УДК 519.8

О. А. Емец, канд. физ.-мат. наук (Харьк. ин-т радиоэлектроники)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ НА ЕВКЛИДОВОМ МНОЖЕСТВЕ СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

The general approach is suggested to the study of extremal properties of nondifferentiable convex functions on Euclidean combinatorial sets. On the basis of this approach, by solving the linear optimization problem on the set of combinations with repetitions, we establish the estimates for the minimal values of convex and strongly convex objective functions in problems of optimization on the set of combinations with repetitions and the corresponding sufficient conditions for the existence of the minimum.

На основі запропонованого загального підходу до дослідження екстремальних властивостей недиференційовних опуклих функцій на евклідових комбінаторних множинах, а також розв'язку лінійної задачі оптимізації на множині сполучень з повтореннями одержані оцінки мінімумів опуклих та сильно опуклих цільових функцій в задачах оптимізації на множині сполучень з повтореннями та відповідні достатні умови мінімуму.

Пусть E — евклидово комбинаторное множество [1, 2] пространства R^k. Рассмотрим вопросы, связанные с оптимизацией на некоторых типах евклидовых комбинаторных множеств разных классов функций. Предварительно установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x)$ — *выпуклая и конечная функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве* $X \supset E$. *Тогда для всех внутренних точек* $y \in X \subset R^k$

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + \min_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i, \tag{1}$$

где $p(y) = (p_1(y), \ldots, p_k(y))$ — *субградиент функции* $\varphi(x)$ *в точке* y.

Доказательство. Воспользуемся фактом существования непустого выпуклого замкнутого и ограниченного множества субградиентов $p(y)$ (см., например, [3]) в любой внутренней точке y выпуклого множества X — области определения конечной выпуклой функции $\varphi(x)$. Причем если множество субградиентов состоит из единственной точки, то она является градиентом $\nabla \varphi(y)$ функции $\varphi(x)$ в точке y, в противном случае функция $\varphi(x)$ в точке y недифференцируема. Таким образом, по определению субградиента $\forall x$, $y \in \operatorname{int} X$ справедливо неравенство $\varphi(x) - \varphi(y) \geq (p(y), x - y)$, где $\operatorname{int} X$ — множество внутренних точек множества X. Переходя к нахождению минимума функции $\varphi(x)$ на множестве E, после очевидных преобразований получаем

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - \sum_{i=1}^{k} p_i(y) y_i + \min_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если при выполнении условий леммы* 1 *функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема на множестве* X, *то для всех внутренних точек* $y \in X$

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (\nabla \varphi(y), y) + \min_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y_i} x_i. \tag{2}$$

Лемма 2. *Чтобы точка* $z = (z_1, \ldots, z_k) \in E$ *доставляла минимум на мно-*

жестве E конечной выпуклой на выпуклом замкнутом множестве $X \subset R^k$ функции $\varphi(x)$; $E \subset \operatorname{int} X$, достаточно, чтобы

$$\min_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(z) x_i = (p(z), z), \tag{3}$$

где $p(z) = (p_1(z), \ldots, p_k(z))$ — субградиент функции $\varphi(x)$ в точке z, $\operatorname{int} X$ — множество внутренних точек множества X, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$.

Доказательство. Пусть выполняется равенство (3). Тогда, полагая в соотношении (1) $y = z$, имеем

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \geq \varphi(z).$$

Так как $z \in E$, то по определению минимума

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \leq \varphi(z),$$

т. е.

$$\min_{x \in E} \varphi(x) = \varphi(z), \quad z = \arg \min_{x \in E} \varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Чтобы точка $z = (z_1, \ldots, z_k) \in E$ доставляла минимум на множестве E конечной выпуклой и дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве X функции $\varphi(x)$, $E \subset \operatorname{int} X$, достаточно, чтобы*

$$\min_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} x_i = (\nabla \varphi(z), z). \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Чтобы применить приведенные выше оценки к конкретным евклидовым комбинаторным множествам, необходимо уметь решать задачи минимизации линейных функций на этих множествах. В [4, 5] приводится формулировка теоремы, решающей задачу минимизации линейной функции на множестве сочетаний с повторениями $\overline{S}_n^k(g)$. Ниже дается ее доказательство. Введем необходимые для этого определения и обозначения.

Набор чисел, с помощью которого образуется множество E, обозначим через

$$g = \{g_1, \ldots, g_\eta\} = \{g^1, \ldots, g^1, g^2, \ldots, g^2, \ldots, g^n, \ldots, g^n\},$$

где число g^i повторяется η_i раз и $\eta_1 + \ldots + \eta_n = \eta$.

Рассмотрим множество k-сочетаний с повторениями из η элементов набора $g = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$, в котором n различных элементов g^i повторяются $\eta_i = k$ раз, т. е. $\eta = nk$. Не нарушая общности, можем считать, что

$$g_1 \leq \ldots \leq g_\eta, \tag{5}$$

$$g^1 < \ldots < g^n. \tag{6}$$

Элементами множества k-сочетаний с повторениями являются наборы

$$\left(g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_k}\right), \tag{7}$$

где $g_{\alpha_i} \in g$, $\alpha_i \in J_\eta$, $i \in J_k$, а J_n здесь и ниже обозначает множество n первых натуральных чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим $J_n \cup \{0\} = J_n^0$, $J_0 = \varnothing$.

Наборы вида (7), отличающиеся лишь порядком следования составляющих их символов g_{α_i}, $i \in J_k$, являются совпадающими элементами множества k-сочетаний с повторениями. Поэтому достаточно из всех таких наборов рассматривать один, соответствующий какому-либо фиксированному порядку следования в (7) элементов $g^1, \dots, g^n$. Не нарушая общности, можно считать, что для любого элемента вида (7) из множества k-сочетаний с повторениями выполняется неравенство

$$g_{\alpha_1} \le g_{\alpha_2} \le \dots \le g_{\alpha_k}, \tag{8}$$

где $g_{\alpha_i} \in g$, $\alpha_i \in J_\eta$, $i \in J_k$. Множество k-сочетаний с повторениями вида (7), для которых выполняется неравенство (8), удовлетворяет определению евклидового комбинаторного множества [1]. Обозначим это евклидово множество k-сочетаний, рассматриваемых как точки пространства R^k, через $\overline{S}_n^k(g)$ и назовем многогранником сочетаний с повторениями $\overline{Q}_n^k(g) = \operatorname{conv} \overline{S}_n^k(g)$.

Теорема 1. *Если*

$$x^* = \left(x_1^*, \dots, x_k^*\right) = \arg \min_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \quad c_i \in R^1 \quad \forall\, i \in J_k,$$

то

$$x_i^* = \begin{cases} g^1 & \forall\, i \in J_s; \\ g^n & \forall\, i \in J_k \setminus J_s, \quad s \in J_k^0, \end{cases} \tag{9}$$

где s определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{t} c_{s+1-j} \ge 0 \quad \forall\, t \in J_s; \\ &\sum_{j=1}^{t} c_{s+j} \le 0 \quad \forall\, t \in J_{k-s}. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим $\overline{Q}_n^k(g) = \operatorname{conv} \overline{S}_n^k(g)$. Очевидно, что

$$x^* = \arg \min_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \arg \min_{x \in \overline{Q}_n^k(g)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j. \tag{11}$$

Как известно, линейная функция достигает минимума в вершине допустимого многогранника. А из [4] следует, что многогранник $\overline{Q}_n^k(g)$ — k-симплекс, вершинами которого могут быть только точки вида $u_j = (g^1, \dots, g^1, g^n, \dots \dots, g^n)$, где координата g^1 повторяется $k - j + 1$ раз, а g^n — $j - 1$ раз; $1 \le j \le \le k + 1$ Предположим, что $x^* = u_{k-i+1}$, т. е. x^* содержит i, $i \in J_k^0$, первых компонент g^1 и $k - i$ компонент g^n. Согласно [4] все остальные вершины многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$ смежны с x^*. Как известно, значение

$$(c, x^*) = (c, u_{k-i+1}) = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = g^1(c_1 + \dots + c_i) + g^n(c_{i+1} + \dots + c_k)$$

при $x = x^*$, если x^* удовлетворяет соотношению (11), не больше значения этой функции во всех смежных с x^* k вершинах многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$. Запишем эти k неравенств и преобразуем их, обозначив $\delta = g^n : g^1$ и рассмотрев при этом три случая: 1) $g^1 > 0$; 2) $g^1 < 0$; 3) $g^1 = 0$:

$$\begin{aligned}
&(c, x^*) \le g^1(c_1 + \ldots + c_k),\\
&(c, x^*) \le g^1\left(c_1 + \ldots + c_{k-1}\right) + g^n c_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(c, x^*) \le g^1\left(c_1 + \ldots + c_{i+1}\right) + g^n\left(c_{i+2} + \ldots + c_k\right),\\
&(c, x^*) \le g^1\left(c_1 + \ldots + c_{i-1}\right) + g^n(c_i + \ldots + c_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(c, x^*) \le g^1 c_1 + g^n(c_2 + \ldots + c_k),\\
&(c, x^*) \le g^n(c_1 + \ldots + c_k).
\end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим первый случай ($g^1 > 0$), разделив обе части всех неравенств на g^1. С учетом того, что

$$(c, x^*) = g^1(c_1 + \ldots + c_i) + g^n(c_{i+1} + \ldots + c_k),$$

преообразуем систему (12) к виду

$$\begin{aligned}
&(\delta - 1)\left(c_{i+1} + \ldots + c_k\right) \le 0,\\
&(\delta - 1)\left(c_{i+1} + \ldots + c_{k-1}\right) \le 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\delta - 1) c_{i+1} \le 0,\\
&(1 - \delta) c_i \le 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(1 - \delta)(c_1 + \ldots + c_i) \le 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

С учетом $\delta > 1$ из (13) имеем

$$\begin{aligned}
&c_{i+1} + \ldots + c_k \le 0,\\
&c_{i+1} + \ldots + c_{k-1} \le 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{i+1} \le 0,\\
&c_i \ge 0,\\
&c_{i-1} + c_i \ge 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1 + \ldots + c_i \ge 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Система неравенств (14) совпадает с (10) при $i = s$.

Аналогично рассматриваем второй случай ($g^1 < 0$). Так как $\delta = g^n : g^1 < 1$, то снова получаем систему (14). В третьем случае ($g^1 = 0$; $g^n \ne 0$) система (14) следует сразу из системы (12). Таким образом, i должно удовлетворять условию (14), или, что то же самое, (10), что и требовалось доказать.

Замечание 2. Обозначим $c' = c_0 + c_1 + \ldots + c_i$, $c_0 = 0$, а $c'' = c_{i+1} + \ldots + c_k$, пусть $c' + c'' = C$. Найдем минимум по переменной i, $0 \le i \le k$, функции

$$c' g^1 + c'' g^n = c'_1 g^1 + (C - c') g^n = c'(g^1 - g^n) + C g^n.$$

В силу того, что $C = \text{const}$, $g^n = \text{const}$, $g^1 < g^n$ (по неравенству (6)), имеем, что минимум

$$c'g^1 + c''g^n = c'(g^1 - g^n) + Cg^n$$

достигается при c' максимальном, т. е. при $i = s$, которое находится из соотношения (при $c_0 = 0$)

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_s = \max_{0 \le i \le k} (c_0 + c_1 + \ldots + c_i). \tag{15}$$

Таким образом, условия (15) и (10) эквивалентны. Если s, определяемое соотношениями (10) или (15), не единственно, то это означает, что минимум достигается не в одной, а в нескольких вершинах многогранника $\overline{Q}_n^k(g)$ одновременно.

***Следствие* 3.** *Если*

$$x^* = \arg \max_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k,$$

то

$$x_i^* = \begin{cases} g^1 & \forall i \in J_s; \\ g^n & \forall i \in J_k \setminus J_s, \end{cases} \tag{16}$$

где $s \in J_k^0$ *определяется соотношениями*

$$\sum_{j=1}^{t} c_{s+1-j} \le 0 \quad \forall t \in J_s,$$

$$\sum_{j=1}^{t} c_{s+j} \ge 0 \qquad \forall t \in J_{k-s}. \tag{17}$$

Отметим, что условие (17) при $c_0 = 0$ эквивалентно следующему:

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_s = \min_{0 \le i \le k} (c_0 + c_1 + \ldots + c_i). \tag{18}$$

***Замечание* 3.** Рассмотрим задачу: найти

$$x^* = \arg \max_{x \in \overline{S}_{\overline{n}}^k(g)} \sum_{j=1}^{k} c_j f(x_j), \quad c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k,$$

где f — некоторая функция, $f: R^1 \to R^1$. Можно рассматривать $g_1, \ldots, g_\eta$ как значения некоторой функции $f(\overline{g}_{\alpha_i}) = g_i$; α_i, $i \in J_\eta$, где $\overline{g}_{\alpha_i}$ образуют некоторый набор $\overline{g} = \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_\eta\}$, $\overline{g}_1 \le \ldots \le \overline{g}_\eta$. При этом f: $\overline{S}_{\overline{n}}^k(\overline{g}) \to \overline{S}_n^k(g)$. Здесь $\overline{n}$ — количество различных элементов набора $\overline{g}$ (понятно, что для взаимной однозначности функции f необходимо, чтобы $\overline{n} = n$). Из соотношения (5) следует

$$f(\overline{g}_{\alpha_1}) \le \ldots \le f(\overline{g}_{\alpha_\eta}). \tag{19}$$

С учетом этого замечания справедливо такое следствие.

***Следствие* 4.** *Если*

$$\bar{x}^* = \left(\bar{x}_1^*, \ldots, \bar{x}_k^*\right) = \arg \min_{x \in \bar{S}_{\bar{n}}^k(\bar{g})} \sum_{j=1}^{k} c_j f\left(x_j\right),$$

$$\bar{x}_i^* = \begin{cases} \bar{g}_{\alpha_1} & \forall\, i \in J_s; \\ \bar{g}_{\alpha_\eta} & \forall\, i \in J_k \setminus J_s, \end{cases}$$

где $s \in J_k^0$ *определяется соотношением* (10) *или условием* (15), *а* α_1, α_η — *неравенствами* (19).

***Замечание* 4.** Отметим, что подход, рассмотренный в замечании 3, легко применить к сепарабельным функциям при нахождении экстремума на других евклидовых комбинаторных множествах. Т. е. задачи нахождения экстремума линейной и сепарабельной функции на евклидовых комбинаторных множествах эквивалентны; другими словами: из одной из них, как следствие, может быть получено решение другой.

Перейдем к рассмотрению экстремальных свойств выпуклых и сильно выпуклых функций в связи с их оптимизацией на множестве $\bar{S}_n^k(g)$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x)$ — *конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве* $X \supset \bar{S}_n^k(g)$. *Тогда для всех внутренних точек* $y \in X \subset R^k$

$$\min_{x \in \bar{S}_n^k(g)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - \left(p(y), y\right) + g^1 \sum_{i=1}^{s} p_i(y) + g^n \sum_{i=s+1}^{k} p_i(y), \tag{20}$$

где $p(y) = \left(p_1(y), \ldots, p_k(y)\right)$ — *субградиент функции* $\varphi(x)$ *в точке* y, *а* $s \in J_k^0$ *находится из соотношений*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{t} p_{s+1-j}(y) \geq 0 \quad \forall\, t \in J_s, \\ &\sum_{j=1}^{t} p_{s+j}(y) \leq 0 \qquad \forall\, t \in J_{k-s}. \end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, где в формуле (1) в качестве множества E фигурирует множество $\bar{S}_n^k(g)$:

$$\min_{x \in \bar{S}_n^k(g)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - \left(p(y), y\right) + \min_{x \in \bar{S}_n^k(g)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i. \tag{22}$$

Минимум в правой части соотношения (22) находим по теореме 1, откуда при $c_i = p_i(y)$ $\forall\, i \in J_k$ из системы (10) для определения s следует условие (21). Таким образом, теорема доказана.

***Замечание* 5.** Отметим, что условие (21) для определения s эквивалентно следующему (при $p_0(y) \equiv 0$):

$$p_0(y) + p_1(y) + \ldots + p_s(y) = \max_{0 \leq i \leq k} \left(p_0(y) + p_1(y) + \ldots + p_i(y)\right). \tag{23}$$

Это следует из эквивалентности условий (10) и (15).

***Следствие* 5.** *Если при выполнении условий теоремы* 2 *функция* $\varphi(x)$

дифференцируема на множестве $X \supset \overline{S}_n^k(g)$, *то для всех внутренних точек* $y \in X$

$$\min_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - \left(\nabla\varphi(y), y\right) + g^1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} + g^n \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i},$$

где $s \in J_k^0$ *находится из соотношений*

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{s+1-j}} \geq 0 \quad \forall t \in J_s,$$
$$\sum_{j=1}^{t} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{s+j}} \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s}. \tag{24}$$

Отметим, что из эквивалентности условий (21) и (23) для определения s следует равносильность соотношения (24) и следующего (при $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y_0} \equiv 0$):

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} = \max_{0 \leq i \leq k} \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}. \tag{25}$$

Теорема 3. *Чтобы точка* $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \overline{S}_n^k(g)$ *доставляла минимум на множестве* $\overline{S}_n^k(g)$ *конечной выпуклой на выпуклом замкнутом множестве* X *функции* $\varphi(x)$, $\overline{S}_n^k(g) \subset \operatorname{int} X$, *достаточно, чтобы*

$$g^1 \sum_{i=1}^{s} p_i(z) + g^n \sum_{i=s+1}^{k} p_i(z) = \left(p(z), z\right), \tag{26}$$

где $p(z) = (p_1(z), \ldots, p_k(k))$ — *субградиент функции* $\varphi(x)$ *в точке* z, $\operatorname{int} X$ — *множество внутренних точек множества* X, *а параметр* $s \in J_k^0$ *удовлетворяет соотношениям* (21).

Доказательство. Воспользуемся леммой 2, где в качестве множества E возьмем множество $\overline{S}_n^k(g)$, а минимум в левой части соотношения (3) определим с помощью теоремы 1.

Следствие 6. *Если выполняются условия теоремы* 3, *а функция* $\varphi(x)$ *при этом дифференцируема на множестве* $X \supset \overline{S}_n^k(g)$, *то условия* (26) *принимают вид*

$$g^1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i} + g^n \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i} = \left(\nabla\varphi(z), z\right),$$

где $s \in J_k^0$ *определяется соотношениями* (24).

Лемма 3. *Пусть* $E \subset R^k$ — *евклидово комбинаторное множество и* $G(x) = \| x - c \|^2$, $c = (c_1, \ldots, c_k) \in R^k$, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$. *Тогда*

$$\min_{x \in E} G(x) \geq \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2 \max_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i,$$

где $g_{\delta_i} \in g \;\; \forall i \in J_\eta$ *удовлетворяют условию* $| g_{\delta_i} | \leq | g_{\delta_{i+1}} | \;\; \forall i \in J_{\eta-1}$.

Доказательство. Преобразуем выражение для функции $G(x)$:

$$G(x) = \|x - c\|^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i x_i .$$

Вычислим минимум по $x \in E$:

$$\min_{x\in E} G(x) = \min_{x\in E}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\right) \geq$$

$$\geq \min_{x\in E}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2\right) - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i =$$

$$= \min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i,$$

где через g_{δ_i} обозначены упорядоченные по возрастанию (с ростом i) модуля элементы набора g. Лемма доказана.

Следствие 7. *Если* $G(x) = \|x - c\|^2$, $x, c \in R^k$, *то*

$$\min_{x\in \overline{S}_n^k(g)} G(x) \geq k\tilde{g}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\left(g_1\sum_{i=1}^{s} c_i + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} c_i\right), \tag{27}$$

где

$$\tilde{g} = g_{\delta_1}, \quad |g_{\delta_1}| \leq |g_{\delta_i}| \quad \forall\, \delta_i \in J_\eta \quad \forall\, i \in J_\eta, \tag{28}$$

а s *определяется соотношениями* (17).

Доказательство. Из леммы 3 получаем

$$\min_{x\in \overline{S}_n^k(g)} G(x) \geq \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in \overline{S}_n^k(g)}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i.$$

С учетом того, что $g_{\delta_1} = g_{\delta_2} = \ldots = g_{\delta_k}$, обозначим это число $\tilde{g} = g_{\delta_1}$. Максимум линейной функции по $x \in \overline{S}_n^k(g)$ найдем по следствию 3. С учетом этих замечаний и того, что $g^1 = g_1$; $g^n = g_\eta$, получаем

$$\min_{x\in \overline{S}_n^k(g)} G(x) \geq k\overline{g}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\left(g_1\sum_{i=1}^{s} c_i + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} c_i\right), \tag{29}$$

где $s \in J_k^0$ определяется соотношениями (17), что и требовалось доказать.

Рассмотрим сильно выпуклую функцию $\psi(x)$ с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $X, E \subset X$. Обозначим точку, существование и единственность которой обусловлены в [6], доставляющую минимум функции $\psi(x)$ на X через w:

$$w = (w_1, \ldots, w_k) = \arg\min_{x\in X} \psi(x). \tag{30}$$

Теорема 4. *Если функция $\psi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $X, E \subset X$, то*

$$\min_{x \in E} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i, \qquad (31)$$

где константы $g_{\delta_i} \in g \quad \forall i \in J_\eta$ удовлетворяют условию $|g_{\delta_i}| \leq |g_{\delta_{i+1}}|$ $\forall i \in J_{\eta-1}$; точка w определяется формулой (30).

Доказательство. Для функции $\psi(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо [5] для всех $x \in X$ неравенство $\| x - w \|^2 \leq (\psi(x) - \psi(w)) / \rho$, а значит,

$$\min_{x \in E} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \min_{x \in E} \| x - w \|^2.$$

Минимум в правой части оценим с помощью леммы 3 при $c = w$, с учетом которой последнее соотношение примет вид

$$\min_{x \in E} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x \in E} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i,$$

где константы $g_{\delta_i} \in g \quad \forall i \in J_\eta$ удовлетворяют условию $|g_{\delta_i}| \leq |g_{\delta_{i+1}}|$ $\forall i \in J_{\eta-1}$; точка w определяется формулой (30), что и требовалось доказать.

Следствие 8. *Если функция $\psi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом множестве X, $\overline{S}_n^k(g) \subset X$, то*

$$\min_{x \in \overline{S}_n^k(g)} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \left[k\tilde{g}^2 + \sum_{j=1}^{k} w_j^2 - 2\left(g_1 \sum_{j=1}^{s} w_j + g_\eta \sum_{j=s+1}^{k} w_j \right) \right], \qquad (32)$$

где точка w определяется формулой (30), *константа $\tilde{g}$ — условием* (28), *а $s \in J_k^0$ — соотношениями*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{t} w_{s+1-j} \leq 0 \quad \forall t \in J_s, \\ &\sum_{j=1}^{t} w_{s+j} \geq 0 \quad \forall t \in J_{k-s}. \end{aligned} \qquad (33)$$

Отметим, что условие (33) эквивалентно следующему (при $w_0 \equiv 0$):

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_s = \max_{0 \leq i \leq k} (w_0 + w_1 + \ldots + w_i). \qquad (34)$$

Лемма 4. *Если функция $\psi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве $X \supset E$, то для всех $x \in X$*

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 +$$

$$+ \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i. \qquad (35)$$

где константы g_{δ_i} $\forall\, i \in J_\eta$ *удовлетворяют условию*

$$g_{\delta_i} \in g \quad \forall\, i \in J_\eta; \quad |\, g_{\delta_i} \,| \le |\, g_{\delta_{i+1}} \,| \quad \forall\, i \in J_{\eta-1}. \tag{36}$$

Доказательство. Как известно [6], для функции $\psi(x)$, удовлетворяющей условию теоремы, для всех $x, y \in X$ справедливо неравенство

$$\psi(y) - \psi(x) \le \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}(y_i - x_i) + \rho \| y - x \|^2. \tag{37}$$

Преобразуем неравенство (37) и перейдем к минимуму по $y \in E$. Будем иметь

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 +$$

$$+ \min_{y \in E} \left[\rho \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i \right].$$

Отсюда в силу свойства минимума

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} y_i^2 +$$

$$+ \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i. \tag{38}$$

С учетом того, что

$$\min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} y_i^2 = \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2,$$

где константы $g_{\delta_i} \in g$ $\forall\, i \in J_\eta$ и $|\, g_{\delta_i} \,| \le |\, g_{\delta_{i+1}} \,|$ $\forall\, i \in J_{\eta-1}$, из соотношения (38) окончательно получаем

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 +$$

$$+ \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если функция* $\psi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве* $X \supset \overline{S}_n^k(g)$, *то для всех* $x \in X$

$$\min_{y \in \overline{S}_n^k(g)} \psi(y) \ge \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho k \tilde{g}^2 +$$

$$+ g_1 \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right), \tag{39}$$

где $\tilde{g}$ *определяется в соответствии с условиями* (28), *а* $s \in J_k^0$ — *соот-*

ношениями

$$\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s+1-j}} - 2\rho x_{s+1-j}\right) \geq 0 \quad \forall t \in J_s,$$
$$\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s+j}} - 2\rho x_{s+j}\right) \leq 0 \qquad \forall t \in J_{k-s}. \tag{40}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4, положив в неравенстве (35) $E = \overline{S}_n^k(g)$. При этом учтем, что для множества $\overline{S}_n^k(g)$ $g_{\delta_i} = \tilde{g}$ $\forall i \in J_k$, где константа $\tilde{g}$ определяется соотношением (28). По теореме 1 при

$$c_i = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \quad \forall i \in J_k \tag{41}$$

находим

$$\min_{y \in \overline{S}_n^k(g)} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i =$$
$$= g_1 \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right),$$

где $s \in J_k^0$ определяется соотношениями (10) и (41), что и доказывает теорему.

Замечание 6. Отметим, что соотношение (10) для нахождения s эквивалентно (при $\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_0} - 2\rho x_0 \equiv 0$) следующему:

$$\sum_{j=0}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} - 2\rho x_j\right) = \max_{0 \leq i \leq k}\left\{\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} - 2\rho x_j\right)\right\}. \tag{42}$$

Лемма 5. *Чтобы точка $z = (z_1, \ldots, z_k) \in E$ доставляла минимум на множестве E сильно выпуклой с параметром $\rho > 0$ и дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве $X \supset E$ функции $\psi(x)$, достаточно, чтобы*

$$\min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_i} - 2\rho z_i\right)y_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_i}z_i - \rho\sum_{i=1}^{k} z_i^2 - \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2, \tag{43}$$

где константы $g_{\delta_i} \in g$ удовлетворяют условию (36).

Доказательство. Пусть выполняется равенство (43). Тогда, положив $x = z$ в справедливом при условии данной леммы соотношении (35), имеем

$$\min_{x \in E} \psi(y) \geq \psi(z).$$

Так как $z \in E$, то по определению минимума

$$\min_{x \in E} \psi(y) \leq \psi(z),$$

т. е.

$$\min_{x \in E} \psi(y) = \psi(z), \quad z = \arg\min_{x \in E} \psi(y),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Чтобы точка* $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \bar{S}_n^k(g)$ *доставляла минимум на множестве* $\bar{S}_n^k(g)$ *сильно выпуклой с параметром* $\rho > 0$ *и дифференцируемой на выпуклом замкнутом множестве* X, $\bar{S}_n^k(g) \subset X$, *функции* $\psi(x)$, *достаточно, чтобы*

$$g_1 \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \psi(z)}{\partial z_i} - 2\rho z_i \right) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(z)}{\partial z_i} - 2\rho z_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_i} z_i - \rho \sum_{i=1}^{k} z_i^2 - \rho k \tilde{g}^2, \tag{44}$$

где $s \in J_k^0$ *определяется соотношениями* (40), $\tilde{g}$ *— условием* (28).

Доказательство. Воспользуемся леммой 5 при $E = \bar{S}_n^k(g)$. При этом минимум в левой части соотношения (43) находим так же, как и при доказательстве теоремы 5. Отсюда следует справедливость соотношения (44) при условии (40) и (28) на входящие в него параметры. Теорема доказана.

Замечание 7. Полученные результаты определяют универсальный подход к оценке глобальных экстремумов на евклидовых комбинаторных множествах известных выпуклых и сильно выпуклых функций.

Эти результаты предоставляют возможность доказывать глобальность и оценивать погрешность получаемого решения в различных алгоритмах локальной оптимизации [7 – 11] на множестве E и его конкретных реализациях, а также могут быть использованы при реализации различных комбинаторных методов оптимизации [12].

1. *Стоян Ю. Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980. – 22 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения, № 85).
2. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 268 с.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
4. *Емец О. А.* Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и оптимизация на нем // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 69 – 72.
5. *Емец О. А.* Свойства целевых функций на сочетаниях и размещениях // Тез. докл. 43 научн. конф. ... професс., препод. ... ин-та. – Полтава: Полт. инж.-строит. ин-т, 1991. – С. 283.
6. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
7. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
8. *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации I, II / Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 12 – 19; № 2. – С. 1 – 11.
9. *Журавлев Ю. И., Финкельштейн Ю. Ю.* Локальные алгоритмы для задач линейного целочисленного программирования // Пробл. кибернетики. – 1965. – Вып. 14. – С. 289 – 295.
10. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы рашения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 287 с.
11. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1985. – 382 с.
12. *Современное* состояние теории исследования операций / Под ред. Н. Н. Моисеева. – М. : Наука, 1979. – 464 с.

Получено 29. 06. 92