УДК 519.21

Ю. М. Рыжов

Предельная теорема для случайных функций, построенных по квадратичным формам от гауссовских случайных величин

В настоящей статье изучается предельное поведение последовательностей ступенчатых и кусочно-линейных случайных функций, построенных на $[0, 1]$ по суммам $S_{kn} = \sum_{i=0}^{k} \eta_{in}$, $k = 0, 1, \ldots, k_n$, $\eta_{0n} = 0$, где $\eta_{in} = \xi_{in}^2 - \rho_{ii}^{(n)}$, а ξ_{in}, $i = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность серий гауссовских случайных величин, имеющих в каждой серии совместное гауссовское распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей $R^{(n)} = \{\rho_{kj}^{(n)}\}_{k=\overline{1,k_n}}^{j=\overline{1,k_n}}$.

Обозначим при $t \in [0, 1]$

$$S_n^*(t) = k_n^\gamma \sum_{k=0}^{[k_n t]} \eta_{kn}, \quad S_n(t) = k_n^\gamma \left[\sum_{k=0}^{[k_n t]} \eta_{kn} + (k_n t - [k_n t])\, \eta_{[k_n t]+1}\right], \qquad (1)$$

где γ — некоторая постоянная. Функция $S_n^*(t)$ — ступенчатая, со скачками в точках j/k_n величины $k_n^\gamma \eta_{jk}$, $j = 1, \ldots, k_n$, а $S_n(t)$ — непрерывная кусочно-линейная функция, проходящая через точки из $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$ вида $\left(j/k_n, \sum_{k=0}^{j} k_n^\gamma \eta_{jn}\right)$, $j = 1, \ldots, k_n$. Относительно случайных величин ξ_{kn} будем предполагать выполненным следующее условие: существуют такие ограниченные интегрируемые функции $\sigma(t)$ и $Q(t, s)$ на $[0, 1]$ и $[0, 1] \times [0, 1]$ соответственно, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leqslant k\leqslant k_n} | k_n^\alpha \rho_{kk}^{(n)} - \sigma(k/k_n)| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{0\leqslant k\neq j\leqslant k_n} | k_n^\beta \rho_{kj}^{(n)} - Q(k/k_n, j/k_n)| = 0 \qquad (2)$$

при некоторых вещественных α и β. Отметим, что из (2) и неравенства Коши следует $\beta \geqslant \alpha$. (Если $\rho_{kj}^{(n)} = 0$ при всех $k \neq j$, то формально считаем $\beta = \infty$.)

Случайные функции $S_n^*(t)$ и $S_n(t)$ в этих условиях зависят от параметров α, β, γ и задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких значениях параметров функции S_n^* и S_n слабо сходятся в равномерной метрике.

Лемма 1. *Если $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha \geqslant \gamma + 1/2$ и $\beta \geqslant \gamma + 1$, то последовательность $S_n(t)$ слабо компактна в $\mathscr{C}(0, 1)$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8.4. из [1]: последовательность $S_n(t)$ слабо компактна в $\mathscr{C}(0, 1)$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существуют такие $\lambda > 1$ и целое n_0, что при $n > n_0$

$$\mathbf{P}\{\max_{i\leqslant k_n} |S_{k+i,n} - S_{k,n}| \geqslant \lambda\} \leqslant \varepsilon/\lambda^2 \quad \forall\, k \leqslant k_n.$$

Для проверки последнего соотношения вначале найдем четвертый момент $M|S_{k+i,n} - S_{k,n}|^4$. Поскольку $S_{k+i,n} - S_{k,n}$ представляет собой центрированную квадратичную форму от гауссовских величин вида $(A\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) - M(A\bar{\zeta}, \bar{\zeta})$ (A — симметричная матрица) и, как несложно показать,

$$\mathbf{M}|(A\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) - \mathbf{M}(A\bar{\zeta}, \bar{\zeta})|^4 = 48\operatorname{tr}(B^{1/2}AB^{1/2})^4 + 12(\operatorname{tr}(B^{1/2}AB^{1/2})^2)^2,$$

где B — корреляционная матрица вектора $\bar{\zeta}$, а $\operatorname{tr}(\cdot)$ — след матрицы, то

$$\mathbf{M}|S_{k+i,n} - S_{k,n}|^4 = 48k_n^{4\gamma}\operatorname{tr}(R_n(k, k+i))^4 + 12k_n^{4\gamma}[\operatorname{tr}(R_n(k, k+i))^2]^2,$$

где $R_n(k, k+i)$ — корреляционная матрица вектора $(\xi_{k+1,n}, \ldots, \xi_{k+i,n})$.

Рассмотрим

$$A_1 = k_n^{4\gamma}[\operatorname{tr}(R_n(k, k+i))^2]^2 = k_n^{4\gamma}\Big[\sum_{m_1,m_2=k+1}^{k+i} \rho^2_{m_1,m_2}\Big]^2 \leqslant 2k_n^{4\gamma}\Big(\sum_{m=k+1}^{k+i} \rho^2_{mm}\Big)^2 +$$

$$+ 2k_n^{4\gamma}\Big(\sum_{m_1\neq m_2} \rho^2_{m_1,m_2}\Big)^2 = 2k_n^{4(\gamma-\alpha+1/2)}\Big(\sum_{m=k+1}^{k+i} (k_n^{\alpha}\rho_{mm})^2 \frac{1}{k_n}\Big)^2 +$$

$$+ 2k_n^{4(\gamma-\beta+1)}\Big(\sum_{m_1\neq m_2} (k_n^{\beta}\rho_{m_1,m_2})^2 \frac{1}{k_n^2}\Big)^2.$$

Следовательно, $A_1 \leqslant C(i/k_n)^4$, поскольку $\gamma - \alpha + 1/2$ и $\gamma - \beta + 1$ неположительны по условию леммы, а $k_n^{\alpha}\rho_{mm}$ и $k_n^{\beta}\rho_{m_1m_2}$ равномерно ограничены по (2). Аналогично

$$A_2 = k_n^{4\gamma}\operatorname{tr}(R_n(k, k+i))^4 = k_n^{4\gamma}\sum_{m_1m_2m_3m_4} \rho_{m_1m_2}\rho_{m_2m_3}\rho_{m_3m_4}\rho_{m_4m_1}.$$

Вначале рассмотрим ту часть S^* последней суммы, которая содержит лишь слагаемые с попарно различными индексами. Имеем

$$S^* = k_n^{4(\gamma-\beta+1)}\sum (k_n^{4\beta}\rho_{m_1m_2}\rho_{m_2m_3}\rho_{m_3m_4}\rho_{m_4m_1})\frac{1}{k_n^4} \leqslant C\left(\frac{i}{k_n}\right)^4.$$

Для оставшейся части аналогично можно доказать ее бесконечную малость. Действительно, величина $\rho_{m_1m_2}\rho_{m_2m_3}\rho_{m_3m_4}\rho_{m_4m_1}$ имеет порядок $O(k_n^{-3\beta-\alpha})$, $O(k_n^{-2\beta-2\alpha})$ и $O(k_n^{-4\alpha})$, если совпадают соответственно 2, 3 и 4 индекса. Поэтому, разбивая $A_2 - S^* = \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$ на соответствующие части и учитывая кратность сумм Σ_i, получаем

$$|A_2 - S^*| \leqslant C\left\{k_n^{4\gamma-3\beta-\alpha+3}\left(\frac{i}{k_n}\right)^3 + k_n^{4\gamma-2\beta-2\alpha+2}\left(\frac{i}{k_n}\right)^2 + k_n^{4\gamma-4\alpha+1}\left(\frac{i}{k_n}\right)\right\}.$$

Так как $3(\gamma - \beta + 1) + (\gamma - \alpha) < 0$, $2(\gamma - \beta + 1) + 2(\gamma - \alpha) < 0$ и $4(\gamma - \alpha + 1/4) < 0$ по условию леммы, то $|A_2 - S^*| = o(1)$.

Итак, при всех $k \leqslant k_n$ имеем $\mathbf{M}|S_{k+i,n} - S_{k,n}|^4 \leqslant C(i/k_n)^2$. По теореме 12.2 из [1] будет выполнено $\mathbf{P}\{\max_{i\leqslant k_n} |S_{k+i,n} - S_k| \geqslant \lambda\} \leqslant c/\lambda^4 < \varepsilon/\lambda^2$ при достаточно большом λ. Отсюда вытекает плотность $S_n(t)$ в $\mathscr{C}(0, 1)$.

Следующая лемма показывает, что в равномерной метрике функции $S_n(t)$ и $S_n^*(t)$ сходятся одновременно.

Лемма 2. *При* $\alpha > \gamma$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,1]} |S_n^*(t) - S_n(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,1]} |S_n^*(t)-S_n(t)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\max_{k\leqslant k_n}|\xi_{kn}^2-\rho_{kk}^{(n)}|\geqslant\varepsilon k_n^{-\gamma}\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}\{|\xi_{kn}^2-\rho_{kk}^{(n)}|\geqslant\varepsilon k_n^{-\gamma}\}\leqslant 60\,\frac{k_n^{4\gamma}\rho_{kk}^4}{\varepsilon^4}\leqslant C\,\frac{1}{\varepsilon^4}k_n^{-4(\alpha-\gamma)}.$$

Замечание 1. Предположение, что $\gamma<\alpha$, естественно, поскольку при $\gamma\geqslant\alpha$

$$\mathbf{M}S_{kn}^2=2k_n^{2\gamma}\sum_{i,j=1}^{k}\rho_{ij}^2\geqslant Ck_n^{2(\gamma-\alpha+1/2)}\to\infty,$$

но если последовательность $S_n^*(t)$ плотна, то последовательность корреляционных операторов равномерно ограничена.

Лемма 3. *Характеристический функционал функции* $S_n^*(t)$, $t\in[0,1]$ *на* $\mathscr{L}_2(0,1)$ *равен*

$$\varphi_n(z)=\exp\left\{-\operatorname{tr}\left[i\mathfrak{R}_n(z)+\frac{1}{2}\ln(E-2i\mathfrak{R}_n(z))\right]\right\},\tag{3}$$

где

$$\mathfrak{R}_n(z)=\left\{n^\gamma\sum_{k=0}^{k_n}\beta_{ki}\beta_{kj}\alpha_k(z)\right\}_{i=\overline{1,k_n}}^{k=\overline{1,k_n}},\quad \alpha_k(z)=\int_{k/k_n}^{1}z(s)\,ds,\quad z\in\mathscr{L}_2(0,1),$$

а β_{ki}, $k,\ i=1,2,\ldots,k_n$ — *элементы матрицы* $R_n^{1/2}$.

Доказательство. Обозначим $\overline{\zeta}_n=\{\xi_{kn},\ k=1,\ldots,k_n\}$. Тогда $\overline{\zeta}_n$ имеет такое же распределение, как и $R_n^{1/2}\overline{w}$, где $\overline{w}=\{w_k,\ k=1,\ldots$ $\ldots,k_n\}$, а w_k, $k=1,\ldots,k_n$ — независимые $(0,1)$-гауссовские величины. Тогда

$$\int_0^1 S_n^*(t)\,z(t)\,dt=n^\gamma\sum_{k=0}^{k_n}\alpha_k(z)\,\eta_{kn}=$$
$$=n^\gamma\sum_{i,j=0}^{k_n}\sum_{k=0}^{k_n}\beta_{ki}\beta_{kj}\alpha_k(z)\,(w_iw_j-\delta_{ij})=(\mathfrak{R}_n(z)\,\overline{w},\overline{w})-\operatorname{tr}\mathfrak{R}_n(z)$$

— центрированная квадратичная форма от гауссовского вектора $\overline{w}$. Отсюда легко получить (3).

Лемма 4. *Если последовательность* $S_n^*(t)$ *плотна в* $\mathscr{L}_2(0,1)$, *то найдется такое* $\delta>0$, *что все функции* $\psi_n(u)=\varphi_n(uz)$ *комплексного переменного* u *будут аналитическими в полосе* $|\operatorname{Im} u|<\delta$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что корреляционный оператор, отвечающий характеристическому функционалу (3), определяется соотношением $(K_nz,z)=2\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^2$. Необходимым и достаточным условием плотности $S_n^*(t)$ в $\mathscr{L}_2(0,1)$ является выполнение равномерно по n соотношений

$$\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(e_k))^2=\frac{1}{2}\operatorname{tr}K_n\leqslant C<\infty,\quad \sum_{i=N}^{\infty}\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(e_k))^2\to 0,\quad N\to\infty.$$

Обозначим через $\lambda_k^{(n)}(z)$, $k=1,2,\ldots,k_n$ собственные числа матрицы $\mathfrak{R}_n(z)$. Тогда

$$\varphi_n(z)=\prod_{k=1}^{k_n}\left(\frac{\exp\{-2i\lambda_k^{(n)}(z)\}}{1-2i\lambda_k^{(n)}(z)}\right)^{1/2}.\tag{4}$$

Очевидно $\lambda_k^{(n)}(uz)=u\lambda_k^{(n)}(z)$, а $\varphi_n(z)$ не имеет вещественных полюсов. Поскольку $\max_{k\leqslant k_n}|\lambda_k^{(n)}(z)|\leqslant(\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^2)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(K_nz,z)^{1/2}\leqslant(\operatorname{tr}K_n)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant C<$

$<\infty$ равномерно по n, то из (4) видно, что $\psi_n(u)$ аналитична $|u|<1/C=$ $=\delta$. Теперь легко заключить, что все $\psi_n(u)$ аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} u|<\delta$.

Лемма 5. *Если последовательность $S_n^*(t)$ плотна, то для существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z)$ при всех $z\in\mathscr{L}_2(0,1)$ достаточно, чтобы существовала постоянная C такая, что при всех $m\geqslant 1$*

$$|\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m-\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_{n'}(z))^m|\leqslant(C\|z\|)^m o(1),$$

где $o(1)$ понимается равномерно по m при $n,\ n'\to\infty$.

Доказательство. Поскольку

$$|\ln\varphi_n(z)-\ln\varphi_{n'}(z)|\leqslant|\operatorname{tr}\mathfrak{R}_n(z)-\operatorname{tr}\mathfrak{R}_{n'}(z)|+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k}{k}|\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^k-$$

$$-\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_{n'}(z))^k|\leqslant\left(c\|z\|+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2C\|z\|)^k}{k}\right)o(1),$$

то предел существует при $\|z\|<1/2C$. Существование предела при всех $Z\in\mathscr{L}_2(0,1)$ вытекает из плотности и леммы 4.

Замечание 2. Поскольку $\mathscr{L}_2(0,1)$ образует тотальное множество в $\mathscr{C}^*(0,1)$, то выполнения условий лемм 1 и 2 достаточно для слабой сходимости $S_n(t)$ в $\mathscr{C}(0,1)$ (см., например, [2], теорема 2.2.1).

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 1 и (2), то последовательности случайных функций $S_n^*(t)$ и $S_n(t)$ сходятся в равномерной метрике. При этом*

A) *если $\gamma<\alpha-1/2$, $\gamma<\beta-1$, $\beta>\alpha$, то предельная мера вырождена в точке 0;*

B) *если $\gamma=\beta-1$, $\alpha\leqslant\beta<\alpha+1/2$, то предельный характеристический функционал на $\mathscr{L}_2(0,1)$ имеет вид*

$$\varphi_1(z)=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2i)^k}{k}Q^{(*k)}(z)\right\},$$

где

$$Q^{(*k)}(z)=\int_0^1\ldots\int_0^1 Q(t_1,t_2)\ldots Q(t_{k-1},t_k)\,Q(t_k,t_1)\times$$

$$\times\int_{t_1}^1\ldots\int_{t_k}^1 z(s_1)\ldots z(s_k)\,ds_1\ldots ds_k dt_1\ldots dt_k;$$

C) *если $\gamma=\alpha-1/2$, $\beta>\alpha+1/2$, то на $\mathscr{L}_2(0,1)$ предельный характеристический функционал*

$$\varphi_0(z)=\exp\left\{-\int_0^1\left(\sigma(t)\int_t^1 z(s)\,ds\right)^2dt\right\};$$

D) *если $\gamma=\alpha-1/2$ и $\beta=\alpha+1/2$, то предельный характеристический функционал имеет вид $\varphi_2(z)=\varphi_0(z)\,\varphi_1(z)$.*

Доказательство. По лемме 5 достаточно показать, что

$$|\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m-\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_{n'}(z))^m|\leqslant(C\|z\|)^m o(1),$$

где бесконечно малая $o(1)$ равномерна по m, и найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m$. Если эти пределы существуют, то достаточно показать, что при всех m

$$|\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m-\lim_{n\to\infty}\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m|\leqslant|C\|z\||^m o(1).$$

Рассмотрим $\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m$ при $m\geqslant 3$. Легко показать, что

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m=k_n^{m\gamma}\sum_{i_1\ldots i_m}\rho_{i_1i_2}\ldots\rho_{i_{m-1},i_m}\rho_{m,1}\alpha_{i_1}(z)\ldots\alpha_{i_m}(z).$$

Рассмотрим ту часть $\sum_m^*$ последней суммы, где в слагаемых совпадает хотя бы одна пара индексов. Тогда, поскольку $|\alpha_k(z)| \leqslant \|z\|$, $|k_n^\beta \rho_{kj}| \leqslant C$ при $k \neq j$ и $k_n^\alpha \rho_{kk} \leqslant C$, имеем

$$\Big|\sum\nolimits_m^*\Big| \leqslant C^m k_n^{m\gamma-\alpha-(m-1)\beta+m-1} \|z\|^m = (C\|z\|)^m k_n^{(m-1)(\gamma-\beta+1)+(\gamma-\alpha+1/2)} \frac{1}{\sqrt{k_n}}$$

(отметим, что при $m = 2$ такое рассуждение не верно). По условию плотности $\gamma - \beta + 1 \leqslant 0$ и $\gamma - \alpha + 1/2 \leqslant 0$, значит

$$\Big|\sum\nolimits_m^*\Big| \leqslant (C\|z\|)^m o(1). \tag{5}$$

Пусть теперь в сумме для $\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m$ все индексы у слагаемых попарно различны и $m \geqslant 2$. Имеем

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m - \sum\nolimits_m^* = k_n^{m(\gamma-\beta+1)} \sum_{i_1 \ldots i_m} (\rho_{i_1 i_2} K_n^\beta) \ldots (\rho_{i_m i_1} K_n^\beta) \alpha_{i_1}(z) \ldots \alpha_{i_m}(z) \frac{1}{k_n^m} =$$

$$= k_n^{m(\gamma-\beta+1)} \sum_{i_1 \ldots i_m} Q(i_1/k_n, i_2/k_n) \ldots Q(i_m/k_n, i_1/k_n) \alpha_{i_1}(z) \ldots \alpha_{i_m}(z) \frac{1}{k_n^m}(1+o(1)).$$

Отсюда и из (5) следует, что при $\gamma - \beta + 1 < 0$

$$|\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m| \leqslant (C\|z\|)^m o(1) \tag{6}$$

и при $\gamma - \beta + 1 = 0$

$$\Big| \operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m - \int_0^1 \ldots \int_0^1 Q(t_1, t_2) \ldots Q(t_m, t_1) \int_{t_1}^1 \ldots \int_{t_m}^1 z(s_1) \ldots z(s_m)\, ds_1 \ldots dt_m \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \sum_{i_1 \ldots i_m} Q(i_1/k_n, i_2/k_n) \ldots Q(i_m/k_n, i_1/k_n) \alpha_{i_1}(z) \ldots \alpha_{i_m}(z) \frac{1}{k_n^m} -$$

$$- \int_0^1 \ldots \int_0^1 Q(t_1, t_2) \ldots Q(t_m, t_1) \int_{t_1}^1 \ldots \int_{t_m}^1 z(s_1) \ldots z(s_m)\, ds_1 \ldots dt_m \Big| + (C\|z\|)^m o(1).$$

В первом слагаемом стоит разность между интегралом и соответствующей интегральной суммой, которая также может быть оценена сверху величиной $(C\|z\|)^m\ o(1)$. Следовательно, при $\gamma - \beta + 1 = 0$ и $m \geqslant 3$

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^m = \int_0^1 \ldots \int_0^1 Q(t_1, t_2) \ldots Q(t_m, t_1) \int_{t_1}^1 \ldots \int_{t_m}^1 z(s_1) \ldots z(s_m)\, ds_1 \ldots dt_m +$$

$$+ (C\|z\|)^m o(1). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь случай $m=2$. Поскольку $\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^2 = k_n^{2\gamma} \sum_m \rho_{mn}^2 \alpha_m^2(z) + k_n^{2\gamma} \sum_{m \neq j} \rho_{mj}^2 \alpha_m(z) \alpha_j(z)$, а предыдущие рассуждения для случая попарно различных индексов верны и при $m = 2$, то легко видеть, что при $\gamma - \beta + 1 < 0$ выполняется (6), а при $\gamma - \beta + 1 = 0$ — (7) с $m = 2$. Для оставшегося слагаемого имеем

$$k_n^{2\gamma} \sum_{m=1}^{k_n} \rho_{mm}^2 \alpha_m^2(z) = k_n^{2(\gamma-\alpha+1/2)} \sum_{m=1}^{k_n} (\rho_{mm} k_n^\alpha)^2 \alpha_m^2(z) \frac{1}{k_n} = k_n^{2(\gamma-\alpha+1/2)} \times$$

$$\times \Big(\int_0^1 \Big[\sigma(t) \int_t^1 z(s)\, ds \Big]^2 dt + (C\|z\|)^2 o(1) \Big),$$

т. е.

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^2 = \begin{cases} (C\|z\|)^2\, o(1), \quad \gamma-\beta+1<0, \quad \gamma-\alpha+1/2<0, \\ \int\limits_0^1\left(\sigma(t)\int\limits_t^1 z(s)\,ds\right)^2 dt + (C\|z\|)^2 o(1), \ \gamma-\beta+1<0, \\ \gamma-\alpha+1/2=0, \\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 Q^2(t_1,t_2)\int\limits_{t_1}^1\int\limits_{t_2}^1 z(s_1)\,z(s_2)\,ds_1ds_2dt_1dt_2 + \int\limits_0^1\left(\sigma(t)\int\limits_t^1 z(s)\,ds\right)^2 dt + \\ + (C\|z\|)^2\, o(1), \quad \gamma-\beta+1=0, \quad \gamma-\alpha+1/2=0. \end{cases} \qquad (8$$

Из (6)—(8) получаем доказательство теоремы. Например, пусть $\gamma-\beta+$ $+1=0$ и $\gamma-\alpha+1/2=0$. Тогда

$$\ln\varphi_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2i)^k}{k}\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^k = -\int\limits_0^1\left(\sigma(t)\int\limits_t^1 z(s)\,ds\right)^2 dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2i)^k}{k}Q^{(*k)}(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2iC\|z\|)^k}{k}\, o(1).$$

Поскольку величина $o(1)$ везде была равномерной относительно степен матрицы, то последнее слагаемое стремится к нулю равномерно при $\|z\|<$ $<1/2C$. Следовательно, в условиях п. D) теоремы предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z)$ сущест вует при $\|z\|<1/2C$ и равен $\varphi_0(z)\,\varphi_1(z)$. Далее надо воспользоваться плот ностью соответствующих мер и леммой 4.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку в $\mathcal{L}_2(0,1)$ корреляционный операто функции $S_n^*(t)$ определяется соотношением $(K_nz, z) = 2\operatorname{tr}(\mathfrak{R}_n(z))^2$ и п условию слабой компактности операторы K_n — равномерно ограничен в следовой норме, то из первого соотношения в (6) вытекает, что Р $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*(\cdot)=0$, как только $\gamma-\beta+1<0$ и $\gamma-\alpha+1/2<0$. Этот фак позволяет получать новые условия сингулярности мер, отвечающих гаус совским процессам и полям.

Пусть $\xi_i(t)$, $t\in[0,1]$, $i=1,2,$— гауссовские случайные процессы нулевыми средними и корреляционными функциями $R_i(t,s)$. Положим $\xi_{kn}^{(i)} = \xi_i\left(\frac{k}{n}\right)-\xi_i\left(\frac{k-1}{n}\right)$, $k=1,2,\ldots,n$, $n=1,2,\ldots$, $i=1,2$, и пуст при некоторых постоянных α_i, β_i выполняются условия

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\tau^{-\alpha_i}[R_i(t+\tau,t+\tau)-R_i(t+\tau,t)-R_i(t,t+\tau)+R_i(t,t)] = \sigma_i(t),$$

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\tau^{-\beta_i}[R_i(t+\tau,s+\tau)-R_i(t+\tau,s)-R_i(t,s+\tau)+R_i(t,s)] = Q_i(t,s),\ t\neq s \qquad (9$$

где $\sigma_i(t)$ и $Q_i(t,s)$ — ограниченные интегрируемые функции на $[0,1]$ $[0,1]\times[0,1]$ соответственно.

Т е о р е м а 2. *Пусть процессы $\xi_i(t)$, $i=1,2$, удовлетворяют усл виям (9), причем хотя бы одна из функций $\sigma_i(t)$ и хотя бы одна из функци $Q_i(t,s)$, $i=1,2$, отличны от нуля и непрерывны. Тогда меры, отвечающи процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, будут ортогональными, если выполняется одно и условий:*

1) *$\alpha_1\neq\alpha_2$ и $\beta_i>\alpha_i$ хотя бы при одном $i=1,2$;*

2) *$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $\beta_1>\alpha_1$, $\beta_2>\alpha_2$, а функции $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ огранич ны, интегрируемы и $\sigma_1(t)\neq\sigma_2(t)$ в окрестности хотя бы одной точк $t\in(0,1)$;*

3) *$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $\sigma_1(t)=\sigma_2(t)$ почти всюду, $\beta_1\neq\beta_2$ и $\alpha\leqslant\min(\beta$ $\beta_2)<\alpha+1/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы в случаях 1 и 2 следует из теорем бакстеровского типа. Меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}, соответствующие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, будут различаться с помощью последовательности функционалов $n^{\alpha_1-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_{kn}^{(i)^2}$ в случае 1 (предполагается $\alpha_1<\alpha_2$) и последовательности функционалов $n^{\alpha-1}\sum\limits_{k/n\in I_m}\xi_{kn}^{(i)^2}$ в случае 2, где I_m—подходящим образом подобранная последовательность интервалов.

Новыми являются условия 3, при которых теоремы бакстеровского типа неприменимы. Рассмотрим последовательность функционалов $\mathfrak{M}_n(\xi_i) = n^{\beta_1-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_{kn}^{(i)^2}-\mathbf{M}\xi_{kn}^{(i)^2})$, $\beta_1<\beta_2$.

По замечанию к теореме 1 можно выбрать такую подпоследовательность n', что $\mathfrak{M}_{n'}(\xi_2)\to 0$ с вероятностью 1 при $n'\to\infty$, так как в этом случае при $\gamma=\beta_1-1$, $\gamma<\beta_2-1$ и $\gamma<\alpha-1/2$ для последовательности $\mathfrak{M}_{n'}\times(\xi_2)$ выполняется утверждение А теоремы 1. Но при тех же условиях для $\mathfrak{M}_{n'}(\xi_1)$ выполняется утверждение В и эта последовательность не сходится к нулю при $\beta_1<\alpha+1/2$.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Мир, 1971.— 351 с.
2. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 239 с.

Киев. ун-т

Получено 20.06.85,
после доработки — 14.01.86