УДК 517.9

С. П. Роговченко

«Укорочение» счетных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

При исследовании нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа с помощью метода усреднения [1] возникает задача, связанная с решением счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1—3]. В настоящей статье рассматривается аналогичная задача об «укорочении» (в смысле [3]) счетной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, к которой приходим, применяя при изучении гиперболических импульсных систем метод усреднения.

Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx_k/dt = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots),$$
$$\Delta x_k|_{t_i} = \varepsilon I_{ik}(x_1, x_2, \dots), \quad i, k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

и «укороченную» систему

$$dx_k/dt = \varepsilon X_k (t, x_1, \dots, x_n, 0 \dots),$$

$$\Delta x_k |_{t_i} = \varepsilon I_{ik} (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad k = \overline{1, n}, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

которая получается из исходной системы (1), если положить в ней равными нулю все искомые функции, начиная с $(n+1)$-й, и отбросить все уравнения, начиная с $(n+1)$-го.

Введем в рассмотрение банахово пространство $\mathfrak{B}$ кусочно-непрерывных (с разрывами первого рода при $t = t_i$) функций $\varphi(t)$, заданных на отрезке $[0, T]$, с нормой $|\varphi(t)|_0 = \max\limits_{t \in [0, T]} |\varphi(t)|$, где $|*|$ — обычная норма в $C([0, T])$. Сходимость последовательности функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ в $\mathfrak{B}$ эквивалентна обычной равномерной сходимости на промежутке $[0, T]$.

Предположим, что правые части импульсной системы (1) удовлетворяют в некоторой области

$$0 \leqslant t \leqslant T, \ |x_k|_0 \leqslant R, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3}$$

следующим условиям:

1) функции $X_k(t, x_1, x_2, \dots)$ и $I_{ik}(x_1, x_2, \dots)$ непрерывны относительно своих переменных;

2) функции $X_k(t, x_1, x_2, \dots)$ и $I_{ik}(x_1, x_2, \dots)$ удовлетворяют усиленному условию Коши—Липшица:

$$|X_k(t_1, x_1, \dots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \dots) - X_k(x_1, \dots, x_{m-1},$$
$$x''_m, x''_{m+1}, \dots)|_0 \leqslant A(t)\ \varepsilon_k(m)\,\overline{\Delta} u,$$
$$|I_{ik}(x_1, \dots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \dots) - I_{ik}(x_1, \dots, x_{m-1},$$
$$x''_m, x''_{m+1}, \dots)|_0 \leqslant K_i \varepsilon_{ik}(m)\,\overline{\Delta} u, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $(t, x_1, x_2, \dots, x'_m, x'_{m+1}, \dots)$ и $(t, x_1, x_2, \dots, x''_m, x''_{m+1, \dots})$ — точки из области (3), $A(t)$ — функция, принадлежащая пространству $\mathfrak{B}$, K_i — положительные постоянные, $\overline{\Delta} u = \sup\,[|x'_m - x''_m|_0, \ |x'_{m+1} - x''_{m+1}|_0, \dots]$, а $\varepsilon_k(m) \to 0$ и $\varepsilon_{ik}(m) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех i и k;

3) при любом $t \in [0, T]$ и при $x_1 = x_2 = \dots = 0$ выполняются неравенства $|X_k(t, 0, \dots)|_0 \leqslant B(t)$ и $|I_{ik}(0, \dots)|_0 \leqslant L_i < \infty$, где $B(t)$ — функция, принадлежащая пространству $\mathfrak{B}$, L_i — некоторые положительные постоянные, $i, k = 1, 2, \dots$.

Кроме того, предполагается, что последовательность моментов импульсного воздействия $\{t_i\}$ не имеет конечных предельных точек.

Замечание 1. Выполнение условия 2 влечет за собой выполнение обычного условия Коши—Липшица:

$$|X_k(t, x'_1, \dots) - X_k(t, x''_1, \dots)|_0 \leqslant A(t)\,\overline{\Delta} v,$$
$$|I_{ik}(x'_1, \dots) - I_{ik}(x''_1, \dots)|_0 \leqslant K_i \overline{\Delta} v, \quad i, k = 1, 2, \dots,$$

где $A(t)$ — функция из пространства $\mathfrak{B}$, K_i — некоторые положительные постоянные, точки $(t, x'_1, \dots)$ и $(t, x''_1, \dots)$ принадлежат области (3), а $\overline{\Delta} v = \sup\{|x'_1 - x''_1|_0, \ |x'_2 - x''_2|_0, \dots\}$.

Замечание 2. При сделанных нами предположениях можно легко установить существование и единственность решения исходной импульсной системы (1), основываясь на результатах работы [3] и используя методику, предложенную в [4].

Рассмотрим последовательность функций $x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), x_3(t, \varepsilon), \dots$, принадлежащих пространству $\mathfrak{B}$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и удовлетворяющих условиям $|x_k(t, \varepsilon)|_0 \leqslant R$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что функции $X_k(t, x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \dots)$ и $I_{ik}(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \dots)$, $i, k = 1, 2, \dots$, также будут принадлежать пространству $\mathfrak{B}$. Предположим, что $x_k(t, \varepsilon), k = 1, 2, \dots,$—

решение счетной импульсной системы (1), которое определяется начальными значениями $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots)$ из области (3), $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Положим $x_0 = \sup\{|x_1^0|, |x_2^0|, \ldots\}$, $x(t, \varepsilon) = \sup\{|x_1(t, \varepsilon)|_0, |x_2(t, \varepsilon)|_0, \ldots\}$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $t \in \sigma$, где $\sigma = [t^*, t^{**}]$ — произвольно взятый отрезок длины δ, удовлетворяющий условию $\sigma \in [0, T]$; при этом без ограничения общности можно считать, что $t^* < t_0 < t_1 < \ldots < t_q < t^{**}$.

Согласно условиям 2 и 3 в любой точке области (3)

$$|X_k(t, x_1, \ldots)|_0 \leqslant A(t) \sup\{|x_1(t)|_0, |x_2(t)|_0, \ldots\} + B(t),$$
$$|I_{ik}(x_1, \ldots)|_0 \leqslant K_i \sup\{|x_1(t_i)|_0, |x_2(t_i)|_0, \ldots\} + L_i.$$

Следовательно,

$$x(t, \varepsilon) \leqslant x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} [A(t) x(t, \varepsilon) + B(t)]\, dt + \varepsilon \sum_{t_0 < t_i < t} [K_i x(t_i, \varepsilon) + L_i].$$

Пусть $t \geqslant t_0$. Тогда $x(t, \varepsilon) \leqslant v(t, \varepsilon)$, где $v(t, \varepsilon)$ — решение интегро-суммарного уравнения

$$v(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} [A(t) v(t, \varepsilon) + B(t)]\, dt + \varepsilon \sum_{t_0 < t_i < t} [K_i v(t_i, \varepsilon) + L_i]. \tag{4}$$

Для всех $t \in \sigma$ положим

$$A = \begin{cases} \max A(t), & t \neq t_i, \\ \max\{A(t_i), K_i\}, & t = t_i, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \max B(t), & t \neq t_i, \\ \max\{B(t_i), L_i\}, & t = t_i. \end{cases}$$

Тогда используя лемму 2.3 из [4] и представление (4), получаем

$$x(t, \varepsilon) \leqslant x_0 (1 + \varepsilon A)^{i(\sigma)} \exp(\varepsilon A \delta) + \frac{B}{A} [(1 + \varepsilon A)^{i\delta} \exp(\varepsilon A \delta) - 1],$$

где под $i(\sigma)$ понимается количество моментов импульсного воздействия на отрезке σ.

Пусть $u_{sn} = u_{sn}(t, \varepsilon)$, $s = \overline{1, n}$,— решение «укороченной» импульсной системы (2), удовлетворяющее начальным условиям $u_{sn}(t_0, \varepsilon) = x_s^0$, $s = \overline{1, n}$. Положим $u_{sn} = 0$ для $s > n$. Легко видеть, что функции $u_{sn}(t, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям

$$|u_{sn}(t, \varepsilon)|_0 \leqslant x_0 (1 + \varepsilon A)^{i(\sigma)} \exp(\varepsilon A \delta) + \frac{B}{A} [(1 + \varepsilon A^{i\delta}) \exp(\varepsilon A \delta) - 1] = \gamma \tag{5}$$

при любых s, n и при любом $t \in \sigma$, причем

$$|u_{sn}(t + \Delta t, \varepsilon) - u_{sn}(t, \varepsilon)|_0 \leqslant (A\gamma + B) \Delta t. \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots, n_\rho$, стремящуюся к ∞. Соответствующие этим числам последовательности функций $u_{sn_1}(t, \varepsilon)$, $u_{sn_2}(t, \varepsilon), \ldots, u_{sn_\rho}(t, \varepsilon), \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют неравенствам (5) и (6). Следовательно, на отрезке $[t^*, t_1]$ эти последовательности равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, поэтому по теореме Арцела из них можно выделить подпоследовательность $u_{1\alpha_1}(t, \varepsilon)$, $u_{1\alpha_2}(t, \varepsilon), \ldots, u_{1\alpha_n}(t, \varepsilon), \ldots$, которая равномерно сходится на отрезке $[t^*, t_1]$. Полученную подпоследовательность рассмотрим на отрезке $(t_1, t_2]$. На этом отрезке она является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной, поэтому по теореме Арцела из нее можно выделить подпоследовательность $u_{1\alpha_1}^1(t, \varepsilon)$, $u_{1\alpha_2}^1(t, \varepsilon), \ldots, u_{1\alpha_n}^1(t, \varepsilon), \ldots$, которая будет равномерно сходиться на отрезке $[t^*, t_2]$. Продолжая аналогичные рассуждения относительно отрезков $(t_2, t_3], \ldots, (t_q, t^{**}]$, заключаем, что из последовательности $u_{1\alpha_1}(t, \varepsilon)$, $u_{1\alpha_2}(t, \varepsilon), \ldots, u_{1\alpha_n}(t, \varepsilon)$, можно выделить подпоследовательность $u_{1\alpha_1}^q(t, \varepsilon)$,

$u^q_{1\alpha_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{1\alpha_n}(t, \varepsilon), \ldots$, которая будет равномерно сходиться на отрезке $[t^*, t^{**}] = \sigma$.

Рассуждая аналогично, можно из бесконечной последовательности $u_{2\alpha_1}(t, \varepsilon), u_{2\alpha_2}(t, \varepsilon), \ldots, u_{2\alpha_n}(t, \varepsilon), \ldots$ выделить подпоследовательность $u^q_{2\beta_1}(t, \varepsilon)$, $u^q_{2\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{2\beta_n}(t, \varepsilon), \ldots$, которая будет равномерно сходиться на отрезке σ. Из последовательности $u_{3\beta_1}(t, \varepsilon), u_{3\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u_{3\beta_n}(t, \varepsilon), \ldots$ можно выделить подпоследовательность $u^q_{3\gamma_1}(t, \varepsilon), u^q_{3\gamma_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{3\gamma_n}(t, \varepsilon), \ldots$, которая также будет равномерно сходится на отрезке σ. Продолжая этот процесс, получаем счетное множество бесконечных последовательностей

$$\begin{gathered} u^a{}_{\alpha_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{1\alpha_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{1\alpha_n}(t, \varepsilon), \ldots, \\ u^q_{2\beta_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{2\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{2\beta_n}(t, \varepsilon), \ldots, \\ u^q_{3\gamma_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{3\gamma_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{3\gamma_n}(t, \varepsilon), \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{7}$$

каждая из которых равномерно сходится на отрезке σ. С помощью выражений (7) образуем последовательности

$$\begin{gathered} u^q_{1\alpha_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{1\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{1\delta_n}(t, \varepsilon), \ldots, \\ u^q_{2\alpha_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{2\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{2\delta_n}(t, \varepsilon), \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^q_{s\alpha_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{s\beta_2}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{s\delta_n}(t, \varepsilon), \ldots. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Каждая бесконечная последовательность

$$u^q_{s\alpha_1}(t, \varepsilon),\ u^q_{s\beta_2}(t, \varepsilon),\ u^q_{s\gamma_3}(t, \varepsilon), \ldots, u^q_{s\delta_n}(t, \varepsilon), \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

равномерно сходится на отрезке σ, поскольку при отбрасывании некоторого числа членов в ней получим подпоследовательность, содержащуюся в одной из равномерно сходящихся последовательностей (7). Обозначим пределы последовательностей (8) через

$$\lim_{\delta_n \to \infty} u^q_{s\delta_n}(t, \varepsilon) = u^q_s(t, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Очевидно, что функции $u^q_s(t, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам (5) и (6) и являются согласно способу построения равностепенно непрерывными на отрезке σ. Обозначим для простоты последовательности (8) через $\varphi_{s1}(t, \varepsilon), \ldots$, $\ldots, \varphi_{s2}(t, \varepsilon), \ldots, \varphi_{sn}(t, \varepsilon), \ldots, s = 1, 2, \ldots$. Тогда при фиксированных k и l с использованием условия 2 и замечания 1 получим

$$\begin{gathered} |X_k(t, \varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \\ \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant A \sup\{|u_1(t, \varepsilon) - \\ - \varphi_{1n}(t, \varepsilon)|_0, \ldots, |u_l(t, \varepsilon) - \varphi_{ln}(t, \varepsilon)|_0\}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} |I_{ik}(\varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \\ \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant A \sup\{|u_1(t, \varepsilon) - \varphi_{1n}(t, \varepsilon)|_0, \ldots \\ \ldots, |u_l(t, \varepsilon) - \varphi_{ln}(t, \varepsilon)|_0\}. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\eta > 0$ — сколь угодно малое наперед заданное число. Тогда найдется такое $N = N(l, \eta)$, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\sup\{|u_1(t, \varepsilon) - \varphi_{1n}(t, \varepsilon)|_0, \ldots, |u_l(t, \varepsilon) - \varphi_{ln}(t, \varepsilon)|_0\} \leqslant \eta/2A,$$

согласно которому соотношения (10) и (11) примут вид

$$|X_k(t, \varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant \eta/2, \tag{12}$$

$$|I_{ik}(\varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant \eta/2. \tag{13}$$

На основании условия 2 и оценок (5), (6) имеем

$$|X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots) - X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant 2A\gamma\varepsilon_k(l), \tag{14}$$

$$|I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots) - I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 \leqslant 2A\gamma\varepsilon_{ik}(l). \tag{15}$$

Поскольку $\varepsilon_k(l) \to 0$ и $\varepsilon_{ik}(l) \to 0$ при $l \to \infty$, то для сколь угодно малого наперед заданного $\eta > 0$ найдется такое $N_1 = N_1(l, \eta)$, что $\max\{\varepsilon_k(l), \varepsilon_{ik}(l)\} < \eta/4A\gamma$ при $l > N_1$ и соотношения (14) и (15) примут вид

$$|X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}(t, \varepsilon), \ldots) - X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 < \eta/2, \tag{16}$$

$$|I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots, u_l(t, \varepsilon), \varphi_{l+1,n}(t, \varepsilon), \varphi_{l+2,n}'(t, \varepsilon), \ldots) - I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 < \eta/2. \tag{17}$$

С учетом оценок (12), (13), (16), (17) окончательно имеем

$$|X_k(t, \varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 < \eta,$$

$$|I_{ik}(\varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) - I_{ik}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)|_0 < \eta$$

при $n > N$ для всех $t \in \sigma$ и всех целых i, что позволяет осуществить следующие предельные переходы:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} X_k(t, \varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots)\, dt = \int_{t_0}^{t} X_k(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)\, dt, \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{i(\sigma)} I_{jk}(\varphi_{1n}(t, \varepsilon), \varphi_{2n}(t, \varepsilon), \ldots) = \sum_{j=1}^{i(\sigma)} I_{jk}(u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots), \quad t \in \sigma, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Из (18) следует, что функции $u_s(t, s)$, $s = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют интегросуммарным уравнениям

$$u_s(t, \varepsilon) = x_s^0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} X_s(t, u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), \ldots)\, dt + \varepsilon \sum_{j=1}^{i(\sigma)} I_{jk}(u_1(t_j, \varepsilon), u_2(t_j, \varepsilon), \ldots), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

а следовательно, $u_s(t, \varepsilon) = x_s(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots$, т. е. при любом фиксированном l для произвольного сколь угодно малого наперед заданного $\eta > 0$ найдется такое достаточно большое $N_2 = N_2(l, \eta)$, что при $n > N_2$

$$\max_{t\in\sigma}\{|x_1(t, \varepsilon) - u_{1n}(t, \varepsilon)|_0, \ldots, |x_l(t, \varepsilon) - u_{ln}(t, \varepsilon)|_0\} < \eta. \tag{19}$$

Очевидно, что выбор постоянной N_2 не зависит от ε и $u_{sn}(t, \varepsilon) \to x_s(t, \varepsilon)$ при $n \to \infty$ равномерно по ε для каждого $s = 1, 2, \ldots$. Следовательно, решения «укороченной» импульсной системы (2) удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} u_{sn}(t, \varepsilon) = x_s(t, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $x_s(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots$,— решения исходной счетной импульсной системы (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для счетной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *выполнены предположения* 1—3. *Тогда решения «укороченной» системы* (2) *удовлетворяют соотношению* (20), *причем справедлива оценка* (19).

Следуя [5, 6], предположим, что равномерно относительно $x_1, x_2, \ldots$ из области (3) существуют конечные пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\, dt = X_k^0(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{0<t_i<T} I_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = I_k^0(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

и рассмотрим усредненную «укороченную» систему, соответствующую «укороченной» импульсной системе (2):

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \varepsilon\,[X_k^0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) + I_k^0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots). \tag{21}$$

Согласно аналогу классической теоремы Н. Н. Боголюбова [1] для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [5, 6], если $\xi_k = \xi_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, n}$, является решением усредненной «укороченной» импульсной системы (21), лежащим в области (3) вместе с некоторой своей ρ-окрестностью, то при определенных условиях (см. [5, 6]), выполнение которых в рассматриваемом случае следует из предположений 1—3, для любых сколь угодно малых положительных ρ и η и любого достаточно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех положительных $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ «укороченная» импульсная система (2) имеет решения $u_{sn}(t, \varepsilon)$, определенные при $t \in [0, L/\varepsilon]$ и такие, что

$$|u_{sn}(t, \varepsilon) - \xi_s(t, \varepsilon)|_0 < \eta, \; t \in [0, L/\varepsilon], \quad s = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Выберем теперь число L так, чтобы $L/\varepsilon \leqslant T$, и пусть $x_s = x_s(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots$,— решения счетной импульсной системы (1). Тогда справедливо неравенство

$$|x_s(t, \varepsilon) - \xi_s(t, \varepsilon)|_0 \leqslant |x_s(t, \varepsilon) - u_{sn}(t, \varepsilon)|_0 + |u_{sn}(t, \varepsilon) - \xi_s(t, \varepsilon)|_0,$$

из которого с учетом оценок (19) и (22) получаем

$$|x_s(t, \varepsilon) - \xi_s(t, \varepsilon)|_0 < 2\eta, \quad t \in [0, L/\varepsilon], \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть помимо предположений* 1—3 *выполняется условие*

4) *усредненная «укороченная» система* (21) *имеет решение* $\xi_k = \xi_k(t, \varepsilon)$, *которое для всех* $t \in [0, L]$ *принадлежит области* (3) *вместе с некоторой* ρ-*окрестностью. Тогда для любого* $\eta > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *счетная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *имеет решение* $x_s(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots$, *определенное при* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *и такое, что имеет место неравенство* (23).

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 592 с.
3. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех.— 1959.— Вып. 7.— С. 52—71.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 56—64.
6. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика.— 1971.— Вып. 9.— С. 101—117.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 10.12.87