стремится к числу $(1-\delta)^{-1} > 1$. Значит, действительно существует некоторое ν_0', для которого $\sigma - c_{\nu'} \geq \eta(\sigma) - \sigma$ или $c_{\nu'} \leq 2\sigma - \eta(\sigma) = c^*$.

На каждом из промежутков $[c_{i+1}, c_i]$ значения функции $\psi(\cdot)$ уменьшаются ровно в два раза. Поэтому, если $\sigma > \sigma_\delta$, то $\psi(c^*) \leq \psi(c_{\nu'}) \leq 2^{\nu'}\psi(\sigma)$, т. е. $\psi(c^*) \leq K\psi(\sigma)$. Если же $\sigma \in [1, \sigma_\delta]$, то последнее неравенство также можно удовлетворить за счет подбора константы K.

Величина $\sigma - c^*$ при $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$ может быть ограниченной снизу, но может также и стремиться к нулю при $\sigma \to \infty$. В связи с этим полагаем [5, с. 219]

$$\mathfrak{M}_\infty'' = \{\psi:\ \psi \in \mathfrak{M}_\infty,\ \ \eta(\psi; t) - t \geq K > 0 \quad \forall\, t \geq 1\}. \tag{136}$$

Нетрудно проверить, что функция $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $t \geq 1$, принадлежит к $\mathfrak{M}_\infty''$ при любых $\alpha > 0$ и $r \in (0, 1]$.

Если теперь $\psi \in \mathfrak{A}_\infty''$, то в силу (136) $\sigma - c^* = \eta(\psi; \sigma) - \sigma \geq K > 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_\infty''$, *то* $\forall f \in \hat{L}_\beta^\psi \hat{L}_p$, $p \in [1, \infty]$, $\beta \in R$, *при всех* $\sigma \geq \eta(\psi; 1)$ *справедливо неравенство*

$$\|\rho_{\sigma, c^*}(f; x)\|_{\hat{p}} \leq K\psi(\sigma)\, E_{c^*}\big(f_\beta^\psi\big)_{\hat{p}} \ln\sigma, \tag{137}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Если при этом $p \in (1, \infty)$, *то*

$$\|\rho_{\sigma, c^*}(f; x)\|_{\hat{p}} \leq K_p\psi(\sigma)\, E_{c^*}\big(f_\beta^\psi\big)_{\hat{p}}, \tag{138}$$

где K_p *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и числа* p.

Согласно предложению 2 если $f \in \hat{L}_\beta^\psi \hat{L}_p$, то $\forall\, \sigma > c > 0$ $F_{\sigma, c}(f; \cdot) \in W_\sigma^2$, поэтому из следствий 2 – 4 выводится следующее утверждение.

Теорема 13. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_c$, *то* $\forall\, \theta \in (0, 1)$, $\forall f \in \hat{L}_0^\psi \hat{L}_p'$, $p \in [1, \infty]$, *и* $\forall\, \sigma \geq 1$ *справедливо неравенство*

$$E_\sigma(f)_{\hat{p}} \leq K\psi(\sigma)\, E_{\theta\sigma}\big(f_\beta^\psi\big)_{\hat{p}}, \tag{139}$$

при этом

$$E_\sigma\big(\hat{L}_{\beta, p}^{\psi, 1}\big)_{\hat{p}} \leq K\psi(\sigma). \tag{140}$$

Оценки (138) *и* (139) *верны и для* $\psi \in \mathfrak{A}_0$ *при* $\beta = 0$.

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, *то* $\forall\ f \in \hat{L}_\beta^\psi \hat{L}_p'$, $p \in (1, \infty)$, $\forall\, \beta \in R$, *при всех* $\sigma \geq \eta(\psi; 1)$

$$E_\sigma(f)_{\hat{p}} \leq K_p\psi(\sigma)\, E_{c^*}\big(f_\beta^\psi\big)_{\hat{p}}, \quad c^* = 2\sigma - \eta(\sigma), \tag{141}$$

при этом

$$E_\sigma\big(\hat{L}_{\beta, p}^{\psi, 1}\big)_{\hat{p}} \leq K_p\psi(\sigma). \tag{142}$$

В соотношениях (139) – (142) K *и* K_p *— величины, которые могут зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и чисел* p.

Сопоставляя утверждения теорем 11 и 13, заключаем, что соотношения (139) – (142), а значит, и оценки (129), (130), (133), (135) и (138) величин $\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}}$ точны по порядку при $\sigma \to \infty$. В то же время неравенства (134) и (137) могут быть усилены. Действительно, объединяя соотношения (18), (20), (110) и (117) $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}'_p$, $p \in [1,\infty]$, $\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}$, $\beta \in R$, получаем

$$\|\rho_{\sigma,c^*}(f;x)\|_{\hat{p}} \le \|\rho^*_{\sigma,c^*}(f;x)\|_{\hat{p}} + \|\Delta_{\sigma,c^*}(f;x)\|_{\hat{p}} \le$$

$$\le K\psi(\sigma)\,E_{c^*}\big(f^{\psi}_{\beta}\big)_{\hat{p}} + \frac{8}{\pi}\,(\psi(c^*) - \psi(\sigma))\,E_{c^*}\big(f^{\psi}_{\beta}\big)_{\hat{p}}. \tag{143}$$

Отсюда, принимая во внимание установленный при доказательстве следствия 3 факт существования абсолютной константы K такой, что $\forall\,\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}$ $\psi(c^*) \le K\psi(\sigma)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 13′. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}$, *то* $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_{0}\hat{L}'_p$, $p \in [1,\infty]$, $\forall\,\beta \in R$ *и* $\forall\,\sigma \ge 1$

$$\|\rho_{\sigma,c^*}(f;x)\|_{\hat{p}} \le K\psi(\sigma)\,E_{c^*}\big(f^{\psi}_{\beta}\big)_{\hat{p}}, \tag{144}$$

при этом

$$E_{\sigma}\big(\hat{L}^{\psi,1}_{\beta,p}\big)_{\hat{p}} \le K\psi(\sigma), \tag{145}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Ясно, что эта теорема усиливает оценки (134), (137) и распространяет на все $p \ge 1$ оценки (141) и (142). Понятно также, что неравенства (144) и (145) точны по порядку при $\sigma \to \infty$.

Теперь приведем следствие, вытекающее из теоремы 12 для $c = \sigma - h$ при фиксированном $h > 0$ таком, что $\sigma - h > 1$.

Следствие 5. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}''_{\infty}$, *то* $\forall f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$, *для любых* σ *и* $h > 0$ *таких, что* $\sigma - h > 1$,

$$\|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat{p}} \le K\psi(\sigma)E_{\sigma-h}(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}\ln\sigma, \tag{146}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Если при этом $p \in (1,\infty)$, *то*

$$\|\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\|_{\hat{p}} \le K_p\Big(1 + \frac{1}{h}\Big)\,\psi(\sigma)E_{\sigma-h}(f^{\psi}_{\beta})_{\hat{p}}, \tag{147}$$

где K *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и числа* p.

Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то оценки* (146) *и* (147) *верны при* $\beta = 0$, *для* $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\hat{L}_p$.

Оценки (146) и (147) получаются из неравенств (129) и (130) с использованием сооотношения

$$\psi(\sigma - h) \le K\psi(\sigma), \tag{148}$$

которое при $\psi \in \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_c$ выводится из (131) следующим образом. В силу (131) имеем

$$\eta(\sigma - h) \ge (\sigma - h)\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \sigma\Big(1 - \frac{h}{\sigma}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k}\Big).$$

Стало быть, $\exists\,\sigma_0$ такое, что при $\sigma > \sigma_0$ $\eta\,(\sigma - h) \ge \sigma$. На интервале

$[\sigma-h, \eta(\sigma-h)]$ функция $\psi(\cdot)$ уменьшается вдвое. Значит, $\psi(\sigma-h) = 1/2\,\psi(\eta(\sigma-h)) \le 1/2\,\psi(\sigma)$, что и доказывает (149) при $\sigma \ge \sigma_0$. Если $\sigma < \sigma_0$, то (148), очевидно, также выполняется.

Если $\psi \in \mathfrak{A}''_\infty$, то в силу (136) $\exists K > 0$, для которого при любом $t \ge 1$ $\eta(t) - t > K$. Поэтому, полагая, как и при доказательстве соотношения (132), $\eta_1(t) = \eta(\eta(t))$, $\eta_\nu(t) = \eta(\eta_{\nu-1}(t))$, $\nu = 1, 2, \dots$, видим, что при $\nu > h/k$ $\eta_\nu(\sigma-h) > \sigma$. Следовательно, $\exists\, \nu'$ такое, что $\eta_{\nu'}(c-h) > \sigma$. Отсюда и вытекает (148), поскольку, как уже не раз отмечалось, на промежутках $(\eta_i(\cdot), \eta_{i+1}(\cdot))$ функция $\psi(\cdot)$ уменьшается ровно в два раза.

Из соотношения (148), с учетом предложения 10 следует также и тот факт, что $\forall\, \psi \in \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}''_\infty$

$$\left\| \hat{\delta}_{\sigma,\sigma-h}(t;\beta) \right\|_{\hat{p}} \le K\left(h^2 + \frac{1}{h} \right) \psi(\sigma). \tag{149}$$

Поэтому, объединяя соотношения (18), (20), (147) и (149) $\forall f \in \hat{L}^\psi_\beta \hat{L}'_p$ при $p \in (1,\infty)$ имеем

$$\left\| \rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x) \right\|_{\hat{p}} \le \left\| \rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) \right\|_{\hat{p}} + \left\| \Delta_{\sigma,\sigma-h}(t;\beta) \right\|_{\hat{p}} \le$$
$$\le K_p\left(h^2 + \frac{1}{h} \right) \psi(\sigma) E_{\sigma-h}(f^\psi_\beta)_{\hat{p}}.$$

Отсюда заключаем, что при $p \in (1,\infty)$ утверждения теорем 6, 7 и 8 допускают следующие уточнения.

Теорема 14. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}''_\infty$, *то* $\forall f \in \hat{L}^\psi_\beta \hat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$, *для любых* σ *и* $h > 0$ *таких, что* $\sigma - h > 1$,

$$\left\| \rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x) \right\|_{\hat{p}} \le K_p\left(h^2 + \frac{1}{h} \right) \psi(\sigma) E_{\sigma-h}(f^\psi_\beta)_{\hat{p}}. \tag{150}$$

При этом

$$\sup_{f \in \hat{L}^\psi_{\beta,p}} \left\| \rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x) \right\|_{\hat{p}} \le K_p\left(h^2 + \frac{1}{h} \right) \psi(\sigma). \tag{151}$$

В соотношениях (150) *и* (151) K_p — *величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и числа* p.

Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то оценки* (150) *и* (151) *верны при* $\beta = 0$ *для* $f \in \hat{L}^\psi_\beta \hat{L}_p$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по науке и технологиям.

1. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198–209.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102–112.
3. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – 1990. – **42**, № 2. – С. 210–222.
4. *Степанец А. И., Степанец Н. И.* Приближение целыми функциями в среднем на действительной оси // Там же. – 1991. – **43**, № 1. – С. 121–125.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
8. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101–136.
9. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 499–510.

Получено 26. 04. 93