УДК 517.925

М. Т. Терехин, канд. физ.-мат. наук (Рязан. пед. ин-т)

НЕНУЛЕВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Theorems are proved, in which the main conditions for the existence of a nontrivial periodic solution are formulated in terms of the properties of the elements of a matrix of linear approximation to the system.

Доведено теореми, в яких основні умови існування ненульового періодичного розв'язку формулюються у термінах властивостей елементів матриці лінійного наближення системи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t, \lambda)x + f(t, x, \lambda)x, \tag{1}$$

в которой

$$x \in E_2, \quad A(t, \lambda) = [a_{ij}(t, \lambda)]_1^2,$$

$f(t, x, \lambda) = [f_{ij}(t, x, \lambda)]_1^2$ — ω-периодические по t матрицы, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, $t \in R =]-\infty, \infty[$, E_s — s-мерное векторное пространство.

Пусть $|x| = \max_i |x_i|$, $D(\delta_0) = \{(x, \lambda) : |x| \le \delta_0, \ |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $w(\delta_0) = \{\alpha : \alpha \in E_2, \ |\alpha| \le \delta_0\}$, $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_m, \ |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, $\lambda_0 \in E_m$, λ_0 — значение параметра λ.

Далее всюду предполагаем, что на множестве $R \times D(\delta_0)$ матрицы $A(t, \lambda)$ и $f(t, x, \lambda)$ непрерывны, $f(t, 0, \lambda) = 0$, система (1) имеет свойство единственности решения.

Символом $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ обозначим непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \alpha, \lambda) = \alpha$. Очевидно, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $x \equiv 0$ является решением системы (1).

Одновременно с системой (1) рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = B(t, \alpha, \lambda)y, \tag{2}$$

в которой $y \in E_2$, матрица $B(t, \alpha, \lambda)$ определяется равенством

$$B(t, \alpha, \lambda) = A(t, \lambda) + f(t, x(t, \alpha, \lambda), \lambda).$$

Пусть $Y(t, \alpha, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (2), $Y(0, \alpha, \lambda) = E$, E — единичная матрица.

Теорема 1. *Решение* $x(\cdot, \alpha_0, \lambda_0)$ *системы* (1), *определенное на сегменте* $[0, \omega]$, *является* ω-*периодическим решением этой системы тогда и только тогда, когда* α_0 *является неподвижной точкой оператора* Γ, *определенного равенством*

$$[Y(\omega, \alpha, \lambda_0) - E]\alpha^* = 0 \tag{3}$$

при условии, что $\Gamma(\alpha) = \alpha^*$.

Теорема непосредственно следует из построения системы (2) и определения периодического решения.

Пусть $X(t, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t, \lambda)x$, $X(0, \lambda) = E$. Тогда матрицу $Y(t, \alpha, \lambda)$ можно представить в виде $Y(t, \alpha, \lambda) = X(t, \lambda) + \Phi(t, \alpha, \lambda)$, $\Phi(0, \alpha, \lambda)$ — нулевая матрица, $\Phi(t, \alpha, \lambda) = [\varphi_{ij}(t, \alpha, \lambda)]_1^2$, $\lim_{\alpha \to 0} \varphi_{ij}(\omega, \alpha, \lambda) = 0$ равномерно относительно λ.

Теорема 2. *Если* 1) *существует число* $\delta \in \,]0, \delta_0]$ *такое, что при любом* $t \in [0, \omega]$ *на множестве* $\Lambda(\delta) \in E_2$

$$a_{11}(t, \lambda) = a_{22}(t, \lambda), \quad a_{12}(t, \lambda) = -a_{12}(t, \lambda),$$

$$\int_0^\omega a_{11}(t, \lambda)\, dt = \sum_{s=1}^{2} \alpha_{1s}(\lambda)\left(\lambda_s - \lambda_s^0\right)^{\mu_s} + o_1(|\bar{\lambda}|),$$

$$\int_0^\omega a_{12}(t, \lambda)\, dt = \int_0^\omega a_{12}(t, \lambda_0)\, dt + \sum_{s=1}^{2} \alpha_{2s}(\lambda)\left(\lambda_s - \lambda_s^0\right)^{\mu_s} + o_2(|\bar{\lambda}|),$$

вектор $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in E_2$ *удовлетворяет равенству* $\cos \int_0^\omega a_{12}(t, \lambda_0)\, dt = 1$, $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, *при любом* $p \in \{1, 2\}$ $\bar{\lambda}_p = (\lambda_p - \lambda_p^0)^{\mu_p}$, $\lim_{\bar{\lambda} \to 0} o_p(|\bar{\lambda}|)/|\bar{\lambda}| = 0$, *функции* $\lambda \to \alpha_{ps}(\lambda)$ *непрерывны, матрица* $[\alpha_{ps}(\lambda_0)]_1^2$ *неособенная*; 2) *при любом* $s \in \{1, 2\}$ $\mu_s > 0$ *и удовлеворяет равенству* $(-\gamma)^{\mu_s} = -\gamma^{\mu_s}$, $\gamma > 0$ — *некоторое число, то система* (1) *имеет ненулевое периодическое решение.*

Доказательство. Пусть числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что при любых $\alpha \in w(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) определено на промежутке $[0, \omega]$ и при любом $t \in [0, \omega]$ выполнено неравенство $|x(t, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$.

Из условия (1) теоремы следует, что фундаментальную матрицу $Y(t, \alpha, \lambda)$ системы (2) можно представить в виде

$$Y(t, \alpha, \lambda) - E =$$

$$\begin{pmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(\xi,\lambda)d\xi\right]\cos\left[\int_0^t a_{12}(\xi,\lambda)d\xi\right] - 1 + \varphi_{11}(t, \alpha, \lambda) & \exp\left[\int_0^t a_{11}(\xi,\lambda)d\xi\right]\sin\left[\int_0^t a_{12}(\xi,\lambda)d\xi\right] + \varphi_{12}(t, \alpha, \lambda) \\ -\exp\left[\int_0^t a_{11}(\xi,\lambda)d\xi\right]\sin\left[\int_0^t a_{12}(\xi,\lambda)d\xi\right] + \varphi_{21}(t, \alpha, \lambda) & \exp\left[\int_0^t a_{11}(\xi,\lambda)d\xi\right]\cos\left[\int_0^t a_{12}(\xi,\lambda)d\xi\right] - 1 + \varphi_{22}(t, \alpha, \lambda) \end{pmatrix}$$

Убедимся, что число $\delta \in \,]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любого числа $\delta_1 \in \,]0, \delta]$ существуют векторы $\alpha \in w(\delta_1)$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$, при которых выполнены равенства

$$\begin{gathered} \exp\left[\int_0^\omega a_{11}(t, \lambda)dt\right]\sin\left[\int_0^\omega a_{12}(t, \lambda)dt\right] + \varphi_{12}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \\ \exp\left[\int_0^\omega a_{11}(t, \lambda)dt\right]\cos\left[\int_0^\omega a_{12}(t, \lambda)dt\right] - 1 + \varphi_{12}(\omega, \alpha, \lambda) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Система (4) с учетом того, что $\operatorname{tg} \int_0^\omega a_{12}(t, \lambda_0)\,dt = 0$, принимает вид

$$\exp 2\left[\int_0^\omega a_{11}(t,\lambda)\,dt\right] = 1 - 2\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda) + \varphi_{22}^2(\omega,\alpha,\lambda),$$
$$\operatorname{tg}\left[\int_0^\omega a_{12}(t,\lambda) - \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)\,dt\right] = 2\,\frac{\varphi_{12}(\omega,\alpha,\lambda)}{1-\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda)}. \tag{5}$$

Из условия теоремы и того, что

$$\exp h - 1 = h + o(h), \quad \operatorname{tg} h = h + o(h),$$

следует, что систему (5) можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{2} \alpha_{1s}(\lambda)\,\bar\lambda_s = \frac{1}{2}\left[\varphi_{22}^2(\omega,\alpha,\lambda) - 2\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda) + \varphi_{12}^2(\omega,\alpha,\lambda)\right] + o_1(|\bar\lambda|)$$
$$\sum_{s=1}^{2} \alpha_{2s}(\lambda)\,\bar\lambda_s = -\frac{\varphi_{12}(\omega,\alpha,\lambda)}{1-\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda)} + o_2(|\bar\lambda|). \tag{6}$$

Пусть $\Delta(\lambda) = [\alpha_{ps}(\lambda)]_1^2$. Так как матрица $\Delta(0)$ неособенная, то $\delta \in\,]0, \delta_0]$ можно выбрать таким образом, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ матрица $\Delta(\lambda)$ также неособенная. Систему (6) запишем в виде

$$\bar\lambda = \Delta^{-1}(\lambda)\left(o(|\bar\lambda|) + \varphi(\omega,\alpha,\lambda)\right),$$

где

$$o(|\bar\lambda|) = \left(o_1(|\bar\lambda|),\, o_2(|\bar\lambda|)\right), \quad \varphi(\omega,\alpha,\lambda) =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(\varphi_{22}^2(\omega,\alpha,\lambda) - 2\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda) + \varphi_{12}^2(\omega,\alpha,\lambda),\; -\frac{\varphi_{12}(\omega,\alpha,\lambda)}{1-\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda)}\right)\right].$$

Оператор A определим равенством

$$A\bar\lambda = \Delta^{-1}(\lambda)\left(o(|\bar\lambda|) + \varphi(\omega,\alpha,\lambda)\right).$$

Учитывая свойства $o(|\bar\lambda|)$, $\varphi(\omega,\alpha,\lambda)$, можно утверждать, что существует такое число $\delta \in\,]0, \delta_0]$, что при любом $\delta_1 \in\,]0, \delta]$ оператор A на множестве $\{\bar\lambda : |\bar\lambda| \le \delta_1\}$ непрерывен и при любом фиксированном $\alpha \in w(\delta_1)$ для любого вектора $\bar\lambda$, удовлетворяющего неравенству $|\bar\lambda| \le \delta_1$, справедливо включение $A\bar\lambda \in \{\bar\lambda : |\bar\lambda| \le \delta_1\}$. Следовательно, при любом фиксированном $\alpha \in w(\delta_1)$ оператор A на множестве $\{\bar\lambda : |\bar\lambda| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку.

Пусть вектор $\alpha^* = (0, \alpha_2)$, $\alpha_2 \ne 0$ таков, что $|\alpha^*| \le \delta_1$. Из приведенных рассуждений следует, что существует $\lambda^* \in \Lambda(\delta_1)$, при котором второй столбец матрицы $Y(\omega, \alpha^*, \lambda^*) - E$ является нулевым. Поэтому при $\lambda = \lambda^*$ вектор α^* является неподвижной точкой оператора Γ, определенного равенством (3). Тогда по теореме 1 $x(\cdot, \alpha^*, \lambda^*)$ — ненулевое периодическое решение системы (1). Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* 1) *существует число* $\delta \in]0, \delta_0]$ *такое, что при любом* $t \in [0, \omega]$ *на множестве* $\Lambda(\delta) \subset E_1$

$$a_{11}(t,\lambda) = a_{22}(t,\lambda), \quad a_{12}(t,\lambda) = -a_{21}(t,\lambda), \quad \int_0^\omega a_{11}(t,\lambda)dt = 0,$$

$$\int_0^\omega a_{12}(t,\lambda)dt = \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)dt + \alpha(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^\mu + o((\lambda-\lambda_0)^\mu),$$

число λ_0 *удовлетворяет равенству* $\cos\int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)dt = 1$, $\lim\limits_{\lambda-\lambda_0\to 0} o((\lambda - \lambda_0)^\mu)/(\lambda-\lambda_0)^\mu = 0$, *функция* $\lambda \to \alpha(\lambda)$ *непрерывна*, $\alpha(\lambda_0) \neq 0$;
2) $\mu > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^\mu = -\gamma^\mu$; 3) *на множестве* $R \times D(\delta_0)$ *выполнены равенства* $f_{ii}(t,x,\lambda) = 0$, $f_{12}(t,x,\lambda) = -f_{21}(t,x,\lambda)$, $i = 1, 2$, *то система* (1) *имеет ненулевое периодическое решение.*

Доказательство. В условиях теоремы заменой переменных

$$x_1 = \left(\exp\int_0^t a_{11}(\xi,\lambda)d\xi\right)v_1, \quad x_2 = \left(\exp\int_0^t a_{22}(\xi,\lambda)d\xi\right)v_2$$

систему (1) сведем к системе

$$\dot v = C(t,\lambda)v + \psi(t,v,\lambda)v, \tag{7}$$

в которой в $C(t,\lambda) = [c_{ij}(t,\lambda)]_1^2$, $\psi(t,v,\lambda) = [\psi_{ij}(t,v,\lambda)]_1^2$, $c_{ii}(t,\lambda) \equiv 0$, $c_{ij}(t,\lambda) = a_{ij}(t,\lambda)$, $\psi_{ii}(t,v,\lambda) \equiv 0$, $\psi_{12}(t,v,\lambda) = -\psi_{21}(t,v,\lambda)$, $i,j = 1,2$.

Пусть числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что при любых $\alpha \in w(\delta)$ и $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $v(\cdot,\alpha,\lambda)$ системы (7) определено на промежутке $[0,\omega]$ и при любом $t \in [0,\omega]$ выполнено неравенство $|v(t,\alpha,\lambda)| < \varepsilon$. Тогда одновременно с системой (7) рассмотрим систему

$$\dot z = S(t,\alpha,\lambda)z, \tag{8}$$

в которой матрица $S(t,\alpha,\lambda)$ определяется равенством $S(t,\alpha,\lambda) = C(t,\lambda) + \psi(t, v(t,\alpha,\lambda),\lambda)$. Фундаментальная матрица $Z(t,\alpha,\lambda)$ системы (8) определяется равенством

$$Z(t,\alpha,\lambda) - E =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\int_0^t [a_{12}(\xi,\lambda) + \overline\psi_{12}(\xi,\alpha,\lambda)]d\xi - 1 & \sin\int_0^t [a_{12}(\xi,\lambda) + \overline\psi_{12}(\xi,\alpha,\lambda)]d\xi \\ -\sin\int_0^t [a_{12}(\xi,\lambda) + \overline\psi_{12}(\xi,\alpha,\lambda)]d\xi & \cos\int_0^t [a_{12}(\xi,\lambda) + \overline\psi_{12}(\xi,\alpha,\lambda)]d\xi - 1 \end{pmatrix},$$

в котором $\overline\psi_{12}(t,\alpha,\lambda) = \psi_{12}(t, v(t,\alpha,\lambda),\lambda)$.

Убедимся, что число $\delta \in]0,\delta_0]$ можно выбрать так, чтобы для любого числа $\delta_1 \in]0,\delta_0]$ существовали вектор $\alpha \in w(\delta_1)$, $\alpha \neq 0$ и число $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$, при которых выполнены равенства

$$\sin \int_0^\omega [a_{12}(t,\lambda) + \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)]\, dt = 0,$$
$$\cos \int_0^\omega [a_{12}(t,\lambda) + \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)]\, dt = 1. \tag{9}$$

Равенства (9) с учетом того, что

$$\cos \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)\, dt = 1,$$

можно записать в виде

$$\sin \left\{ \int_0^\omega [a_{12}(t,\lambda) + \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)]\, dt - \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)\, dt \right\} = 0,$$
$$\cos \left\{ \int_0^\omega [a_{12}(t,\lambda) + \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)]\, dt - \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)\, dt \right\} = 1. \tag{10}$$

Равенства (10) будут выполнены, если будет выполнено равенство

$$\int_0^\omega a_{12}(t,\lambda)\, dt = \int_0^\omega a_{12}(t,\lambda_0)\, dt - \int_0^\omega \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)\, dt$$

и, следовательно,

$$\alpha(\lambda)\,\overline{\lambda} = o(|\overline{\lambda}|) - \int_0^\omega \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)\, dt,$$

в котором $\overline{\lambda} = (\lambda - \lambda_0)^\mu$.

Оператор A определим следующим образом:

$$A\,\overline{\lambda} = \frac{1}{\alpha(\lambda)} \left[o(|\overline{\lambda}|) - \int_0^\omega \overline{\psi}_{12}(t,\alpha,\lambda)\, dt \right].$$

Тогда, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 2, убеждаемся в справедливости теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда систему (1) можно привести к системе, к которой может быть применена либо теорема 2, либо теорема 3.

Пусть в системе (1) на множестве $R \times \Lambda(\delta)$ $a_{12}(t,\lambda) = \beta_1(\lambda)\varphi(t,\lambda)$, $a_{21}(t,\lambda) = -\beta_2(\lambda)\varphi(t,\lambda)$, $\beta_1(\lambda) > 0$, $\beta_2(\lambda) > 0$, $\varphi(t,\lambda)$ — ω-периодическая по t непрерывная функция. Заменой переменных $x_1 = \sqrt{\beta_1(\lambda)/\beta_2(\lambda)}\,\overline{x}_1$, $x_2 = \overline{x}_2$ (сохраняя прежние обозначения) систему (1) преобразуем в систему вида

$$\dot{x} = A^*(t,\lambda)x + \bar{f}(t,x,\lambda)x, \tag{11}$$

в которой матрица $A^*(t,\lambda)$ определяется равенством

$$A^*(t,\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,\lambda) & \sqrt{\beta_1(\lambda)\,\beta_2(\lambda)}\,\varphi(t,\lambda) \\ -\sqrt{\beta_1(\lambda)\,\beta_2(\lambda)}\,\varphi(t,\lambda) & a_{22}(t,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(t,x,\lambda) = [\,\bar{f}_{ij}(t,x,\lambda)]_1^2.$$

Теорема 4. *Если* 1) *существует число* $\delta \in]0, \delta_0]$ *такое, что при любом* $t \in [0, \omega]$ *на множестве* $\Lambda(\delta) \subset E_2$

$$a_{11}(t,\lambda) = a_{22}(t,\lambda), \quad \int_0^\omega a_{11}(t,\lambda)\,dt = \sum_{s=1}^{2} \alpha_{1s}(\lambda)\left(\lambda_s - \lambda_s^0\right)^{\mu_s} + o_1(|\bar\lambda|),$$

$$\int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda)\,\beta_2(\lambda)}\,\varphi(t,\lambda)\,dt = \sum_{s=1}^{2} \alpha_{2s}(\lambda)\left(\lambda_s - \lambda_s^0\right)^{\mu_s} + o_2(|\bar\lambda|) +$$

$$+ \int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda_0)\,\beta_2(\lambda_0)}\,\varphi(t,\lambda_0)\,dt,$$

вектор $\lambda_0 \in E_2$ *удовлетворяет равенству*

$$\cos \int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda_0)\,\beta_2(\lambda_0)}\,\varphi(t,\lambda_0)\,dt = 1, \quad \bar\lambda = (\bar\lambda_1, \bar\lambda_2),$$

при любом $p \in \{1, 2\}$ $\bar\lambda_p = \left(\lambda_p - \lambda_p^0\right)^{\mu_p}$, $\lim\limits_{\bar\lambda \to 0} o_p(|\bar\lambda|)/|\bar\lambda| = 0$, *функции* $\lambda \to \to \alpha_{ps}(\lambda)$ *непрерывны, матрица* $[\alpha_{ps}(\lambda_0)]_1^2$ *неособенная;* 2) *при любом* $s \in \{1, 2\}$ $\mu_s > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^{\mu_s} = -\gamma^{\mu_s}$, $\gamma > 0$ — *некоторое число, то система* (11) *имеет ненулевое периодическое решение.*

Теорема 5. *Если* 1) *существует число* $\delta \in]0, \delta_0]$ *такое, что при любом* $t \in [0, \omega]$ *на множестве* $\Lambda(\delta) \subset E_1$

$$a_{11}(t,\lambda) = a_{22}(t,\lambda), \quad \int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda)\,\beta_2(\lambda)}\,\varphi(t,\lambda)\,dt = \alpha(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{\mu} +$$

$$+ \int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda_0)\,\beta_2(\lambda_0)}\,\varphi(t,\lambda_0)\,dt + o((\lambda - \lambda_0)^{\mu}), \quad \int_0^\omega a_{11}(t,\lambda)\,dt = 0,$$

число λ_0 *удовлетворяет равенству* $\cos\int_0^\omega \sqrt{\beta_1(\lambda_0)\,\beta_2(\lambda_0)}\,\varphi(t,\lambda_0)\,dt = 1$, $\lim\limits_{\lambda - \lambda_0 \to 0} o((\lambda - \lambda_0)^{\mu})/(\lambda - \lambda_0)^{\mu} = 0$, *функция* $\lambda \to \alpha(\lambda)$ *непрерывна,* $\alpha(\lambda_0) \neq \neq 0$; 2) *число* $\mu > 0$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^{\mu} = -\gamma^{\mu}$; 3) *на множестве* $R \times D(\delta_0)$ *выполнены равенства*

$$\bar f_{ii}(t,x,\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \bar f_{12}(t,x,\lambda) = -\bar f_{21}(t,x,\lambda),$$

то система (11) *имеет ненулевое периодическое решение.*

Доказательства теорем 4 и 5 аналогичны доказательствам теорем соответственно 2 и 3.

Отметим, что задача существования ненулевого периодического решения неавтономных систем иными методами изучалась в работе [1].

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 331 с.

Получено 23.03.92