УДК 512.544

А. В. Крайчук

Об одном классе групп с инвариантными подгруппами бесконечного индекса

Неабелевы группы, все подгруппы которых инвариантны (гамильтоновы группы), хорошо изучены. Если условие инвариантности налагать не на все, а только на некоторые, специально выделенные подгруппы произвольной неабелевой группы, то можно получать различные обобщения гамильтоновых групп (см., например, [1, 2]). В этом направлении получены многие важные результаты [3].

Поскольку бесконечная нециклическая группа G содержит нетривиальные подгруппы бесконечного индекса [4], то условие инвариантности целесообразно налагать на те или иные подгруппы бесконечного индекса из G. В настоящей работе система подгрупп, на которые налагается требование инвариантности, выделяется с помощью понятия сепарирующей (разделяющей) подгруппы, введенного в работе [5]. Пользуясь общим определением сепарирующей подгруппы, дадим следующее определение.

Определение. *Подгруппу R группы G назовем i-сепарирующей подгруппой группы G, если G обладает не содержащимися в R подгруппами бесконечного индекса и все такие подгруппы инвариантны в G. Пересечение $i(G)$ всех i-сепарирующих подгрупп группы G назовем i-сепаратором группы G.*

Если $i(G) = 1$, то в группе G инвариантны все подгруппы бесконечного индекса. Неабелевы группы такого вида конструктивно описаны в работе [6]. Настоящая работа посвящена изучению бесконечных неабелевых групп, у которых инвариантны все подгруппы бесконечного индекса, не содержащиеся в некоторой собственной подгруппе, т. е. бесконечные группы с нетривиальным i-сепаратором. Тема настоящей работы предложена автору С. Н. Черниковым, результаты работы анонсированы в [7].

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Из общих положений работы [5] вытекает следующее предложение.

Предложение 1. *Если $i(G) \neq 1$, то $i(G)$ порождается всеми не инвариантными в группе G подгруппами бесконечного индекса.*

Лемма 1. *Если бесконечная группа G обладает нетривиальным i-сепаратором, то она является либо конечным расширением бесконечной циклической группы, либо бесконечной QH-группой* *.

Доказательство. Пусть G — бесконечная группа, обладающая нетривиальным i-сепаратором. Если в G найдется такой элемент g, что $|G : \langle g\rangle| < \infty$, то G является, очевидно, конечным расширением бесконечной циклической группы. Пусть $|G : \langle g\rangle| = \infty$ для любого элемента g из G. Тогда каждая циклическая подгруппа группы G, не входящая в $i(G)$, инвариантна в G. А это значит, как нетрудно убедиться, что в группе G инвариантны все подгруппы, не содержащиеся в $i(G)$ и потому G является QH-группой. Лемма доказана.

Следствие 1. *Периодическая группа с нетривиальным i-сепаратором является бесконечной QH-группой.*

Лемма 2. *Пусть бесконечная группа G содержит i-сепарирующие подгруппы и H — ее произвольная инвариантная подгруппа. Если фактор-группа G/H бесконечна, то она содержит i-сепарирующие подгруппы или является бесконечной циклической группой.*

Доказательство. Пусть фактор-группа G/H бесконечна. Если G/H не имеет нетривиальных подгрупп бесконечного индекса, то она является бесконечной циклической группой [4].

Пусть фактор-группа G/H содержит нетривиальные подгруппы бесконечного индекса. Предположим, что $H \subseteq i(G)$. Поскольку произвольная QH-группа периодическая [8], то, пользуясь леммой 1, нетрудно убедиться, что в группе G/H найдется подгруппа $\overline{B}$ бесконечного индекса, не содержащаяся в $i(G)/H$. Покажем, что каждая подгруппа $\overline{B}$ бесконечного индекса из G/H, не содержащаяся в $i(G)/H$, инвариантна в G/H. Действительно, пусть B — полный прообраз подгруппы $\overline{B}$ в группе G. Понятно, что $|G : B| = \infty$ и $B \not\subset i(G)$. Следовательно, $B \lhd G$. Но тогда $\overline{B} \lhd G/H$. Так как $i(G) \neq G$, то $i(G)/H \neq G/H$ и, значит, $i(G)/H$ является i-сепарирующей подгруппой группы G/H.

Допустим, что $H \not\subseteq i(G)$. Если $\overline{B}$ — произвольная подгруппа бесконечного индекса из G/H, то ее полный прообраз B не содержится в $i(G)$ и $|G : B| = \infty$. Следовательно, $B \lhd G$, но тогда $\overline{B} \lhd G/H$. Таким образом, $i(G/H) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Непериодическая группа G с нетривиальным i-сепаратором представима в виде полупрямого произведения $G = N \rightthreetimes Z$ конечной деде-*

---

* QH-группой называется недедекиндова группа G, содержащая такую собственную подгруппу R, что все не принадлежащие R подгруппы из G инвариантны в G.

Класс QH-групп совпадает в точности с классом тех групп, которые изучались в работе [8].

киндовой либо конечной QH-группы N и бесконечной циклической группы Z.

Доказательство. Поскольку бесконечная QH-группа периодическая [8], то в силу леммы 1 группа G является конечным расширением бесконечной циклической группы. Исходя из этого, нетрудно убедиться, что G является либо центральным расширением бесконечной циклической группы с помощью конечной группы, либо содержит такую инвариантную подгруппу F (в частности, и $F = 1$), что фактор-группа G/F является бесконечной диэдральной группой. Бесконечная диэдральная группа порождается своими конечными не инвариантными подгруппами и потому не имеет i-сепарирующих подгрупп. Отсюда в силу леммы 2 получаем, что G есть центральное расширение бесконечной циклической группы с помощью конечной группы. Очевидно, G имеет нетривиальные элементы конечного порядка.

Но тогда в силу теоремы 3.13 из [3] G является FC-группой и потому ввиду следствия 3.11 из [3] она имеет нетривиальную периодическую часть $T(G) \neq G$, фактор-группа $G/T(G)$ по которой является абелевой группой без кручения. Так как G не имеет бесконечных подгрупп бесконечного индекса, то $|T(G)| < \infty$ и $G/T(G)$ — бесконечная циклическая группа.

Таким образом, группа G есть расширение конечной группы $T(G)$ с помощью бесконечной циклической группы Z. Такое расширение, очевидно, расщепляемо. Следовательно, $G = T(G) \leftthreetimes Z$.

Все подгруппы бесконечного индекса из G, очевидно, содержатся в подгруппе $T(G)$. Поэтому $i(G) < T(G)$ (так как в силу предложения 1 подгруппа $i(G)$ порождается не инвариантными в группе G подгруппами бесконечного индекса). Следовательно, $T(G)$ содержит такую истинную подгруппу $i(G)$, что любая подгруппа из $T(G)$, не входящая в $i(G)$, инвариантна в $T(G)$. Отсюда вытекает, что группа $T(G)$ либо дедекиндова, либо является QH-группой. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G = A \leftthreetimes B$, где A — периодическая группа, B — произвольная группа. Если A имеет подгруппы, не инвариантные в G, то группа, порожденная всеми такими подгруппами из A, содержит каждый элемент простого порядка группы A.*

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию леммы, и A_0 — подгруппа, порожденная всеми не инвариантными в G подгруппами из A. Если $A_0 = A$, то лемма доказана. Пусть $A_0 \neq A$ и a — некоторый элемент простого порядка из A. Предположим, что $a \notin A_0$. Тогда $\langle a \rangle \lhd G$ и, очевидно, $\langle a \rangle \cap A_0 = 1$. Если H — некоторая не инвариантная в G подгруппа из A_0, то подгруппа $\langle a \rangle \leftthreetimes H$ также не инвариантна в группе G. В самом деле, если $\langle a \rangle \leftthreetimes H \lhd G$, то H является пересечением двух инвариантных в группе G подгрупп $\langle a \rangle \leftthreetimes H$ и A_0 и, значит, инвариантна в G, что противоречит выбору подгруппы H.

Таким образом, подгруппа $\langle a \rangle \leftthreetimes H$ не инвариантна в группе G, следовательно, $\langle a \rangle \leftthreetimes H \subseteq A_0$, а значит, и $a \in A_0$, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Предложение 2. *Пусть $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, где A — конечная абелева группа, $|x| = \infty$. Если группа A имеет подгруппы, не инвариантные в G, то последние тогда и только тогда порождают собственную подгруппу в A, когда группа A нециклическая и выполняются следующие условия:*

а) *элемент x индуцирует на каждой силовской p-подгруппе группы A, за исключением некоторой одной нециклической q-подгруппы S_q, степенной автоморфизм;*

б) $\exp S_q \geqslant q^2$ *и все не инвариантные в G подгруппы из S_q порождают в S_q собственную подгруппу.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Поскольку группа A имеет подгруппы, не инвариантные в G, и все такие подгруппы порождают в ней собственную подгруппу (обозначим последнюю через A_0), то группа A, очевидно, не является циклической группой. Пусть

$$A = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n, \tag{1}$$

где P_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,— силовская p-подгруппа группы A. Понятно, что хотя бы одна силовская p-подгруппа из разложения (1) имеет подгруппы, не инвариантные в G (иначе таких подгрупп не имеет и группа A). Покажем, что элемент x индуцирует на каждой силовской p-подгруппе группы A, за исключением некоторой одной, степенной автоморфизм. Предположим противное, пусть некоторые две различные силовские p-подгруппы группы A из разложения (1) (например, P_1 и P_2) имеют не инвариантные в G подгруппы H_1 и H_2 соответственно. Нетрудно убедиться, что подгруппа $H_1 \times P_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, не инвариантна в G. В самом деле, если это не так, то подгруппа H_1 является пересечением двух инвариантных в группе G подгрупп $H_1 \times P_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, и P_1, а значит, инвариантна в G, что противоречит выбору подгруппы H_1. Следовательно, подгруппа $H_1 \times P_k$, $k = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n$, не инвариантна в G. Поэтому $H_1 \times P_k < A_0$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Легко видеть далее, что подгруппа $H_2 \times P_1$ также не инвариантна в G, поэтому $H_2 \times P_1 < A_0$. Но тогда из соотношений $H_2 \times P_1 < A_0$ и $H_1 \times P_k < A_0$, $k = 2, 3, \ldots, n$, вытекает $A_0 = A$, а это противоречит условию предложения.

Таким образом, элемент x индуцирует на каждой силовской p-подгруппе группы A, за исключением некоторой одной q-подгруппы (например, P_1) степенной автоморфизм. Поскольку P_1 имеет подгруппы не инвариантные в группе G, то P_1 является нециклической группой и ввиду леммы 4 содержит элементы порядка q^2. Нетрудно убедиться, что силовские p-подгруппы P_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, содержатся в A_0, поэтому все не инвариантные в G подгруппы из P_1 порождают в P_1 собственную подгруппу. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть*

$$G = (Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots) \leftthreetimes \langle x \rangle,$$

где $Q = \langle a, b \rangle$ — *группа кватернионов,* $|c_k| = 2$, $k = 1, 2, \ldots$, $\langle x \rangle$ — *произвольная циклическая группа. Если группа*

$$N = Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots$$

имеет подгруппы, не инвариантные в группе G, то последние тогда и только тогда порождают в N собственную подгруппу, когда выполняются следующие условия:

1) *все подгруппы из Q инвариантны в G;*

2) $x^{-1} c_k x = E_k c_k$, *где* $E_k = 1$ *или* $E_k = a^2$, *причем* $E_k = a^2$ *хотя бы для одного* k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть N_0 — подгруппа, порожденная всеми не инвариантными в G подгруппами группы N. В силу леммы 4 $\langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots \leqslant N_0$. Поскольку $N_0 \neq N$, то отсюда вытекает, что $Q \lhd G$. Учитывая строение группы кватернионов Q, нетрудно убедиться, что все подгруппы из Q инвариантны в G.

Покажем, что не все подгруппы группы $H = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times$ $\times \langle c_n \rangle \times \ldots$ инвариантны в G. Действительно, пусть $\langle g \rangle$ — не инвариантная в G циклическая подгруппа из N. Если все подгруппы из H инвариантны в G, то ввиду инвариантности в G каждой подгруппы из Q получаем $g =$ $= g_1 g_2$, где $g_1 \in Q$, $g_2 \in H$ и $g_k \neq 1$, $k = 1, 2$. Порядок элемента g_1 равен 2 или 4, $|g_2| = 2$.

Допустим, что $|g_1| = |g_2| = 2$. Так как $\langle g_k \rangle \lhd G$, $k = 1, 2$, то для любого $y \in G$

$$y^{-1} g y = (y^{-1} g_1 y)(y^{-1} g_2 y) = g_1 g_2 = g$$

и, значит, $\langle g \rangle \lhd G$, что противоречит выбору подгруппы $\langle g \rangle$.

Пусть $|g_1| = 4$, $|g_2| = 2$. Поскольку $\langle g_k \rangle \lhd G$, $k = 1, 2$, то для произвольного $y \in G$ либо $y^{-1} g y = g_1 g_2 = g$, либо $y^{-1} g y = g_1^3 g_2 = g^{-1}$. Следовательно, и в этом случае $\langle g \rangle \lhd G$, что противоречит выбору подгруппы $\langle g \rangle$.

Таким образом, некоторые подгруппы из H не инвариантны в группе G. Тогда, как нетрудно убедиться, для некоторого k, $k = 1, 2, \ldots, n$, циклическая подгруппа $\langle c_k \rangle$ не инвариантна в G. Покажем, что хотя бы одна из подгрупп $\langle a \rangle \times \langle c_k \rangle$ и $\langle b_k \rangle \times \langle ck \rangle$ инвариантна в группе G. В самом деле, если это не так, то подгруппа $\langle a \rangle \times \langle c_k \rangle$ и $\langle b \rangle \times \langle c_k \rangle$ содержатся в N_0. Но тогда $Q < N_0$ и, значит, $N_0 = N$, что противоречит условию предложения.

Пусть, например, $\langle a \rangle \times \langle c_k \rangle \lhd G$. Тогда $x^{-1} c_k x \in \langle a \rangle \times \langle c_k \rangle$. Поскольку $|c_k| = 2$ и подгруппа $\langle c_k \rangle$ не инвариантна в G, то $x^{-1} c_k x = a^2 c_k$. Необходимость доказана.

Достаточность. Обозначим через N_0 подгруппу группы $N = Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots$, порожденную всеми не инвариантными в G подгруппами из N. Покажем, что $N_0 \neq N$.

Действительно, в силу леммы 4 $N_0 \geqslant \langle a^2 \rangle \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots \ldots = H$. Пусть $\langle g \rangle$ — произвольная циклическая подгруппа группы G, не входящая в H. Тогда $g = dg_1$, где d — элемент четвертого порядка из Q, $g_1 \in H$. Элемент g_1 является, очевидно, произведением элементов a^2 и c_k, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому, учитывая условия 1 и 2, получаем $x^{-1} g x = (x^{-1} d x) \times (x^{-1} g_1 x) = d^{\pm 1} g_1 = g^{\pm 1}$ и, значит, $\langle g \rangle \lhd G$. Следовательно, все подгруппы из N, не содержащиеся в H, инвариантны в G, поэтому $N_0 = \langle a^2 \rangle \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times \ldots$ Предложение доказано.

Теорема 1. *Бесконечные группы с нетривиальным i-сепаратором исчерпываются группами следующих типов*:

1) G — *бесконечная QH-группа*;

2) $G = A \rtimes \langle x \rangle$, *где A — конечная нециклическая абелева группа, $|x| = \infty$ и выполняются следующие условия*:

а) *элемент x индуцирует на каждой силовской p-подгруппе группы A, за исключением некоторой одной нециклической q-подгруппы S_q степенной автоморфизм*;

б) $\exp S_q \geqslant q^2$ *и все не инвариантные в G подгруппы из S_q порождают в S_q собственную подгруппу*;

3) $G = (Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times A) \rtimes \langle x \rangle$, *где $Q = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов, $|c_k| = 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $|x| = \infty$, A — конечная абелева группа нечетного порядка и выполняется следующее условие*:

а) *все подгруппы из A и Q инвариантны в G, $x^{-1} c_k x = E_k c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $E_k = 1$ или $E_k = a^2$, причем $E_k = a^2$ хотя бы для одного k*;

4) $G = (A \times B) \rtimes \langle x \rangle$, *где A — конечная нециклическая абелева группа нечетного порядка, удовлетворяющая условиям* а) *и* б) *из* п. 2, *B — конечная гамильтонова 2-группа, все подгруппы которой инвариантны в G*;

5) $G = ((\langle a \rangle P \times D) \rtimes \langle x \rangle$, *где $\langle a \rangle P = H$ — конечная p-группа, $H' \subset \langle a \rangle \cap P$, P порождается всеми не инвариантными в H подгруппами, $\exp P < |a|$, $|a| \geqslant 8$ и если $g \in \langle a \rangle P \setminus P$, то $\langle g \rangle \lhd G$, D — конечная дедекиндова группа без элементов порядка p, все подгруппы которой инвариантны в G, $|x| = \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — бесконечная группа с нетривиальным i-сепаратором. Если группа G периодическая, то в силу следствия 1 она является группой типа 1. Допустим, что группа G непериодическая. Тогда ввиду леммы 3 она разлагается в полупрямое произведение $G = N \rtimes \langle x \rangle$, где N конечная дедекиндова или конечная QH-группа, $|x| = \infty$. Поэтому возможны следующие три случая.

Случай 1. Группа N абелева. Поскольку $1 \neq i(G) < N$, то некоторые подгруппы из N не инвариантны в G и, очевидно, порождают в группе N собственную подгруппу. Следовательно, в силу предложения 2 G является группой типа 2.

Случай 2. N — гамильтонова группа. Тогда (см. теорему 12.5.4 из [9]) $N = Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_n \rangle \times A$, где $Q = \langle a, b \rangle$ — группа кватернионов, $|c_k| = 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, A — абелева группа нечетного порядка. Поскольку группа G обладает нетривиальным i-сепаратором, то она содержит не инвариантные подгруппы бесконечного индекса, которые, очевидно, лежат в N. Пусть $\langle a \rangle$ — некоторая не инвариантная в G циклическая подгруппа бесконечного индекса. Не нарушая общности, можно предположить, что $\langle a \rangle$ содержится либо в подгруппе $Q \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_k \rangle = H$, либо принадлежит A. В самом деле, если это не так, то $a =$

$= xy$, где $x \in H$, $y \in A$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Поскольку $(|H|, |A|) = 1$, то $(|x|, |y|) = 1$ и потому $\langle a \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$. Так как подгруппа $\langle a \rangle$ не инвариантна в G, то отсюда следует, что хотя бы одна из подгрупп $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ не инвариантна в G.

Пусть $\langle a \rangle < H$. Нетрудно убедиться, что в этом случае все не инвариантные в G подгруппы из H порождают в H собственную подгруппу, а все подгруппы из A инвариантны в G. Поэтому ввиду предложения 3 G — группа типа 3. Легко видеть, что в этом случае $H \neq Q$.

Если $\langle a \rangle < A$, то, как нетрудно убедиться, все не инвариантные в G подгруппы из A порождают в A собственную подгруппу, а все подгруппы из H инвариантны в G. Таким образом, учитывая предложение 2, получаем, что G является группой типа 4.

Случай 3. N являеться QH-группой. Тогда, как следует из результатов работы [8], $N = H \times D$, где $H = \langle a \rangle P$ — силовская p-подгруппа группы N, $H' \subset \langle a \rangle \cap P$, $\exp P < |a|$, $|a| \geqslant 8$, D — конечная дедекиндова группа. Все не инвариантные подгруппы группы N порождают в ней собственную подгруппу $P \times D$. Поэтому $\langle a \rangle \lhd G$ (иначе, $\langle a \rangle \subset i(G)$ и $i(G) = N$, что невозможно). Таким образом, отсюда в силу строения группы N следует, что $i(G) = P \times D$. Поэтому для всякого $g \in \langle a \rangle P \setminus P$, $\langle g \rangle \not\subset i(G)$ и, значит, $\langle g \rangle \lhd G$.

Нетрудно убедиться, что все подгруппы из D инвариантны в группе G. Действительно, если некоторая подгруппа $\langle g \rangle$ из D не инвариантна в G, то подгруппа $\langle g \rangle \times H$ также не инвариантна в группе G. В самом деле, если это не так, то подгруппа $\langle g \rangle$ является пересечением двух инвариантных в группе G подгрупп $\langle g \rangle \times H$ и D ($D \lhd G$ как характеристическая подгруппа нормального делителя) и потому $\langle g \rangle \lhd G$, что противоречит выбору подгруппы $\langle g \rangle$. Следовательно, подгруппа $\langle g \rangle \times H$ не инвариантна в G и так как $|G : \langle g \rangle \times H| = \infty$, то $\langle g \rangle \times H \subset i(G)$. Но тогда $i(G) = N$, что невозможно. Следовательно, все подгруппы из D инвариантны в группе G и потому в этом случае G является группой типа 5. Необходимость доказана.

Достаточность. Для групп типа 1, 2 достаточность очевидна. Если G — группа типа 3 или 4, то достаточность получается из предложений 2 и 3.

Пусть G — группа типа 5 и $\langle g \rangle$ — ее произвольная циклическая подгруппа бесконечного индекса, не содержащаяся в подгруппе $R = P \times D$. Поскольку $\langle g \rangle \not\subset R$ и $\langle g \rangle \subset \langle a \rangle P \times D$, то $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in \langle a \rangle P \setminus P$, $g_2 \in D$. Из того, что $(|\langle a \rangle P|, |D|) = 1$, следует $\langle g \rangle = \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle$. Так как $\langle g_1 \rangle \lhd G$ и $\langle g_2 \rangle \lhd G$, то отсюда вытекает что $\langle g \rangle \lhd G$. Следовательно, в группе G инвариантны все подгруппы бесконечного индекса, не содержащиеся в подгруппе R и, значит, G обладает нетривиальным i-сепаратором. Теорема доказана.

1. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах. I // Мат. зап. Урал. ун-та — 1966.— **5**, № 3.— С. 101—106.
2. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах. II // Там же.— 1968.— **6**, № 3.— С. 50—52.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
4. *Федоров Ю. Г.* О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс // Успехи мат. наук.— **6**, вып. 1.— С. 187—189.
5. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы //Группы с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 6—14.
6. *Крайчук А. В.* Группы с системами инвариантных подгрупп бесконечного индекса // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 108—110.
7. *Крайчук А. В.* О группах с некоторыми сепарирующими подгруппами // Исслед. по теорет. и прикл. вопр. математики.— Киев : Ин-т математики АН УССР. 1986.— С. 24—25.
8. *Cappitt D.* Generalized Dedekind groups // J. Algebra.— 1971.— **17**, N 3.— P. 310—316.
9. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.

Ровен. пед. ин-т

Получено 16.03.87