УДК 517.5

Ю. И. Мельник

Приближение регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $C = \overline{M} \setminus M$ — граница $\overline{M}$. Предполагаем, что начало координат принадлежит M. Пусть $\mathscr{L}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda)$, $d_k \neq 0$, — экспоненциальный полином (квазиполином).

В дальнейшем потребуются следующие свойства квазиполинома $\mathscr{L}(\lambda)$ (положительные постоянные, различные в разных выражениях, ниже обозначаются буквами a, A, A_k и т. п.):

а) вдали от начала координат все нули $\mathscr{L}(\lambda)$ простые;

б) вдали от начала координат нули $\mathscr{L}(\lambda)$ (обозначим их через $\lambda_m^{(j)}$) имеют вид $\lambda_m^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} + \delta_m^{(j)}$, где $\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} \overset{\mathrm{df}}{=} 2\pi mi/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \exp(i\alpha_j)$, $|\delta_m^{(j)}| \leqslant A \exp(-am)$, $j = 1, \ldots, N$, $\gamma_{N+1} = \gamma_1$, q_j, α_j — некоторые числа;

в) для фиксированных j, $k \geqslant 0$ и любых $z \in \overline{M}$ справедлива оценка

$$|(\lambda_m^{(j)})^k \exp(\lambda_m^{(j)})/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)})^k (-1)^m B_j \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_{j+1} + \gamma_j)/2)\}| \leqslant$$
$$\leqslant A_k \exp(-am),$$

где $B_j \neq 0$ — некоторые числа.

Свойства а), б) имеются в монографии [1, с. 56], свойство в) выводится на основании изложенного в § 2 гл. 1 той же монографии.

В силу свойства б) множество нулей $\mathscr{L}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_m^{(j)}\}_{m=m(j)}^{\infty}\right),$$

где m_0 и $m(j)$, $j = 1, \ldots, N$,— некоторые фиксированные натуральные числа. Учитывая свойство а), ниже для простоты предполагаем, что нули λ_m, $1 \leqslant m \leqslant m_0$, простые.

В работе устанавливаются прямая и обратная теоремы приближения регулярных в M и непрерывных в $\overline{M}$ функций $f(z)$ квазиполиномами вида

$$\mathscr{P}_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_m^{(n)} \exp(\lambda_m z)/\mathscr{L}'(\lambda_m) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n_j} \omega_{jm}^{(n_j)} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}), \quad n = (n_1, \ldots, n_N), \tag{1}$$

аналогичные известным (прямой и обратной) теоремам приближения периодических функций тригонометрическими полиномами [2, с. 204, 233].

2. Пусть G область комплексной плоскости. Обозначим через $AC(\overline{G})$ банахово пространство функций $f(z)$, которые регулярны в G и непрерывны в $\overline{G}$ с нормой $\|f\|_{AC(\overline{G})} = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$. Пусть $\Omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности (т. е. $\Omega(h)$ задана при $h > 0$, положительна, не убывает, полуаддитивна и $\Omega(+0) = 0$). Через $AH^{\Omega}(\overline{G})$ обозначим класс функций $f \in AC(\overline{G})$, которые удовлетворяют условию $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A\Omega(|z_1 - z_2|)$,

z_1, $z_2 \in \overline{G}$, через $AW^rH^\Omega(\overline{G})$ (r — натуральное) — класс регулярных в G функций $f(z)$ таких, что $f^{(r)} \in AH^\Omega(\overline{G})$, и положим $AW^0H^\Omega(\overline{G}) \equiv AH^\Omega(\overline{G})$.

Функции $f \in AC(\overline{M})$ ставится в соответствие ряд экспонент [3] (в [3] $d_k = 1$, но это несущественно)

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \omega_f(\lambda_m) \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m), \tag{2}$$

где $\lambda_m \in \Lambda$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, $\omega_f(\lambda_m) = \lim\limits_{r\uparrow 1} \omega_{f,r}(\lambda_m)$, $\omega_{f,r}(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(2/(r+1))} \times$ $\times \left\{\int\limits_0^t f(r(t-\eta)) \exp(\zeta\eta)\, d\eta\right\} \gamma(t)\, dt$, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией $L(\lambda)$, $\Gamma(R) = \{\zeta_R : \xi_R = R\zeta,\ \zeta \in C\}$.

Известно [3], что ряд (2) сходится к $f(z)$ абсолютно и равномерно в $\overline{M}$.

Теорема 1 (прямая). *Пусть $f \in AW^rH^\Omega(\overline{M})$ (r — целое неотрицательное), модуль непрерывности $\Omega(h)$ удовлетворяет условию Зигмунда*

$$\int\limits_0^h \{\Omega(t)/t\}\, dt + h \int\limits_h^{2\pi} \{\Omega(t)/t^2\}\, dt \leqslant A\Omega(h), \tag{3}$$

выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f^{(s)}(\gamma_k) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \tag{4}$$

и

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_f(\lambda_m) \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n'_j} (1 - \varkappa_m^{r+1})\, \omega_f(\lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \tag{5}$$

где $n'_j = 2[(n_j - 1)/2]$ ($[x]$ обозначает целую часть x), а коэффициенты $\varkappa_m = \varkappa_m^{(n_j)}$ определяются ядром Джексона из соотношений

$$\varkappa_m = 1 - \mathcal{J}_m,$$

$$\{3/2n_j(2n_j^2 + 1)\}\ \{\sin(n_j t/2)/\sin(t/2)\}^4 = \mathcal{J}_0/2 + \sum_{m=1}^{n'_j} \mathcal{J}_m \cos mt.$$

Тогда

$$\|f - \mathcal{P}_n\|_{AC(\overline{M})} \leqslant A \sum_{k=1}^{N} n_k^{-r} \Omega(1/n_k). \tag{6}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы из [4].

Лемма. *В условиях теоремы 1 при фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant N$, коэффициенты $\omega_f(\lambda_m^{(j)})$ ряда (2) являются коэффициентами Фурье некоторой 2π-периодической функции $\varphi_j(t)$ из класса W^rH^Ω (здесь и далее используются обычные обозначения классов 2π-периодических функций).*

При $r = 0$ лемма доказана в [5]. При $r \geqslant 1$ ее справедливость легко следует из соотношения [4] $\omega_f(\lambda_m^{(j)}) = \omega_{f^{(r)}}(\lambda_m^{(j)}) (\lambda_m^{(j)})^{-r}$, того факта, что $f^{(r)} \in AH^\Omega(\overline{M})$, и свойства б) квазиполинома.

Доказательство теоремы. Учитывая свойство б) квазиполинома и абсолютную сходимость ряда (2) в $\overline{M}$, имеем

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(z) + \Phi(z), \tag{7}$$

где

$$\Phi_j(z) = B_j \sum_{m=m(j)}^{\infty} (-1)^m \omega_f(\lambda_m^{(j)}) \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}, \quad j = 1, \dots, N, \tag{8}$$

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_f(\lambda_m) \exp(\lambda_m)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{\infty} \omega_f(\lambda_m^{(j)}) \{\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2))\}. \tag{9}$$

Положим

$$p_{jn_j}(z) = B_j \sum_{m=m(j)}^{n_j} (1 - \varkappa_m^{r+1})(-1)^m \omega_f(\lambda_m^{(j)}) \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}, \tag{10}$$

$$p_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_f(\lambda_m) \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n_j} (1 - \varkappa_m^{r+1}) \omega_f(\lambda_m^{(j)}) \{\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (-1)^m \times$$

$$\times B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2))\}, \tag{11}$$

$$F_j(w) = \sum_{m=m(j)}^{\infty} \omega_f(\lambda_m^{(j)}) w^m, \tag{12}$$

$$\pi_{jn_j}(w) = \sum_{m=m(j)}^{n_j} (1 - \varkappa_m^{r+1}) \omega_f(\lambda_m^{(j)}) w^m. \tag{13}$$

Из (8), (12), (10), (13) находим

$$\Phi_j(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1}) q_j \exp(i\alpha_j/2)\} F_j\{\exp(2\pi i (z - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \\ - \gamma_j))\} \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(z - \gamma_j)\}, \tag{14}$$

$$p_{jn_j}(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1}) q_j \exp(i\alpha_j/2)\} \pi_{jn_j}\{\exp(2\pi i (z - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \\ - \gamma_j))\} \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(z - \gamma_j)\}. \tag{15}$$

В силу леммы из (12) следует $F_j(\exp(i\theta)) \in W^r H^\Omega$. Поэтому [2, с. 204] $|F_j(w) - \pi_{jn_j}(w)| \leqslant A n_j^{-r} \Omega(1/n_j)$, $|w| = 1$. Отсюда на основании принципа максимума модуля заключаем, что

$$|F_j(w) - \pi_{jn_j}(w)| \leqslant A n_j^{-r} \Omega(1/n_j), \quad |w| \leqslant 1. \tag{16}$$

Так как $|\exp\{2\pi i (z - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)| \leqslant 1$, $z \in \overline{M}$, то из (14) — (16) имеем

$$|\Phi_j(z) - p_{jn_j}(z)| \leqslant A n_j^{-r} \Omega(1/n_j), \quad z \in \overline{M}. \tag{17}$$

Из (9), (11), свойства в) квазиполинома и того факта [2, с. 132], что $\varkappa_m^{(n_j)} = O(m^2/n_j^2)$, легко следует оценка

$$|\Phi(z) - p_n(z)| \leqslant A \sum_{j=1}^{N} (n_j^{-2(r+1)} + e^{-an_j}) = O\left(\sum_{j=1}^{N} n_j^{-r} \Omega(1/n_j)\right), \quad z \in \overline{M}. \tag{18}$$

Неравенство (6) теперь сразу следует из (5), (7), (10), (11) (17), (18). Теорема доказана.

3. Т е о р е м а 2 (о б р а т н а я). *Пусть* $f \in AC(\overline{M})$ *и имеется последовательность квазиполиномов* $P_n(z)$ *вида* (1) *таких, что при некотором* *целом неотрицательном r выполняется неравенство*

$$\| f-\mathcal{P}_n \|_{AC(\overline{M})} \leqslant A \sum_{j=1}^{N} n_j^{-r}\Omega(1/n_j), \quad n=(n_1, \dots, n_N), \tag{19}$$

где модуль непрерывности $\Omega(h)$ удовлетворяет условию Зигмунда (3). *Тогда $f \in AW^rH^\Omega(\overline{M})$ и выполняются условия* (4).

Доказательство. Положим

$$p_{jn_j}(z) = B_j \sum_{m=m(j)}^{n_j} (-1)^m \omega_{jm}^{(n_j)} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2\},\ j=1,\dots,N, \tag{20}$$

$$p_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_m^{(n)} \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{n_j} \omega_{jm}^{(n_j)} \{\exp(\lambda_m^{(j)}z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) -$$

$$-(-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}, \quad n=(n_1,\dots,n_N), \tag{21}$$

$$\pi_{jn_j}(w) = \sum_{m=m(j)}^{n_j} \omega_{jm}^{(n_j)} w^m. \tag{22}$$

Из (1), (20), (21) находим

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{j=1}^{N} p_{jn_j}(z) + p_n(z), \quad n=(n_1,\dots,n_N), \tag{23}$$

а из (20), (22) получаем

$$p_{jn_j}(z) = B_j \exp\{(\gamma_j-\gamma_{j+1})q_j\exp(i\alpha_j)/2\}\,\pi_{jn_j}\{\exp(2\pi i(z-\gamma_j)/(\gamma_{j+1}-$$

$$-\gamma_j))\}\exp\{q_j\exp(i\alpha_j)(z-\gamma_j)\}. \tag{24}$$

При фиксированном j, $1\leqslant j\leqslant N$, для любого натурального ν_j, используя (доказанные ниже) соотношения (33)—(35), в силу (23), (20), (21), (19) и свойства в) квазиполинома имеем

$$\| p_{j,n_j+\nu_j} - p_{j,n_j}\|_{AC(\overline{M})} \leqslant \| \mathcal{P}_{(n_1,\dots,n_j+\nu_j,\dots,n_N)} - \mathcal{P}_{(n_1,\dots,n_j,\dots,n_N)}\|_{AC(\overline{M})} +$$

$$+\Big\| \sum_{m=1}^{m_0} (\omega_m^{(n_1,\dots,n_j+\nu_j,\dots,n_N)} - \omega_m^{(n_1,\dots,n_j,\dots,n_N)})\exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m)\Big\|_{AC(\overline{M})} +$$

$$+\Big\| \sum_{m=m(j)}^{n_j} (\omega_{jm}^{(n_j+\nu_j)} - \omega_{jm}^{(n_j)})\{\exp(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-$$

$$-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}\Big\|_{AC(\overline{M})} + \Big\| \sum_{m=n_j+1}^{n_j+\nu_j} \omega_{jm}^{(n_j+\nu_j)}\{\exp(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) -$$

$$-(-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}\Big\|_{AC(\overline{M})} \leqslant A \sum_{k=1}^{N} n_k^{-r}\Omega(1/n_k).$$

Отсюда при $n_k\to\infty$, $k\neq j$, находим

$$\| p_{j,n_j+\nu_j} - p_{jn_j}\|_{AC(\overline{M})} \leqslant An_j^{-r}\Omega(1/n_j), \tag{25}$$

откуда следует (в силу полноты $AC(\overline{M})$), что существует функция $\Phi_j \in AC(\overline{M})$ такая, что $p_{jn_j}(z) \rightrightarrows \Phi_j(z)$, $z\in\overline{M}$, $n_j\to\infty$. Учитывая это и переходя в неравенстве (25) к пределу при $\nu_j\to\infty$, получаем

$$\|\Phi_j - p_{jn_j}\|_{AC(\overline{M})} \leqslant An_j^{-r}\Omega(1/n_j). \tag{26}$$

Так же устанавливается существование функции $\Phi \in AC(\overline{M})$, для которой

$$\| \Phi - p_n \|_{AC(\overline{M})} \leqslant A \sum_{j=1}^{N} n_j^{-r} \Omega(1/n_j), \quad n = (n_1, \dots, n_N). \tag{27}$$

Из (19), (23), (26) и (27) легко видеть, что

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(z) + \Phi(z). \tag{28}$$

Пусть теперь z пробегает отрезок $[\gamma_j, \gamma_{j+1}]$, т. е. $z = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Тогда $w = \exp\{2\pi i (z - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)\} = \exp(i\theta)$ пробегает окружность $|w| = 1$. Учитывая этот факт, из (24), (25) находим, что для любого натурального ν_j выполняется неравенство

$$\| \pi_{j, n_j + \nu_j} - \pi_{j n_j} \|_{AC(\overline{K})} \leqslant A n_j^{-r} \Omega(1/n_j), \quad \overline{K} = \{w : |w| \leqslant 1\}. \tag{29}$$

Отсюда заключаем, что имеются функции $F_j(w)$, $j = 1, \dots, N$, для которых

$$\| F_j - \pi_{j n_j} \|_{AC(\overline{K})} \leqslant A n_j^{-r} \Omega(1/n_j). \tag{30}$$

Из (24), (26), (30) легко следует, что при $z \in \overline{M}$

$$\Phi_j(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1}) q_j \exp(i\alpha_j)/2\} F_j\{\exp(2\pi i (z - \gamma_j)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j))\} \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(z - \gamma_j)\}. \tag{31}$$

Покажем теперь, что все функции $\Phi(z)$, $\Phi_j(z)$, $j = 1, \dots, N$, принадлежат классу $AW^r H^\Omega(\overline{M})$. Отсюда в силу (28) будет следовать включение

$$f \in AW^r H^\Omega(\overline{M}). \tag{32}$$

Установим сначала, что $\Phi(z)$ имеет непрерывные производные любого порядка в замкнутом многоугольнике $\overline{M}$. Из (1) следует [3]

$$\omega_{jm}^{(n_j)} = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} \mathcal{P}_n(\zeta) \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k)\} d\zeta.$$

Отсюда в силу (19) и того факта, что на отрезке интегрирования $|\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k)\}| \leqslant A$ (см. свойство б) квазиполинома), получаем

$$|\omega_{jm}^{(n_j)}| \leqslant A, \tag{33}$$

$$|\omega_{jm}^{(n_j + \nu_j)} - \omega_{jm}^{(n_j)}| \leqslant A \sum_{k=1}^{N} n_k^{-r} \Omega(1/n_k). \tag{34}$$

Аналогично устанавливаются неравенства

$$|\omega_m^{(n)}| \leqslant A, \quad |\omega_m^{(n+\mu)} - \omega_m^{(n)}| \leqslant A \sum_{k=1}^{N} n_k^{-r} \Omega(1/n_k), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_N). \tag{35}$$

Далее заметим, что в силу условия Зигмунда (3) имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Omega(2^{-\nu}) \leqslant \ln 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu}}^{2^{-\nu+1}} (\Omega(u)/u)\, du \leqslant \ln 2 \int_0^2 (\Omega(u)/u)\, du \leqslant A, \tag{36}$$

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \Omega(2^{-\mu}) \leqslant \ln 2 \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} (\Omega(u)/u)\, du \leqslant \ln 2 \int_0^{2^{-\nu}} (\Omega(u)/u)\, du \leqslant A\Omega(2^{-\nu}). \tag{37}$$

При $z\in\overline{M}$ учитывая (21), имеем ($p_{2^\nu}(z)\overset{\mathrm{df}}{=}p_{2^\nu,2^\nu,\ldots,2^\nu}(z)$; $\omega_m^{(2^\nu)}\overset{\mathrm{df}}{=}\omega_m^{(2^\nu,2^\nu,\ldots,2^\nu)}$)

$$\Phi(z)=p_{1,1,\ldots,1}(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(p_{2^\nu}(z)-p_{2^{\nu-1}}(z))=\sum_{m=1}^{m_0}\omega_m^{(1,\ldots,1)}\exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big\{\sum_{m=1}^{m_0}(\omega_m^{(2^\nu)}-\omega_m^{(2^{\nu-1})})\exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=m(j)}^{2^{\nu-1}}(\omega_{jm}^{(2^\nu)}-\omega_{jm}^{(2^{\nu-1})})\{\exp(\lambda_m^{(j)}z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)})-(-1)^m B_j\exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-$$

$$-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\omega_{jm}^{(2^\nu)}\{\exp(\lambda_m^{(j)})/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)})-$$

$$-(-1)^m B_j\exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}. \tag{38}$$

Используя свойство в) квазиполинома и оценки (33)—(37), легко убеждаемся в законности почленного дифференцирования ряда (38) любое число раз при $z\in\overline{M}$. Отсюда следует

$$\Phi\in AW^rH^\Omega(\overline{M}), \tag{39}$$

и

$$\Phi^{(\mu)}(z)=p_1^{(\mu)}(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(p_{2^\nu}^{(\mu)}(z)-p_{2^{\nu-1}}^{(\mu)}(z)),\quad z\in\overline{M},\quad \mu=1,2,\ldots. \tag{40}$$

Покажем теперь, что $\Phi_j\in AW^rH^\Omega(\overline{M})$, $1\leqslant j\leqslant N$. Пусть сначала $r=0$. Тогда в силу (30)

$$|F_j(\exp(i\theta))-\pi_{jn}(\exp(i\theta))|\leqslant A\Omega(1/n). \tag{41}$$

Отсюда, учитывая условие Зигмунда (3), на основании обратной теоремы приближения периодических функций [2, с. 233] заключаем, что $F_j(\exp(i\theta))\in H^\Omega$. Используя известную контурно-телесную теорему [6], заключаем, что $F_j(w)\in AH^\Omega(\overline{K})$, откуда в силу (31) следует включение $\Phi_j(z)\in AH^\Omega(\overline{M})$, что вместе с (39), (28) дает (32) (при $r=0$). Пусть теперь $r\geqslant 1$. При $w\in\overline{K}$ имеем

$$F_j(w)=\pi_{j1}(w)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\pi_{j,2^\nu}(w)-\pi_{j,2^{\nu-1}}(w)). \tag{42}$$

В силу неравенства Бернштейна [2, с. 221] $\|\pi_{jn}^{(r)}\|_{AC(\overline{K})}\leqslant n^r\|\pi_{jn}\|_{AC(\overline{K})}$, откуда, учитывая (29), находим

$$\|\pi_{j,2^\nu}^{(r)}-\pi_{j,2^{\nu-1}}^{(r)}\|_{AC(\overline{K})}\leqslant 2^{r\nu}\|\pi_{j,2^\nu}-\pi_{j,2^{\nu-1}}\|_{AC(\overline{K})}\leqslant A\Omega(2^{-\nu}).$$

Отсюда, из (42) и (36), (37) следует, что $F_j^{(r)}(w)\in AC(\overline{K})$, имеют место равенства

$$F_j^{(\mu)}(w)=\pi_{j1}^{(\mu)}(w)+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\pi_{j,2^\nu}^{(\mu)}(w)-\pi_{j,2^{\nu-1}}^{(\mu)}(w)),\quad \mu=1,\ldots,r, \tag{43}$$

и справедлива оценка

$$|F_j^{(r)}(w)-\pi_{j,2^\nu}^{(r)}(w)|\leqslant\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}|\pi_{j,2^\mu}^{(r)}(w)-\pi_{j,2^{\mu-1}}^{(r)}(w)|\leqslant A\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\Omega(2^{-\mu})\leqslant$$

$$\leqslant A\Omega(2^{-\nu}),\quad w\in\overline{K}. \tag{44}$$

Из (44) по доказанному для случая $r=0$ заключаем, что $F_j(w) \in AW^r H^\Omega(\bar{K})$, $j=1,\ldots,N$, что вместе с (39), (28) дает (32). Для завершения доказательства теоремы осталось доказать равенства (4). Из (31), (24), (43) следует, что при $z \in \bar{M}$

$$\Phi_j^{(\mu)}(z) = p_{j1}^{(\mu)}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (p_{j,2^\nu}^{(\mu)}(z) - p_{j,2^{\nu-1}}^{(\mu)}(z)), \quad \mu = 1, \ldots, r. \tag{45}$$

Далее из (28), (40), (45), (23) находим, что при $z \in \bar{M}$

$$f^{(\mu)}(z) = \mathcal{P}_{(1,\ldots,1)}^{(\mu)}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{(2^\nu,\ldots,2^\nu)}^{(\mu)}(z) - \mathcal{P}_{(2^{\nu-1},\ldots,2^{\nu-1})}^{(\mu)}(z)), \quad \mu = 1, 2, \ldots, r.$$

Отсюда сразу следует (4), если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k \mathcal{P}_h^{(\mu)}(\gamma_k) = \sum_{m=1}^{m_0} \{\lambda_m^\mu \omega_m^{(n)} / \mathcal{L}'(\lambda_m)\} \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_m \gamma_k) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n_j} \{(\lambda_m^{(j)})^\mu \omega_{jm}^{(n_j)} / \mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)})\} \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_m^{(j)} \gamma_k) = \sum_{m=1}^{m_0} \lambda_m^\mu \omega_m^{(n)} \mathcal{L}(\lambda_m) / \mathcal{L}'(\lambda_m) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n_j} (\lambda_m^{(j)}) \omega_{jm}^{(n_j)} \mathcal{L}(\lambda_m^{(j)}) / \mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}) = 0, \quad n = (n_1, \ldots, n_N),$$

так как λ_m, $\lambda_m^{(j)}$ — нули $\mathcal{L}(\lambda)$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $\Omega(h) = h^\alpha$; класс $AW^r H^\Omega(\bar{M})$ обозначим через $AW^r H^\alpha(\bar{M})$. Учитывая, что $\Omega(h) \equiv h^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяет условию Зигмунда (3), в качестве следствия из теорем 1, 2 получаем следующую конструктивную характеристику класса $AW^r H^\alpha(\bar{M})$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3. *Для того чтобы* $f(z)$ *принадлежала классу* $AW^r H^\alpha(\bar{M})$, r — *целое неотрицательное*, $0 < \alpha < 1$, *и удовлетворяла условиям* (4), *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность квазиполиномов вида* (1), *что справедлива оценка*

$$\| f - \mathcal{P}_n \|_{AC(\bar{M})} \leqslant A \sum_{j=1}^{N} n_j^{-r-\alpha}, \quad n = (n_1, n_2, \ldots, n_N).$$

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.
3. *Дзядык В. К.* Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках // Мат. сб.— 1974.— **94**, № 4.— С. 475—493.
4. *Мельник Ю. И.* О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 6.— С. 719—722.
5. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных в выпуклых многоугольниках функций в виде суммы периодических // Мат. заметки.— 1984.— **36**, № 6.— С. 847—856.
6. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи мат. наук.— 1973.— **28**, № 1.— С. 131—161.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.02.87