УДК 519.21 – 517.983

Т. В. Каратаева, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ СМЕШАННОЙ СУММЫ АДДИТИВНЫХ СИСТЕМ

A representation is obtained for a mixed sum of additive systems with values on a Banach ring X with the identity and norm.

Одержано зображення мішаної суми адитивних систем зі значеннями в банаховому кільці X з одиницею і нормою.

Пусть X — банахово кольцо с единицей I и нормой $|\cdot|$. В работе [1] для аддитивных систем y_s^t и v_s^t, удовлетворяющих условию ограниченной вариации, введено понятие смешанной суммы как

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} = y_s^t \boxplus v_s^t,$$

$$s \le t_0^n \le t_1^n \le \ldots \le t_{m_n}^n \le t, \ \ \delta_n = \max_k |t_k^n - t_{k-1}^n|.$$

Предел рассматривался в норме банахова кольца X и не зависел от последовательности разбиений отрезка $[s, t]$. В настоящей работе получено новое представление для $y_s^t \boxplus v_s^t$.

Введем следующие определения.

Определение 1. *Двупараметрическое семейство элементов* y_s^t, $0 \le s \le \le t \le T < \infty$, *из* X *назовем* a*-системой, если*

$$y_s^\tau + y_\tau^t = y_s^t, \ \ y_\tau^\tau = 0, \ \ 0 \le s \le \tau \le t \le T < \infty, \tag{1}$$

$$\operatorname{Var} y = \sup_{\Delta[0,T]} \sum_{k=1}^{m_n} \left| y_{t_{k-1}}^{t_k} \right| < \infty. \tag{2}$$

Здесь и далее $\Delta[0, T]$ обозначает разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 \le \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m \le T$; $\Delta_n[0, T]$, $n \ge 1$, — последовательность разбиений $[0, T]$ точками $0 \le t_0^n \le t_1^n \le t_3^n \le \ldots \le t_{m_n}^n \le T$, $\delta_n = \max_k (t_k - t_{k-1})$, $n \to \infty$.

Определение 2. a*-Система называется разрывной, если* $y_{t-}^{t+} \ne 0$; a*-система называется разрывной в точке* t *справа (слева), если* $y_t^{t+} \ne 0$ ($y_{t-}^t \ne \ne 0$). *Величина* $|y_{t-}^{t+}|$ *является величиной скачка* a*-системы в точке* t, *величины* $|y_{t-}^t|$, $|y_t^{t+}|$ *— величинами скачков слева или справа.*

Пусть $\theta_s^t = \{\theta\colon s \le \theta \le t, \ |y_{\theta-}^\theta| > 0 \vee |y_\theta^{\theta+}| > 0 \wedge |v_{\theta-}^\theta| > 0 \vee |v_\theta^{\theta+}| > 0\}$ — множество точек общих скачков a-систем y_s^t и v_s^t, $\theta_k = \{\theta \in \theta_s^t\colon t_{k-1} \le \le \theta \le t_k\}$ — точки общих скачков, принадлежащие $[t_{k-1}, t_k]$. Рассмотрим $y_s^{s+} v_s^{s+} + \sum_{\theta \in \theta_{s+}^{t-}} y_{\theta-}^{\theta+} v_{\theta-}^{\theta+} + y_{t-}^t v_{t-}^t = w_s^t$. Легко видеть, что w_s^t имеет ограниченную вариацию. Действительно,

$$\operatorname{Var} w_s^t = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m} \left| w_{t_{k-1}}^{t_k} \right| \le \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m} \left| y_{t_{k-1}}^{t_k} \right| \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m} \left| v_{t_{k-1}}^{t_k} \right| < \infty.$$

Кроме того, w_s^t является аддитивной (т. е. удовлетворяет (1)) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$y_\tau^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} + y_{\tau-}^{\tau} v_\tau^{\tau+} = 0, \quad 0 \le s \le \tau \le t \le T < \infty. \tag{3}$$

Действительно, если $\tau \overline{\in} \theta_s^t$, то аддитивность очевидна. Если точка $\tau \in \theta_{s+}^{t-}$, то

$$w_s^\tau + w_\tau^t = y_s^{s+} v_s^{s+} + \sum_{\theta < \tau,\ \theta \in \theta_{s+}^{t-}} y_{\theta-}^{\theta+} v_{\theta-}^{\theta+} + y_{\tau-}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau+} + \sum_{\theta < \tau,\ \theta \in \theta_{s+}^{t-}} y_{\theta-}^{\theta+} v_{\theta-}^{\theta+} -$$

$$- \left(y_\tau^{\tau+} v_\tau^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} v_\tau^{\tau+} \right) + y_{t-}^t v_{t-}^t = y_s^{s+} v_s^{s+} + \sum_{\theta \in \theta_{s+}^t} y_{\theta-}^{\theta+} v_{\theta-}^{\theta+} -$$

$$- \left(y_\tau^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} + y_{\tau-}^{\tau} v_\tau^{\tau+} \right) + y_{t-}^t v_{t-}^t = w_s^t - \left(y_\tau^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} + y_{\tau-}^{\tau} v_\tau^{\tau+} \right)$$

и w_s^t аддитивна тогда и только тогда, когда выполняется (3).

Теорема 1. *Если* y_s^t *и* v_s^t *удовлетворяют* (3), *то справедливо равенство*

$$y_s^t \boxtimes v_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} = w_s^t.$$

Предел в левой части равенства не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ *и рассматривается в норме банахова кольца* X.

Доказательство. Обозначим

$$\theta_s^t(y) = \{\theta\colon\ s \le \theta \le t,\ \ |y_{\theta-}^{\theta}| > 0 \vee |y_\theta^{\theta+}| > 0\},$$

$$\theta_s^t(v) = \{\theta\colon\ s \le \theta \le t,\ \ |v_{\theta-}^{\theta}| > 0 \vee |v_\theta^{\theta+}| > 0\},$$

$$\hat{y}_s^t = \sum_{\theta \in \theta_s^t(y)} y_{\theta-}^{\theta+}, \quad \overline{y}_s^t = y_s^t - \hat{y}_s^t, \quad y_s^t = \overline{y}_s^t + \hat{y}_s^t,$$

$$\hat{v}_s^t = \sum_{\theta \in \theta_s^t(v)} v_{\theta-}^{\theta+}, \quad \overline{v}_s^t = v_s^t - \hat{v}_s^t, \quad v_s^t = \overline{v}_s^t + \hat{v}_s^t.$$

Назовем $\hat{y}_s^t$ и $\hat{v}_s^t$ скачкообразными составляющими a-систем y_s^t и v_s^t, $\overline{y}_s^t$ и $\overline{v}_s^t$ — непрерывными составляющими a-систем y_s^t и v_s^t; $\overline{y}_s^t$, $\overline{v}_s^t$, $\hat{y}_s^t$, $\hat{v}_s^t$ также являются a-системами.

Рассмотрим норму разности

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \left(y_s^{s+} v_s^{s+} + \sum_{\theta \in \theta_s^t} y_{\theta-}^{\theta+} v_{\theta-}^{\theta+} + y_{t-}^t v_{t-}^t \right) \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k=1}^{m_n} \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - w_s^t \right|.$$

Первые три слагаемые стремятся к нулю в силу непрерывности $\overline{y}_s^t$, $\overline{v}_s^t$ и ограниченной вариации y_s^t, v_s^t. Оценим последнее слагаемое. Для этого введем следующие обозначения: $\hat{y}_s^t = \hat{y}_{1s}^t + \hat{y}_{2s}^t$, $\hat{v}_s^t = \hat{v}_{1s}^t + \hat{v}_{2s}^t$, где $\hat{y}_{1s}^t$ и $\hat{v}_{1s}^t$ — скачкообразные составляющие a-систем y_s^t и v_s^t соответственно, имеющие только общие точки скачков $\theta \in \theta_s^t$; $\hat{y}_{2s}^t$ и $\hat{v}_{2s}^t$ — скачкообразные составляющие a-систем y_s^t и v_s^t соответственно, имеющие скачки только в разных точках, т. е. $\hat{y}_{2s}^t$ имеет скачки в точках $\theta \in \theta_s^t(y) - \theta_s^t$; $\hat{v}_{2s}^t$ имеет скачки в точках $\theta \in \theta_s^t(v) - \theta_s^t$. Тогда последнее слагаемое можно переписать в следующем виде:

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - w_s^t \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{y}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right) \left(\hat{v}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right) - w_s^t \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} - w_s^t \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{1t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{2t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right|. \tag{4}$$

Напомним, что y_s^t и v_s^t имеют не более чем счетное число скачков. Поэтому можно выделить конечное число скачков $N(\varepsilon)$ таким образом, чтобы сумма оставшихся не превышала $\varepsilon / \min\left(\left[\operatorname*{Var}_{[s,t]} y\right]^{-1}, \left[\operatorname*{Var}_{[s,t]} v\right]^{-1}\right)$. Тогда $\hat{y}_{1s}^t$, $\hat{y}_{2s}^t$, $\hat{v}_{1s}^t$, $\hat{v}_{2s}^t$ можно записать в следующем виде:

$$\hat{y}_{1s}^t = \hat{y}_{1s}'^t + \hat{y}_{1s}''^t, \quad \hat{v}_{1s}^t = \hat{v}_{1s}'^t + \hat{v}_{1s}''^t,$$

$$\hat{y}_{2s}^t = \hat{y}_{2s}'^t + \hat{y}_{2s}''^t, \quad \hat{v}_{2s}^t = \hat{v}_{2s}'^t + \hat{v}_{2s}''^t,$$

где $\hat{y}_{1s}'^t$, $\hat{y}_{2s}'^t$, $\hat{v}_{1s}'^t$, $\hat{v}_{2s}'^t$ — составляющие $\hat{y}_{1s}^t$, $\hat{y}_{2s}^t$, $\hat{v}_{1s}^t$, $\hat{v}_{2s}^t$, скачки которых совпадают по месту и величине с выделенными $N(\varepsilon)$ скачками, а $\hat{y}_{1s}''^t$, $\hat{y}_{2s}''^t$, $\hat{v}_{1s}''^t$, $\hat{v}_{2s}''^t$ — составляющие $\hat{y}_{1s}^t$, $\hat{y}_{2s}^t$, $\hat{v}_{1s}^t$, $\hat{v}_{2s}^t$, скачки которых совпадают по месту и величине с оставшимися скачками. Перепишем правую часть (4) в виде

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} + \hat{y}''^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right) \left(\hat{v}'^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} + \hat{v}''^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right) - w_s^t \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} + \hat{y}''^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right) \left(\hat{v}'^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} + \hat{v}''^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} + \hat{y}''^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right) \left(\hat{v}'^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} + \hat{v}''^{t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} + \hat{y}''^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right) \left(\hat{v}'^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} + \hat{v}''^{t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right) \right|. \tag{5}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Первое из них не превышает суммы

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} - w_s^t \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) - w_s^t \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}''^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}''^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}''^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}''^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}''^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}''^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}''^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}''^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) \right|. \qquad (6)$$

Для оценки первого слагаемого в (6) отметим, что при $n \to \infty$ δ_n станет меньше $\min|\theta_i - \theta_j|$, $i \neq j$, $\theta_i, \theta_j \in \theta_s^t$, и, следовательно, $\hat{y}'^{\,t}_{10}$ будет иметь не более одной точки разрыва θ на $[t_{k-1}, t_k]$, а сумма

$$\sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)$$

будет иметь слагаемых не более, чем количество общих точек разрыва систем y_s^t и v_s^t. Если $\theta \in \theta_s^t$ попадает внутрь интервала (t_{k-1}^n, t_k^n), то

$$\sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,\theta}_{10} + \hat{y}'^{\,\theta}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}'^{\,\theta}_{10} + \hat{v}'^{\,\theta}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)$$

при $\delta_n \to 0$ стремится к w_s^t, а следовательно, первое слагаемое в (6) стремится к нулю. Если θ совпадает с t_{k-1}^n, то

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{m_{n/2}} \left[\left(\hat{y}'^{\,t_{2i-1}^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{2i-2}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_{2i-1}^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{2i-2}^n}_{10} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\hat{y}'^{\,t_{2i}^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{2i-1}^n}_{10} \right)\left(\hat{v}'^{\,t_{2i}^n}_{10} - \hat{v}'^{\,t_{2i-1}^n}_{10} \right) \right] =$$

$$= y_s^{s+} v_s^{s+} + \sum_{\theta \in \theta_s^t} \left(y^{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\theta}-} v^{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\theta}-} + y^{\boldsymbol{\theta}+}_{\boldsymbol{\theta}} v^{\boldsymbol{\theta}+}_{\boldsymbol{\theta}} \right) + y_{t-}^t v_{t-}^t = w_s^t$$

в силу условия (3) и первое слагаемое в (6) стремится к нулю. Аналогично, если θ совпадает с t_k^n, первое слагаемое в (6) стремится к нулю. Для оценки оставшихся слагаемых в (6) отметим, что $\hat{y}'^{\,t}_{1s}$, $\hat{y}''^{\,t}_{1s}$, $\hat{y}''^{\,t}_{2s}$, $\hat{v}'^{\,t}_{1s}$, $\hat{v}''^{\,t}_{1s}$, $\hat{v}'^{\,t}_{2s}$, $\hat{v}''^{\,t}_{2s}$ имеют ограниченную вариацию. Несложно получить следующую оценку для второго из них:

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| \le \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\min\left([\operatorname{Var} y]^{-1}, [\operatorname{Var} v]^{-1}\right)} \operatorname{Var} y \le \varepsilon .$$

Аналогичные оценки справедливы для третьего и четвертого слагаемых в (6), и, следовательно, первое слагаемое в (5) можно сделать как угодно малым. Для оценки второго слагаемого в (5) отметим, что оно не превышает суммы

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}'^{\,t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}'^{\,t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}'^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right| + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \hat{y}''^{\,t_k^n}_{1t_{k-1}^n} \hat{v}''^{\,t_k^n}_{2t_{k-1}^n} \right|. \tag{7}$$

Для оценки первого слагаемого в (7) перепишем его в виде

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} \right) \left(\hat{v}'^{\,t_k^n}_{20} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{20} \right) \right|$$

и отметим, что с ростом n δ_n станет меньше $\min|\theta_i - \theta_j|$, $i \ne j$, $\theta_i, \theta_j \in \theta_s^t(y) \cup \theta_s^t(v)$ и $\hat{y}'^{\,t}_{10}$, $\hat{v}'^{\,t}_{20}$ будут иметь не более одной точки разрыва θ на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Если эта точка разрыва $\theta \in \theta_s^t(y) \cap \theta_s^t(v) = \theta_s^t$, то $\hat{v}'^{\,t_k^n}_{20} - \hat{v}'^{\,t_{k-1}^n}_{20} = 0$, и, следовательно, равно нулю все слагаемое. Если $\theta \in \theta_s^t(v)$, то $\hat{y}'^{\,t_k^n}_{10} - \hat{y}'^{\,t_{k-1}^n}_{10} = 0$ и также все слагаемое равно нулю. Если $\theta \in \theta_s^t(y)$, то оба сомножителя обращаются в нуль. Оставшиеся слагаемые в (7) могут быть сделаны сколь угодно малыми аналогично оценке второго слагаемого в (6).

Рассуждая аналогично, можно показать, что оставшиеся слагаемые в (5) с ростом n стремятся к нулю, и, следовательно, стремится к нулю все выражение (4), что и завершает доказательство теоремы.

Определение 3. *Двупараметрическое семейство элементов* y_s^t *назовем* $\hat{a}$*-системой, если оно удовлетворяет условиям* (1), (2) *и условию* $y_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} = 0$.

Определение 4. *Двупараметрическое семейство элементов* x_s^t *назовем* $\hat{m}$*-системой, если оно удовлетворяет условиям*

$$x_s^{\tau} x_{\tau}^t = x_s^t, \quad 0 \le s \le \tau \le t \le T < \infty, \quad x_{\tau}^{\tau} = I,$$

$$\operatorname{Var}(x - I) = \sup_{\Delta[0,T]} \sum |x_{t_{k-1}}^{t_k} - I| < \infty,$$

$$(x_{\tau-}^{\tau} - I)(x_{\tau}^{\tau+} - I) = 0 \quad \forall\, \tau \in [0, T].$$

В силу [2] между множеством всех $\hat{a}$-систем и множеством всех $\hat{m}$-систем существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое по формулам

$$y_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} \left(x_{t_{k-1}}^{t_k^n} - I \right),$$

$$x_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right).$$

Обозначим $\bar{x}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(\bar{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right)$, $\hat{x}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right)$. Тогда

$$x_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(\bar{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} = \left(\bar{x} \boxtimes \hat{x} \right)_s^t .$$

Назовем $\bar{x}_s^t$ непрерывной составляющей $\hat{m}$-системы x_s^t, $\hat{x}_s^t$ — скачкообразной составляющей x_s^t.

Рассмотрим сумму $\hat{a}$-систем $y_s^t + v_s^t = p_s^t$. Она аддитивна и имеет ограниченную вариацию; p_s^t будет $\hat{a}$-системой тогда и только тогда, когда y_s^t, v_s^t удовлетворяет условию

$$y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} = 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Получим некоторое представление для первообразной $\hat{a}$-системы $p_s^t = y_s^t + v_s^t$.

Теорема 2. *Пусть $y_s^t + v_s^t$ является $\hat{a}$-системой. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + u_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(\bar{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \bar{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \bar{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\left(\hat{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) + \left(\hat{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) + I \right) =$$

$$= \bar{x}_s^t \boxtimes \bar{u}_s^t \boxtimes \left[\left(\hat{x}_s^t - I \right) + \left(\hat{u}_s^t - I \right) + I \right],$$

$$x_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right), \quad u_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} \left(v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right).$$

Доказательство. Справедливость первого равенства вытекает из [3] Для доказательства второго, оценивая норму разности

$$\left| \prod_{k=1}^{m_n} \left(\bar{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) - \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\overline{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + v_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right) \left(\hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right) \left[\overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \right.\right.$$

$$+ \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} +$$

$$\left.\left. + \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I - y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right] \prod_{k=1}^{m_n} \left(y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + v_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right) \right| \le$$

$$\le \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} \left| \overline{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \overline{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \left| \hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \times$$

$$\times \sup_k \prod_{i=k+1}^{m_n} \left| y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + v_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \left| \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right|,$$

убеждаемся, что она стремится к нулю при $\delta_n \to 0$.

Докажем третье равенство. Имеем

$$\left| \prod_{k=1}^{m_n} \left(\overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{m_n} \overline{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \overline{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \right| \le$$

$$\le \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} \left| \overline{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \overline{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \left| \hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \times$$

$$\times \sup_k \prod_{i=k+1}^{m_n} \left| \overline{x}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \overline{u}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \right| \left| \hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \left| \left(\overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) - \overline{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \overline{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \left| \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right| \le$$

$$\le C_1(s,t)\, C_2(s,t)\, C_3(s,t) \left\{ \sup_k \left| \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right| \sum_{k=1}^{m_n} \left| \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I - \overline{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \overline{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \sum_{k=1}^{m_n} \left| \overline{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \left(\overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) \right| + \sup_k \left| \overline{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \sum_{k=1}^{m_n} \left| \overline{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \right\} \to 0$$

при $\delta_n \to 0$. Здесь

$$C_1(s,t) = \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} \left| \overline{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \overline{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right| \left| \hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right|,$$

$$C_2(s,t) = \sup_k \prod_{i=k+1}^{m_n} \left| \overline{x}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \overline{u}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \right| \left| \hat{y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + \hat{v}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + I \right|,$$

$$C_3(s,t) = \sup_k \left| \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right|.$$

Для доказательства четвертого равенства аналогично оценим норму разности произведений

$$\left| \prod_{k=1}^{m_n} \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \bar{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + I \right) - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{m_n} \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \bar{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\left(\hat{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) + \left(\hat{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) + I \right) \right| \le$$

$$\le C_2(s,t) \prod_{i=k+1}^{m_n} \left| \bar{x}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \bar{u}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \left(\left(\hat{x}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} - I \right) + \left(\hat{u}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} - I \right) + I \right) \right| \times$$

$$\times \sup_k \left| \bar{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \sup_k \left| \bar{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right| \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \left| \hat{y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \left(\hat{x}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_n} \left| \hat{v}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \left(\hat{u}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I \right) \right| \right\}.$$

Она стремится к нулю при $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$.

В заключение рассмотрим пример. Пусть $X(H)$ — кольцо всех ограниченных линейных операторов над некоторым сепарабельным вещественным гильбертовым пространством H, $A, B \in X(H)$, $f_i(\tau)$, $i = 1, 2$, $0 \le s \le \tau < \infty$, — функции ограниченной вариации на $[0, T]$, принимающие значения в R^1 и удовлетворяющие условию

$$(f(\tau+) - f(\tau))(f(\tau) - f(\tau-)) = 0, \quad 0 \le \tau \le T < \infty.$$

Рассмотрим аддитивные системы

$$y_s^t = A(f_1(t) - f_1(s)) = A\,\Delta f_1(s,t),$$

$$v_s^t = B(f_2(t) - f_2(s)) = B\,\Delta f_2(s,t), \quad 0 \le s \le t \le T < \infty.$$

Они являются $\hat{a}$-системами. Выпишем их скачкообразные и непрерывные составляющие

$$\hat{y}_s^t = A\Big[f_1(s+) - f_1(s) +$$

$$+ \sum_{\theta \in \Theta,\ \theta \in (s,t)} (f_1(\theta+) - f_1(\theta-)) + f_1(t) - f_1(t-) \Big] = A\,\Delta\,\hat{f}_1(s,t),$$

$$\hat{v}_s^t = B\Big[f_2(s+) - f_2(s) +$$

$$+ \sum_{\theta \in \Theta,\ \theta \in (s,t)} (f_2(\theta+) - f_2(\theta-)) + f_2(t) - f_2(t-) \Big] = B\,\Delta\,\hat{f}_2(s,t),$$

$$\bar{y}_s^t = y_s^t - \hat{y}_s^t = A(f_1(t) - f_1(s) - (\hat{f}_1(t) - \hat{f}_1(s))) = A\,\Delta\,\bar{f}_1(s,t),$$

$$\bar{v}_s^t = B\,\Delta\,\bar{f}_2(s,t).$$

Согласно [2, 4] аддитивным системам y_s^t, v_s^t, $\bar{y}_s^t$, $\bar{v}_s^t$ взаимно однозначно соответствуют мультипликативные системы

$$x_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (A \,\Delta\, f_1(t_{k-1}, t_k) + I),$$

$$u_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (B \,\Delta\, f_2(t_{k-1}, t_k) + I),$$

$$\bar{x}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (A \,\Delta\, \bar{f}_1(t_{k-1}, t_k) + I) = \exp\{A \cdot \bar{f}_1(s,t)\},$$

$$\bar{u}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (B \,\Delta\, \bar{f}_2(t_{k-1}, t_k) + I) = \exp\{B \cdot \bar{f}_2(s,t)\}.$$

Сумма непрерывных аддитивных систем $\bar{y}_s^t + \bar{v}_s^t$ также является непрерывной аддитивной системой. Ей взаимно однозначно соответствует мультипликативная система

$$\bar{x}_s^t \boxtimes \bar{u}_s^t = \lim \prod (A \,\Delta\, \bar{f}_1(t_{k-1}, t_k) + B \,\Delta\, \bar{f}_2(t_{k-1}, t_k) + I) =$$

$$= \exp\{A \,\Delta\, \bar{f}_1(t_{k-1}, t_k) + B \,\Delta\, \bar{f}_2(t_{k-1}, t_k)\}.$$

Из последнего равенства следует известная формула Далецкого – Троттера

$$\exp\{A \,\Delta\, \bar{f}_1(t_{k-1}, t_k) + B \,\Delta\, \bar{f}_2(t_{k-1}, t_k)\} =$$

$$= \exp\{A \,\Delta\, \bar{f}_1(s,t)\} \boxtimes \exp\{B \,\Delta\, \bar{f}_2(s,t)\}.$$

Если сумма $\hat{a}$-систем $y_s^t + v_s^t$ также является $\hat{a}$-системой, то согласно теореме 2 справедливо представление

$$\exp\{A \,\Delta\, \bar{f}_1(s,t) + B \,\Delta\, \bar{f}_2(s,t)\} \boxtimes [A \,\Delta\, \hat{f}_1(s,t) + B \,\Delta\, \hat{f}_2(s,t) + I] =$$

$$= \exp\{A \,\Delta\, \bar{f}_1(s,t)\} \boxtimes \exp\{B \,\Delta\, \bar{f}_2(s,t)\} \boxtimes$$

$$\boxtimes [A \cdot \Delta\, \hat{f}_1(s,t) + B \,\Delta\, \hat{f}_2(s,t) + I].$$

1. *Каратаева Т. В.* О смешанном произведении эволюционных мультипликативных систем без условий непрерывности // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 444 – 450.
2. *Козаченко М. Ю.* Необходимое и достаточное условие изоморфизма мультипликативных и аддитивных систем без условий непрерывности с точностью до измельчающихся разбиений // Там же. – 1988. – **40**, № 5. – С. 576 – 583.
3. *Каратаева Т. В.* Гомеоморфизм мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности // Там же. – 1987. – **39**, № 3. – С. 309 – 315.
4. *Буцан Г. П.* Мультипликативные параметрические полугруппы // Кибернетика. – 1978. – № 3. – С. 38 – 43.

Получено 27. 05. 92