УДК 517.98

Ю. В. Томилов, студ. (Киев. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ РЕККУРЕНТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ, В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The criteria of boundedness and asymptotic periodicity are obtained for certain recursion sequences in a Banach space.

Одержані критерії обмеженості і асимптотичної періодичності для деяких рекурентних послідовностей у банаховому просторі.

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию ограниченности и асимптотической периодичности последовательностей вида $x_{n+1} = Ax_n + b_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в банаховом пространстве B, где A — линейный ограниченный оператор в B, $\{b_n, n \geq 0\}$ — периодическая последовательность из B. Такие задачи возникают при описании различных дискретных процессов и, как оказывается, допускают полное решение при достаточно общих предположениях. Отметим, что сходные по тематике вопросы рассматривались в работах [1, 2].

1. Ограниченные последовательности. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство, $L(B)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов из B в B, $\sigma(A)$ — спектр фиксированного оператора $A \in L(B)$, $\rho(A)$ — его резольвентное множество, $\oplus$ обозначает алгебраическую прямую сумму линейных многообразий.

Определение 1. *Последовательность $\{b_n, n \geq 0\} \subset B$ называется периодической с периодом $T \in \mathbb{N}$, если T — наименьшее число такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $b_{n+T} = b_n$. В этом случае последовательность $\{b_n, n \geq 0\}$ будем называть также T-периодической.*

Утверждение 1. *Для того чтобы последовательность элементов из B, определяемая равенством $x_{n+1} = Ax_n + b_n$, $n \geq 0$, была ограниченной для любых $x_0 \in B$ и T-периодической последовательности $\{b_n, n \geq 0\} \subset B$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) $\sup\limits_{n \geq 0} \|A^n\| < +\infty$;

2) $1 \in \rho(A^T)$.

Доказательству предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Утверждение* 1 *справедливо для* 1*-периодической* (*т. е. стационарной*) *последовательности* $\{b_n, n \geq 0\}$ *тогда и только тогда, когда*:

1) $\sup\limits_{n \geq 0} \|A^n\| < +\infty$;

2) $1 \in \rho(A)$.

Доказательство. *Необходимость.* Положим $x_0 = \overline{0}$. Тогда для $\{b_n = b, n \geq 0\}$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k b$$

и по условию $\exists\, C_b > 0\ \forall b \in B\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A^k b \right\| \le C_b.$$

Применяя к семейству операторов $\left\{\sum_{k=0}^{n} A^k,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ принцип равномерной ограниченности, получаем

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \le C.$$

Если $1 \in \sigma(A)$, то

$$C \ge \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \ge \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \right| \ge n+1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Противоречие. Поскольку

$$\|A^n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} A^k \right\| \le 2C \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то необходимость условия 1 также доказана.

Достаточность. Пусть $1 \in \rho(A)$, т. е. $\exists\,(A-I)^{-1} \in L(B)$. Из тождества

$$\left(\sum_{k=0}^{n} A^k \right)(A-I) = A^{n+1} - I$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = \left(A^{n+1} - I\right)(A-I)^{-1},$$

откуда $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \le (C+1)\left\|(A-I)^{-1}\right\|,$$

где $C := \sup_{n \ge 0} \|A^n\|$. Таким образом, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+1}\| = \left\| A^{n+1}x_0 + \sum_{k=0}^{n} A^k b \right\| \le C\|x_0\| + (C+1)\|b\|\left\|(A-I)^{-1}\right\|,$$

т. е. последовательность $\{x_n,\ n \ge 0\}$ ограничена в B, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для того чтобы последовательность* $\{x_n,\ n \ge 0\}$ *из утверждения* 1 *была ограниченной для любых* $x_0 \in B$ *и* T*-периодической последовательности* $\{b_n,\ n \ge 0\} \subset B$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{x_{kT},\ k \ge 0\}$ *была ограниченной для любых* $x_0 \in B$ *и* T*-периодической последовательности* $\{b_n,\ n \ge 0\} \subset B$.

Доказательство. *Необходимость* очевидна, поскольку $\{x_{kT},\ k \ge 0\} \subset$ $\subset \{x_n,\ n \ge 0\}$.

Достаточность. Положим

$$M := \max\left(\max_{0 \le s \le T} \|A^s\|, \max_{0 \le k \le T-1} \left\| \sum_{l=0}^{k} A^l b_{k-l} \right\|\right).$$

Тогда в силу T-периодичности последовательности $\{ b_n, n \ge 0 \}$

$$x_{n+1} = A_{[n/T]T}^{n-[n/T]T+1} + \sum_{l=0}^{n-[n/T]T} A^l b_{n-l} =$$

$$= A_{[n/T]T}^{n-[n/T]T+1} + \sum_{l=0}^{n-[n/T]T} A^l b_{n-[n/T]T-l}.$$

Отсюда $\| x_n \| \le M \| x_{[n/T]T} \| + M$, так как $0 \le n - [n/T]\, T \le T - 1$. Поскольку по условию последовательность $\{ x_{kT}, k \ge 0 \}$ ограничена в B, то таковой является и $\{ x_n, n \ge 0 \}$.

Перейдем к доказательству самого утверждения.

Необходимость. Обозначим $y_k = x_{kT}$, $k \ge 0$, и покажем, что для последовательности $\{ y_k, k \ge 0 \}$ справедливо представление

$$y_{k+1} = A^T y_k + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1}, \quad k \ge 0. \tag{1}$$

Действительно, $\forall\, k \ge 0$

$$y_{k+1} = x_{(k+1)T} = A^{(k+1)T} x_0 + \sum_{l=0}^{(k+1)T-1} A^l b_{(k+1)T-l-1} =$$

$$= A^{(k+1)T} x_0 + \sum_{l=T}^{(k+1)T-1} A^l b_{(k+1)T-l-1} + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1} =$$

$$= A^T \left(A^{kT} x_0 + \sum_{l=0}^{kT-1} A^l b_{kT-l-1} \right) + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1} =$$

$$= A^T y_k + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1}.$$

Положим

$$b_n = \begin{cases} b, & \text{если } n \equiv T-1 \pmod T, \\ \overline{0}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда в соответствии с доказанным выше равенством

$$y_{k+1} = A^T y_k + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1} =$$

$$= A^T y_k + \sum_{l=1}^{T-1} A^l b_{T-l-1} + b_{T-1} = A^T y_k + b.$$

В силу произвольности выбора элемента $b \in B$ в соответствии с леммой 1 необходимо выполняются следующие условия:

1) $\sup\limits_{n \geq 0} \left\| A^{nT} \right\| < +\infty$;

2) $1 \in \rho(A^T)$.

В силу неравенств

$$\| A^n \| \leq \| A^{[n/T]T} \| \| A^{n-[n/T]T} \| \leq \sup_{0 \leq k \leq T-1} \| A^k \| \| A^{[n/T]T} \|$$

первое условие равносильно условию $\sup\limits_{n \geq 0} \left\| A^n \right\| < +\infty$.

Достаточность. Воспользуемся равенством (1). Согласно лемме 1, примененной к последовательности $\{y_k,\ k \geq 0\}$, эта последовательность ограничена, а в соответствии с леммой 2 из ограниченности $\{ y_k = x_{kT},\ k \geq 0\}$ следует ограниченность исходной последовательности $\{x_n,\ n \geq 0\}$.

Следствие. *Если последовательность* $\{ x_n,\ n \geq 0\}$, *определяемая соотношением* $x_{n+1} = Ax_n + b_n$, *ограничена в* B *для любых* x_0 *и* T*-периодической последовательности* $\{b_n,\ n \geq 0\} \subset B$, *то она суммируема по Чезаро для любых* x_0 *и* T*-периодической последовательности* $\{ b_n,\ n \geq 0\} \subset B$.

Доказательство. Как известно [3, с. 13], для $A \in L(B)$ с

$$\sup_{n \geq 0} \left\| A^n \right\| < +\infty:$$

$$\left\{ x \in B \mid \exists \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k x \right) n^{-1} \right\} = \operatorname{Ker}(A - I) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A - I)}.$$

Пусть $x_0 \in B$ и T-периодическая последовательность $\{ b_n,\ n \geq 0\} \subset B$ фиксированы. По предположению в силу утверждения 1 $1 \in \rho(A^T)$ и

$$\sup_{n \geq 0} \left\| A^n \right\| < +\infty.$$

Так как для $\{ y_k = x_{kT},\ k \geq 0\}$ справедливо равенство (1),

$$y_{k+1} = A^T y_k + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1} = A^T y_k + c, \quad k \geq 0,$$

то из представления

$$y_k = A^{kT} y_0 + (A^T - I)^{-1}(A^{kT} - I) c = A^{kT}(y_0 + (A^T - I)^{-1} c) - (A^T - I)^{-1} c$$

вытекает существование предела

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^{kT}(y_0 + (A^T - I)^{-1} c) \right) n^{-1} - (A^T - I)^{-1} c = -(A^T - I)^{-1} c,$$

т. е. $\{ y_k = x_{kT},\ k \geq 0\}$ суммируема по Чезаро. Покажем, что в этом случае последовательность $\{ x_n,\ n \geq 0\}$ суммируема по Чезаро. Действительно, отметив, что

$$\forall\ 1 \le r \le T-1 \quad \forall\ k \ge 0 : x_{kT+r} = A^r x_{kT} + \sum_{p=0}^{r-1} A^p b_{r-p-1} = A^r x_{kT} + c_r,$$

будем иметь

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)(n-1)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{[n/T]T} x_i\right)(n-1)^{-1} + \left(\sum_{i=[n/T]T+1}^{n} x_i\right)(n-1)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{T-1}\sum_{k=0}^{[n/T]-1} x_{kT+r}\right)(n-1)^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{[n/T]} x_{kT}\right)(n-1)^{-1} +$$

$$+ \left(\sum_{i=[n/T]T+1}^{n} x_i\right)(n-1)^{-1} = \left(\sum_{r=1}^{T-1}\sum_{k=0}^{[n/T]-1} (A^r x_{kT} + c_r)\right)(n-1)^{-1} +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{[n/T]} x_{kT}\right)(n-1)^{-1} + \left(\sum_{i=[n/T]T+1}^{n} x_i\right)(n-1)^{-1} =$$

$$= \frac{[n/T]-1}{n+1}\sum_{r=1}^{T-1} c_r + \sum_{r=1}^{T-1} A^r\left(\sum_{k=0}^{[n/T]-1} x_{kT}\right)[n/T]^{-1}\frac{[n/T]}{n+1} +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{[n/T]} x_{kT}\right)([n/T]+1)^{-1}\frac{[n/T]+1}{n+1} + \left(\sum_{i=[n/T]T+1}^{n} x_i\right)(n-1)^{-1}.$$

Первое и четвертое слагаемое стремятся при $n \to \infty$ к $\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{T-1} c_r$ и 0 соответственно. Предел при $n \to \infty$ второго и третьего слагаемого существует в силу изложенного выше.

2. Асимптотически периодические последовательности. Введем далее следующие обозначения:

$$B_a := \{x \in B \mid A^n x \to 0,\ n \to \infty\}, \quad B_c^T := \text{з.л.о.}\ \{x \in B \mid A^T x = \lambda x, |\lambda| = 1\},$$

$$\sigma_{\text{per}}(A^T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A^T x = \lambda x,\ \exists\, s \in \mathbb{N} : \lambda^s = 1\}.$$

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n,\ n \ge 0\} \subset B$ *называется асимптотически периодической, если существует периодическая последовательность* $\{c_n,\ n \ge 0\} \subset B : \|x_n - c_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

Утверждение 2. *Для того чтобы для любых* x_0 *и* T*-периодической последовательности* $\{b_n,\ n \ge 0\} \subset B$ *последовательность, определяемая соотношением* $x_{n+1} = Ax_n + b_n,\ n \ge 0$, *была асимптотически периодической, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1) $1 \in \rho(A^T)$;

2) *Множество* $\sigma_{\text{per}}(A^T)$ *конечно и*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid A^T x = \lambda x,\ |\lambda| = 1\} = \sigma_{\text{per}}(A^T);$$

3) *существует разложение* B *в прямую сумму* B_a *и* B_c^T : $B = B_a \oplus B_c^T$.

Доказательство будет опираться на следующую теорему.

Теорема. *Если при условии:* 4) $\forall x \in B: \overline{\{A^n x, n \geq 0\}}$ — *компакт в* B; *то* $B = B_a \oplus B_c$, *где* B_a, B_c — *инвариантные подпространства, определяемые следующим образом:*

$$B_a := \left\{x \in B \mid \lim_{n \to \infty} A^n x = 0\right\}, \quad B_c := \text{з.л.о. } \{x \in B \mid Ax = \lambda x, |\lambda| = 1\}.$$

Если при этом A — *сжатие, то оператор* $A_c = A|_{B_c}$ *изометричен, а* B_c *разлагается в ортогональную топологическую прямую сумму собственных подпространств. Обратно, если* $B = B_a \oplus B_c$, *то выполнено условие* 4 [3, с. 107].

***Замечание* 1.** Пусть A — сжатие. Если число собственных подпространств A_c конечно, то их топологическая прямая сумма в силу ортогональности замкнута и потому совпадает с алгебраической.

***Доказательство утверждения* 2.** *Необходимость.* Рассмотрим сначала случай $T = 1$. Заметим, что в соответствии с утверждением 1 необходимо выполняются следующие условия:

а) $\sup\limits_{n \geq 0} \|A^n\| < +\infty$;

б) $1 \in \rho(A)$.

Введем, далее, на B норму $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 := \sup_{n \geq 0} \|A^n x\| \quad (x \in B).$$

Относительно таким образом введенной нормы, эквивалентной исходной, оператор A является сжатием: $\|A\|_1 \leq 1$. В последующем изложении норму $\|\cdot\|_1$ мы будем обозначать через $\|\cdot\|$. Положим $b_n = \overline{0}$, $n \geq 0$, тогда $x_n = A^n x_0$, $x_0 \in B$, — произвольный элемент. Докажем, что $\{\mu \in \mathbb{C} \mid Ax = \mu x, |\mu| = 1\}$ $= \sigma_{\text{per}}(A)$, т. е. что из

$$\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C} \mid Ax = \mu x, |\mu| = 1\} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \lambda^n = 1.$$

Предположим, что $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda^n \neq 1$ и, следовательно, $\lambda = e^{i\pi\alpha}$, α — иррациональное число. В этом случае для $x \in B$ такого, что $Ax = \lambda x$ $(x \neq \overline{0})$ имеем $A^n x = \lambda^n x = e^{in\pi\alpha} x$ и, в силу иррациональности α, по теореме Кронекера

$$\overline{\{e^{in\pi\alpha}, n \geq 0\}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

откуда множество предельных точек последовательности $\{A^n x, n \geq 0\}$ есть $\{zx \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, что противоречит асимптотической периодичности последовательности $\{A^n x, n \geq 0\}$.

Воспользуемся теоремой, отметив вытекающее из нее условие 3, для доказательства конечности $\sigma_{\text{per}}(A)$. Рассмотрим ограничение A_c оператора A на инвариантное подпространство B_c и предположим, что $\sigma_{\text{per}}(A) = \sigma_{\text{per}}(A_c)$ — бесконечное множество. Выберем последовательность $\{\lambda_n, n \geq 1\} \subset \sigma_{\text{per}}(A)$ такую, что $\lambda_n \neq \lambda_m$, $n \neq m$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n / n^2$, для которого $A_c y_n = \lambda_n y_n$, $\|y_n\| = 1$, $n \geq 1$. Положим

$$y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n / n^2 \in B_c.$$

По предположению последовательность $\{A_c^n y, n \geq 0\}$ асимптотически периодическая, тогда $\exists\, s \in \mathbb{N}: \left\| A_c^{n+s} y - A_c^n y \right\| \to 0,\ n \to \infty$. Но

$$\left\| A_c^{n+s} y - A_c^n y \right\| = \left\| A_c^s y - y \right\|$$

в силу изометричности оператора A_c, отсюда $A_c^s y = y$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^s y_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda_n^s - 1\right)}{n^2} y_n = \overline{0}.$$

Так как $\{y_n, n \geq 0\}$ по построению состоит из линейно независимых элементов,

$$\{\lambda_n,\ n \geq 1\} \subset \{e^{2\pi i t/s},\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq t \leq s-1\},$$

что противоречит предположению о том, что $\lambda_n \neq \lambda_m,\ n \neq m$. Таким образом, в случае $T = 1$ необходимость доказана. Случай $T > 1$ сводится к предыдущему: последовательность $\{z_k = x_{kT},\ k \geq 0\}$ асимптотически периодическая, если асимптотически периодическая последовательность $\{x_n,\ n \geq 0\}$, и удовлетворяет соотношению

$$z_{k+1} = A^T z_k + \sum_{l=0}^{T-1} A^l b_{T-l-1}.$$

Выбрав T-периодическую последовательность $\{b_n,\ n \geq 0\}$ так, чтобы

$$b_{T-1} = -\sum_{l=1}^{T-1} A^l b_{T-l-1},$$

получаем $z_{k+1} = A^T z_k,\ k \geq 0$. (Ясно, что $A^{nT} x \to 0 \Leftrightarrow A^n x \to 0,\ n \to \infty$.)

Достаточность. Пусть $T = 1$. Тогда $x_{n+1} = A x_n + b,\ n \geq 0 \quad (b \in B)$, и поэтому $x_n = A^n (x_0 + (A - I)^{-1} b) - (A - I)^{-1},\ n \geq 1$. В силу последнего представления достаточно показать, что для любого $x \in B$ последовательность $\{x_n,\ n \geq 0\}$, определяемая соотношением $x_{n+1} = A x_n,\ n \geq 0,\ x_0 = x$, асимптотически периодическая. По условию 2 $\sigma_{\mathrm{per}}(A)$ конечно и

$$\sigma_{\mathrm{per}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A x = \lambda x,\ |\lambda| = 1\}.$$

Пусть

$$\sigma_{\mathrm{per}}(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \mid 1 \leq i \leq m,\quad \forall\, i \quad \exists\, n_i \in \mathbb{N}: \lambda_i^{n_i} = 1\}.$$

Согласно условию 3 $B = B_a \oplus B_c$. При этом с учетом теоремы и замечания 1 к ней

$$B_c = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I),$$

поскольку аналогично доказательству необходимости можно считать A сжатием. Таким образом, для $x \in B$ справедливо равенство $x = x_a + x_c$, $x_a \in B_a$, $x_c \in B_c$, причем для $x_c \in B_c$

$$\exists \left\{ x_c^i \,\middle|\, 1 \le i \le m, \forall\, i\colon Ax_c^i = \lambda_i x_c^i,\ \lambda_i^n = 1,\ \text{и}\ x_c = \sum_{i=1}^{m} x_c^i \right\}.$$

Тогда последовательность $\{A^k x_c,\ k \ge 0\}$ периодическая. В самом деле, обозначив $p = \text{НОК}(n_1, \ldots, n_m)$, получим

$$A^p x_c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^p x_c^i = \sum_{i=1}^{m} x_c^i = x_c.$$

С другой стороны, $\forall\, x_a \in B_a\colon A^n x_a \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому, взяв в качестве $\{c_k, k \ge 0\}$ в определении асимптотической периодичности для $\{x_k,\ k \ge 0\}$ последовательность $\{A^k x_c,\ k \ge 0\}$, будем иметь

$$\| x_k - c_k \| = \| A^k (x_a + x_c) - A^k x_c \| = \| A^k x_a \| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Перейдем к случаю $T > 1$. Согласно доказанной достаточности для $T = 1$ и в силу равенства (1) получаем, что последовательность $\{x_{kT},\ k \ge 0\}$ асимптотически периодическая. Тогда $\forall\, r\colon 1 \le r \le T-1$ последовательность $\{x_{kT+r}, k \ge 0\}$ также асимптотически периодическая. Действительно,

$$x_{kT+r} = A^r x_{kT} + \sum_{l=0}^{r-1} A^l b_{r-l-1},$$

и если $\{c_k, k \ge 0\} \subset B$ — периодическая последовательность такая, что $\| x_{kT} - c_k \| \to 0$, $k \to \infty$, то периодическая последовательность

$$\left\{ A^r c_k + \sum_{l=0}^{r-1} A^l b_{r-l-1},\ k \ge 0 \right\}$$

является асимптотически предельной для последовательности $\{x_{kT+r},\ k \ge 0\}$. Поскольку

$$\{x_n,\ n \ge 0\} = \bigcup_{r=0}^{T-1} \{x_{kT+r},\ k \ge 0\},$$

то последовательность $\{x_n,\ n \ge 0\}$ асимптотически периодическая.

Замечание 2. Отметим, что если для $\{x_n,\ n \ge 0\}$ из утверждения 2 $\{c_n, n \ge 0\}$ — периодическая последовательность такая, что $\| x_n - c_n \| \to 0$, $n \to \infty$, то $c_{n+1} = Ac_n + b_n$, $n \ge 0$. Для доказательства достаточно в равенстве $x_{n+1} = Ax_n + b_n$, $n \ge 0$, перейти к пределу при $n \to \infty$.

Замечание 3. Определение. *Назовем последовательность $\{x_n,\ n \ge 0\} \subset B$ асимптотически периодической порядка T, если последовательность $\{c_n,\ n \ge 0\}$ из определения асимптотической периодичности есть T-периодическая последовательность.*

Предложение. *Для того чтобы для любых x_0 и асимптотически перио-*

дической последовательности порядка T $\{b_n,\ n \geq 0\} \subset B$ *последовательность, определяемая соотношением*

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n, \quad n \geq 0,$$

была ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Положим $x_0 = \overline{0}$, $b_n = c_n + d_n$, $n \geq 0$, где $\{c_n,\ n \geq 0\}$ — T-периодическая последовательность в B,

$$d_n = \begin{cases} d, & n = 0, \\ A^n d/n, & n \geq 1, \end{cases} \quad d \in B$$

(в силу утверждения 1 $\sup\limits_{n \geq 0} \| A^n \| < +\infty$). Последовательность $\{b_n,\ n \geq 0\}$ асимптотически периодическая порядка T. Теперь имеем

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} A^k d_{n-k}.$$

Последовательности

$$\{x_n,\ n \geq 0\}, \ \left\{ \sum_{k=0}^{n} A^k c_{n-k},\ n \geq 0 \right\}$$

ограничены в B согласно предположению. Следовательно,

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} A^k d_{n-k} = A^n d \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1 \right),\ n \geq 1 \right\}$$

также ограничена в B. Поскольку это справедливо для любого $d \in B$, по принципу равномерной ограниченности

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1 \right) A^k \right\| < +\infty,$$

откуда $\| A^n \| \to 0$ и поэтому $\sigma(A) \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$.

Таким образом, класс T-периодических последовательностей $\{b_n,\ n \geq 0\}$ является в определенном смысле оптимальным для получения нетривиальных условий асимптотической периодичности последовательностей $\{x_n,\ n \geq 0\}$.

1. *Бойков И. В., Жечев Й. И.* Об устойчивости уравнений в конечных разностях // Исследования по прикладной математике. – 1975. – Вып. 3. – С. 36 – 53.
2. *Ву Куок Фонг.* Асимптотическая почти-периодичность и компактифицирующие представления полугрупп // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 688 – 692.
3. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. – Харьков: Вища шк., 1985. – 144 с.

Получено 01. 06. 92