УДК 512.542
Я. П. Сысак

Конечные ABA-группы с абелевыми p-подгруппами A и B

Группа, представимая в виде произведения ABA своих подгрупп A и B, называется ABA-группой. Конечные ABA-группы с абелевыми подгруппами A и B изучались в ряде работ, большей частью при различных дополнительных предположениях относительно подгрупп A и B. Так, в [1] рассматривались такие группы с некоторыми циклическими подгруппами A и B, в [2] — с некоторыми абелевыми подгруппами взаимно простых порядков, в [3] — с произвольными абелевыми холловыми подгруппами. В настоящей работе мы детально изучим ситуацию, когда A и B — произвольные абелевы p-подгруппы. Так как во всякой p-группе вида $G = ABA$ подгруппы A и B перестановочны и фактически $G = AB$, то нас главным образом будет интересовать случай, когда ABA-группа G с абелевыми p-подгруппами A и B не является p-группой. Прежде чем сформулировать основной результат, приведем два специальных примера таких групп.

Пример 1. Пусть p и q — различные простые числа и p делит $q^n - 1$ для некоторого целого $n \geqslant 1$. Поле $GF(q^n)$ из q^n элементов назовем p-плотным, если его мультипликативная группа содержит такую p-подгруппу P, что $GF(q^n) = (1-P)P = \{(1-x)y \mid x, y \in P\}$; при этом подгруппу P будем называть плотной p-подгруппой поля $GF(q^n)$. Например, поля $GF(5)$ и $GF(9)$ являются 2-плотными, поле $GF(27)$ является 13-плотным, но не 2-плотным, а поле $GF(121)$ не является p-плотным ни для какого p.

Пусть теперь $GF(q^n)$ — p-плотное поле, P — его плотная подгруппа порядка p^m и пусть $S(p^m, q^n)$ — группа всех одномерных аффинных преобразований над $GF(q^n)$ вида $x' = \alpha x + \beta$ с $\alpha \in P$ и $\beta \in GF(q^n)$. Обозначим через M, A и B ее подгруппы, состоящие соответственно из всех сдвигов $x' = x + \beta$, всех растяжений $x' = \alpha x$ и всех преобразований вида $x' = \alpha(x+1) - 1$, где $\alpha \in P$ и $\beta \in GF(q^n)$. Тогда M — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа порядка q^n в $S(p^m, q^n)$, A и B — циклические подгруппы порядка p^m и имеет место разложение $S(p^m, q^n) = M \leftthreetimes A = ABA$.

Пример 2. Пусть G — группа всех аффинных преобразований векторного пространства $V(2, 3)$ размерности 2 над полем $GF(3)$, M — ее подгруппа, состоящая из всех сдвигов, A — подгруппа, порожденная преобразованием $a: x \to \alpha x$ с $x \in V(2, 3)$ и $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и пусть B — подгруппа, порожденная преобразованиями $b: x \to \beta x$ с $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $c: x \to 2x + \varepsilon$ с $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(2, 3)$. Обозначим через $H(2, 3)$ подгруппу $\langle A, B \rangle$, порожденную подгруппами A и B, а через Q — подгруппу $\langle A, b \rangle$, порожденную подгруппой A и преобразованием b. Тогда M — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа порядка 9 в $H(2, 3)$, Q — полудиэдральная подгруппа порядка 16, A — циклическая подгруппа порядка 8, B — четверная подгруппа и имеет место разложение $H(2, 3) = M \leftthreetimes Q = ABA$.

Обозначения $S(p^m, q^n)$ и $H(2,3)$ мы сохраним за соответствующими группами до конца работы. Основной результат формулируется теперь следующим образом.

Теорема. *Пусть G — конечная ABA-группа с абелевыми p-подгруппами A и B и $O_p(G)$ — ее наибольшая нормальная p-подгруппа. Тогда группа G разрешима ступени не выше 4 и фактор-группа $G/O_p(G)$ есть подпрямое произведение групп, каждая из которых при $p > 2$ изоморфна группе $S(p^m, q^n)$ для подходящего простого числа q и положительных целых чисел m и n, а при $p = 2$ — одной из групп $S(2^m, q^n)$ или $H(2,3)$.*

В частности, если подгруппа A циклическая, то $G/O_p(G)$ — одна из групп $S(p^m, q^n)$ или $H(2,3)$.

Напомним, что случай, когда подгруппа B циклическая, ранее подробно рассмотрен в [4]. Заметим также, что конечные ABA-группы с неабелевыми p-подгруппами A и B необязательно разрешимы. Например, симметрическая группа $\mathfrak{S}_6$ степени 6 является ABA-группой с силовской 2-подгруппой A и диэдральной подгруппой B порядка 8.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения в основном общеприняты, их можно найти, например, в [5, 6]. Следующие свойства группы G очевидны, применяются неоднократно и без специальных оговорок: если $G = ABA$, $A \leqslant H \leqslant G$ и $\overline{G}$ — гомоморфный образ группы G, то $|G| \leqslant |A|^2|B|$, $H = A(B \cap H)A$ и $\overline{G} = \overline{A}\overline{B}\overline{A}$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд последовательных лемм, первые две из которых элементарны и по существу доказаны в [4] (леммы 1, 2 и следствие 1).

Лемма 1. *Пусть $G = ABA$, где A и B — p-подгруппы группы G, и P — силовская p-подгруппа в G, содержащая подгруппу A. Тогда $P = A(B \cap P)$ и $N_G(P) = P$.*

Лемма 2. *Пусть $G = ABA$ и A, B — абелевы p-подгруппы. Если группа G p-нильпотентна и P — ее силовская p-подгруппа, содержащая подгруппу A, то $B = (B \cap P)C^x$, где $C \leqslant C_A(B \cap P) \leqslant Z(P)$ и $x \in C_{O_{p'}(G)}(B \cap P)$.*

Следующие две леммы классифицируют те разрешимые ABA-группы с абелевыми p-подгруппами A и B, которые обладают единственной минимальной нормальной подгруппой.

Лемма 3. *Пусть $G = M \leftthreetimes A = ABA$, где M — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа порядка q^n группы G и A, B — абелевы p-подгруппы в G, причем порядок подгруппы A равен p^m. Тогда группа G изоморфна группе $S(p^m, q^n)$.*

Доказательство. Согласно теореме II.3.10 из [5] можно рассматривать A как группу преобразований над $GF(q^n)$ вида $x' = \alpha x$, где α пробегает подгруппу порядка p^m (обозначим ее через P) мультипликативной группы поля $GF(q^n)$, а G — как группу одномерных аффинных преобразований над $GF(q^n)$ вида $x' = \alpha x + \beta$ с $\alpha \in P$ и $\beta \in GF(q^n)$, в которой M — подгруппа, состоящая из всех сдвигов. Поэтому, чтобы установить изоморфизм $G \simeq S(p^m, q^n)$, остается показать, что поле $GF(q^n)$ p-плотно и P — его плотная подгруппа.

Так как $B \leqslant A^u$ для некоторого неединичного элемента $u \in M$, то $G = AA^uA$ и потому каждый элемент $v \in M$ имеет вид $v = a_0a_1^ua$, где a, a_0, a_1 — элементы из A. Однако $a_0a_1a \in A$, $a^{-1}a_1^{-1}a_1^ua \in M$. Поэтому $a_0a_1a = 1$ и $v = a^{-1}a_1^{-1}a_1^ua = (u^{-a_1}u)^a$. Но элемент u — это некоторый сдвиг $x' = x + \gamma$ с $\gamma \neq 0$, а элементы a_1, a — соответственно преобразования $x' = \alpha_1 x$ и $x' = \alpha x$, где $\alpha, \alpha_1 \in P$. Поэтому элемент $v = (u^{-a_1}u)^a$ — это сдвиг $x' = x + (1 - \alpha_1)\alpha\gamma$. Следовательно, каждый элемент поля $GF(q^n)$ может быть записан в виде $(1-\alpha_1)\alpha\gamma$ для некоторых $\alpha, \alpha_1 \in P$ и фиксированного $\gamma \neq 0$. Но тогда $GF(q^n) = (1 - P)P\gamma$ и, значит, $GF(q^n) = (1 - P)P$, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G = M \leftthreetimes P = ABA$, где M — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в G, P — неабелева силовская*

p-подгруппа в G, A и B — абелевы p-подгруппы группы G. Тогда M — элементарная абелева группа порядка 9, P — полудиэдральная группа порядка 16, A — циклическая группа порядка 8, B четверная группа и $G \simeq H(2, 3)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что P содержит A. Пусть $y \in M$. Тогда $y = a_1 b_1 a$ для некоторых $a, a_1 \in A$ и $b_1 \in B$. По лемме 2 $B = (B \cap P) C^x$, где $C \leqslant C_A(B \cap P) \leqslant Z(P)$ и $x \in C_M(B \cap P)$. Поэтому $b_1 = bc^x$, где $b \in B \cap P$, $c \in C$. Следовательно, $y = a_1 bc^x a = (a_1 bca)[c, x]^a$ и так как $[c, x]^a \in M$, $a_1 bca \in P$, то $a_1 bca = 1$ и $y = [c, x]^a$.

Покажем, что если $y \neq 1$, то $C_P(y) = C_P(x)^a$. Очевидно, тогда $c \neq 1$ и достаточно показать, что $C_P(x) = C_P([c, x])$. А так как $c \in Z(P)$ влечет $C_P(x) \leqslant C_P([c, x])$, то остается установить обратное включение. Пусть $d \in C_P([c, x])$. Тогда $[c, x, d] = 1$ влечет $[x, d, c] = 1$ и, значит, $[x, d] \in C_M(c)$. Но $C_M(c) \triangle G$ и, следовательно, $C_M(c) = 1$. Поэтому $[x, d] = 1$, т. е. $d \in C_P(x)$. Таким образом, $C_P([c, x]) \leqslant C_P(x)$.

Будем рассматривать далее P как группу перестановок на множестве $M^\#$ всех неединичных элементов подгруппы M. Так как по доказанному централизаторы элементов из $M^\#$ в P сопряжены и, в частности, одинакового порядка, то группа P полутранзитивна на $M^\#$. Она не может быть полурегулярной, поскольку иначе $C_p(x) = 1$, а это ввиду $P = A(B \cap P)$ (лемма 1) и $B \cap P \leqslant C_p(x)$ противоречит неабелевости группы P. Поэтому P — группа из заключения теоремы 2 работы [7]. В частности, P — 2-группа и ее центр $Z(P)$ имеет порядок 2. Следовательно, включение $C \leqslant Z(P)$ влечет $|C| = 2$. Но выше показано, что каждый элемент y из $M^\#$ представим в виде $y = [c, x]^a$, где $1 \neq c \in C$ и $a \in A$. Поэтому равенство $|C| = 2$ означает, что подгруппа A, а значит и P, транзитивна на $M^\#$. Следовательно, по лемме 5 из [7] M — элементарная абелева группа порядка 9, P — полудиэдральная группа порядка 16, A — циклическая группа порядка 8 и $|C_P(x)| = 2$. А так как $P = A(B \cap P)$ и $B \cap P \leqslant C_P(x)$, то $|B \cap P| = 2$. Поэтому из $B = (B \cap P) C^x$ и $|C| = 2$ следует, что B — четверная группа. Наконец, по теореме II.3.5 из [5] G как примитивная группа перестановок степени 9 изоморфна некоторой группе аффинных преобразований векторного пространства $V(2, 3)$ над $GF(3)$ и, поскольку $|G| = 9 \cdot 16$, изоморфна $H(2, 3)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G = ABA$ — разрешимая группа, A, B — ее абелевы p-подгруппы и $O_p(G) = 1$. Если силовская p-подгруппа P группы G неабелева, то $p = 2$ и P — подпрямое произведение полудиэдральных групп порядка 16 и абелевой группы.*

Доказательство. Разумеется, можно предполагать, что P содержит подгруппу A. Далее, если F — подгруппа Фиттинга группы G, то в силу условия леммы F — p'-группа и $FP = AB_1A$ с $B_1 = B \cap FP$. Поэтому без ограничения общности можно взять $G = FP$. Более того, так как $\Phi(G) < F$ и $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то переход к фактор-группе $G/\Phi(G)$ позволяет считать, что $\Phi(G) = 1$. Но тогда F — самоцентрализуемая абелева p'-подгруппа, разложимая в прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G [5] (теоремы III.4.2 и III.4.5). Поэтому G аппроксимируется своими гомоморфными образами вида $\overline{G} = \overline{F} \leftthreetimes \overline{P} = \overline{A}\overline{B}\overline{A}$, в которых $\overline{F}$ — самоцентрализуемая минимальная нормальная p'-подгруппа, а $\overline{P}$ — гомоморфный образ подгруппы P. Следовательно, если подгруппа P неабелева, то для некоторых таких гомоморфных образов подгруппа $\overline{P}$ также неабелева и по лемме 4 является тогда полудиэдральной группой порядка 16. Поэтому P — подпрямое произведение полудиэдральных групп порядка 16 и абелевой группы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G = ABA$ — разрешимая группа, A, B — ее абелевы p-подгруппы и $P = A(B \cap P)$ — ее силовская p-подгруппа. Тогда $(B \cap P) \times C_A(B \cap P) \leqslant O_{p',p}(G)$. Более того, если фактор-группа $P/O_p(G)$ абелева, то $B \cap P \leqslant O_p(G)$.*

Доказательство. Если фактор-группа $P/O_p(G)$ абелева, то $[B \cap P, A] \leqslant O_p(G)$, откуда $[B \cap P, G] \leqslant O_p(G)$. Последнее влечет $B \cap P \leqslant O_p(G)$. А так как $O_p(G) \leqslant O_{p',p}(G)$, $C_A(B \cap P) \leqslant Z(P)$ и по теореме 6.3.3 из [6]

$Z(P) \leqslant O_{p'p,}(G)$, то в рассматриваемом случае имеем $(B \cap P) C_A(B \cap P) \leqslant O_{p',p}(G)$.

Предположим теперь $O_{p'}(G) = 1$ и покажем, что тогда фактор-группа $\bar{P} = P/O_p(G)$ абелева. Этим, очевидно, лемма будет доказана.

Пусть, напротив, группа $\bar{P}$ неабелева. Тогда по лемме 5 $\bar{P}$ — подпрямое произведение полудиэдральных групп порядка 16 и абелевой 2-группы. В частности, экспонента коммутанта $\bar{P}'$ равна 4. Следовательно, для некоторого элемента x из $P' \setminus O_p(G)$ элемент $\bar{x}$ имеет порядок 4. Но по теореме Ито [5] (теорема VI.4.4) коммутант P' абелев и потому для любого элемента y из $O_p(G)$ имеем $[y, x, x] = 1$. Последнее означает, что элемент $\bar{x}$ действует на $O_p(G)/\Phi(O_p(G))$ с квадратичным минимальным многочленом. Однако по теореме В Холла—Хигмэна [6] (теорема II.1.1) элемент порядка 4 так действовать не может. Противоречие. Лемма доказана.

Л е м м а 7. *Пусть $P = AB$ — группа, A, B — ее абелевы подгруппы и X — подмножество в P. Тогда $[X, B] \trianglelefteq P$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $[ab, b_1] = [a, b_1]^b = [a, a_1b_1]^b$ для всех $a, a_1 \in A$ и $b, b_1 \in B$, то $[X, B] = [A \cap XB, P] \trianglelefteq P$. Лемма доказана.

Л е м м а 8. *Пусть $G = ABA$ — группа, A и B — ее абелевы p-подгруппы, $P = A(B \cap P)$ — ее силовская p-подгруппа и пусть $O_p(G) = 1$. Тогда $B = (B \cap P) \times C^x$, где $C \leqslant C_A(B \cap P)$ и $x \in C_G(B \cap P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, $B^g \leqslant P$ для некоторого $g \in G$. Далее, так как $g = aba_1$ для некоторых $a, a_1 \in A$, $b \in B$ и $A \leqslant P$, то $B^{ab} \leqslant P$. В частности, $(B \cap P)^{ab} \leqslant P$. Обозначим $D = B \cap P$ и рассмотрим подгруппу $[D^{ab}, D]$ Очевидно, $[D^{ab}, D] = [D^a, D]^b$. По лемме 7 подгруппы $[D^{ab}, D]$ и $[D^a, D]$ нормальны в P. Следовательно, по теореме Бернсайда о слиянии [6] (теорема 7.1.1) подгруппы $[D^{ab}, D]$ и $[D^a, D]$ сопряжены в $N_G(P)$. Но по лемме 1 $N_G(P) = P$. Поэтому $[D^{ab}, D] = [D^a, D]$ и, таким образом, $b \in N_G([D^a, D]) = N$. Так как $P \leqslant N$, то $b^{-1}a^{-1} \in N$, откуда $B \leqslant P^{b^{-1}a^{-1}} \leqslant N$. Но тогда $G = ABA = N$. Поэтому $[D^a, D] \leqslant O_p(G) = 1$ и, следовательно, $D^{ab}, D^a \leqslant C_A(D) \times D$. Покажем, что $D^a = D$.

Очевидно, $DD^{a^{-1}} = A_0 \times D$, где $A_0 = C_A(D) \cap DD^{a^{-1}}$. А так как $[B^{ab}, D] = [B, D^{a^{-1}}]^{ab}$ и $[B, D^{a^{-1}}] = [B, DD^{a^{-1}}] = [B, DA_0] = [B, A_0]$, то $[B^{ab}, D] = [B, A_0]^{ab}$ и, следовательно, $[B, A_0]$ — p-группа. Но тогда $\langle B, A_0 \rangle$ также p-группа. Поэтому для всякого элемента $y = a_2b_1a_1$ с $a_1, a_2 \in A$, $b_1 \in B$ группы G и любого a_0 из A_0 имеем $\langle a_0^y, a_0 \rangle = \langle a_0^{b_1a_1}, a_0 \rangle = \langle a_0^{b_1}, a_0 \rangle^{a_1} \leqslant \langle B, A_0 \rangle^{a_1}$. Следовательно, $\langle a_0^y, a_0 \rangle$ — p-группа и, значит, по теореме Бэра — Судзуки [6] (теорема 3.8.2) $a_0 \in O_p(G) = 1$. Отсюда $A_0 = 1$. Последнее означает, что $B^{ab} \leqslant C_A(D) \times D$ и $DD^{a^{-1}} = D$, т. е. $D^a = D$. Но тогда $B^{ab} = (C_A(D) \cap B^{ab}) \times D$, откуда $B = D \times C^x$, где $C = C_A(D) \cap B^{ab} \leqslant C_A(D)$ и $x = b^{-1}a^{-1} \in C_G(D)$. Лемма доказана.

Л е м м а 9. *Пусть $G = ABA$ — разрешимая группа, A, B — ее абелевы p-подгруппы и $O_p(G) = 1$. Тогда группа G p-нильпотентна и ее p-дополнение есть прямое произведение ее минимальных нормальных подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если P — силовская p-подгруппа группы G, содержащая подгруппу A, то по лемме 1 $P = A(B \cap P)$ и по лемме 8 $B = (B \cap P) \times C^x$, где $C \leqslant C_A(B \cap P)$ и $x \in C_G(B \cap P)$. Но по лемме 6 $(B \cap P) C \leqslant O_{p',p}(G)$. Поэтому $B \leqslant O_{p',p}(G)$ и, следовательно, $G/O_{p',p}(G)$ — p-группа Отсюда $G = O_{p',p}(G)$, т. е. группа G p-нильпотентна. Пусть T — ее p-дополнение. Так как по теореме 1 из [3] подгруппа T нильпотентна, то ввиду теоремы III.4.5 из [5] для доказательства леммы достаточно показать, что подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G тривиальна.

Ясно, что $\Phi(G) \leqslant T$ и если $y \in \Phi(G)$, то $y = a_1b_1a$, где $a, a_1 \in A$ и $b_1 \in B$. Но $B = (B \cap P) \times C^x$, причем в силу леммы 2 можно считать, что $x \in C_T(B \cap P)$. Поэтому, повторив рассуждения первого абзаца леммы 4, получим $y=[c,x]^a=x^{-ca}x^a$ для некоторого $c\in C$. А так как включение $y=x^{-ca}x^a\in\Phi(G)$ влечет $x^c\Phi(G)=x\Phi(G)$, то элемент c действует тождественно на фактор-группе $G/\Phi(G)$. Поэтому $c\in Z(G)$ [5] (теорема III.3.18) и, таким образом, $y=x^{-ca}x^a=1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G=ABA$ — группа и A, B — ее абелевы p-подгруппы. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к лемме. Ясно, что тогда G не содержит нееденичных разрешимых нормальных подгрупп. В частности, $O_p(G)=C_B(A)=1$. Ясно также, что без нарушения общности можно считать, что B — максимальная абелева p-подгруппа группы G. Пусть теперь P — силовская p-подгруппа группы G, содержащая подгруппу A, и H — максимальная подгруппа в G, содержащая подгруппу P. Покажем, что $H=P$.

Обозначим $D=B\cap P$ и $C=C_A(D)$. По лемме 1 $P=AD$ и поскольку $C_B(A)=1$, то $C=Z(P)$. По лемме 8 $B=D\times C^x$, где $x\in C_G(D)$. Следовательно, так как $H=A(B\cap H)A$ и $D\leqslant B\cap H$, то $B\cap H=D\times C_1^x$, где $C_1=C\cap H^{x^{-1}}\leqslant C$. Но по лемме 6 $D\times C\leqslant O_{p',p}(H)$. Кроме того, так как $C_1^{xh}\leqslant P$ для некоторого элемента $h\in H$ и $xh=a_1ba$ для некоторых элементов $a,a_1\in A$, $b\in B$, то $C_1^{xh}=C_1^{ba}$ и включение $C_1^{ba}\leqslant P$ влечет $C_1^b\leqslant P$. Поэтому $C_1^b\leqslant C_P(C\times D)=C\times D$. Но тогда $C_1^{xh}=C_1^{ba}\leqslant(C\times D)^a$ и, значит, $C_1^x\leqslant(C\times D)^{ah^{-1}}\leqslant O_{p',p}(H)^{ah^{-1}}\leqslant O_{p',p}(H)$. Следовательно, $B\cap H=D\times C_1^x\leqslant$ $\leqslant O_{p',p}(H)$. Отсюда $H=O_{p',p}(H)A$ и, таким образом, $H=O_{p',p}(H)$, т. е. подгруппа H p-нильпотентна.

Пусть T — p-дополнение в H. Согласно лемме 9 подгруппа T абелева. Следовательно, если T_q — произвольная силовская q-подгруппа в T, то $N_G(T_q)=H$. Поэтому T_q — силовская подгруппа в своем нормализаторе, и, значит, силовская q-подгруппа в группе G. Но тогда T — абелева холлова подгруппа группы G. Поэтому по лемме 1.2 из [8] найдется такой элемент $g\in G$, что $T\cap T^g=1$. А так как $g=a_1ba$, где a, $a_1\in A$, $b\in B$, и подгруппа T инвариантна относительно A, поскольку нормальна в H, то $T\cap T^b=$ $=1$. Следовательно, $H\cap H^b=P\cap P^b=A_0D$, где $A_0=A\cap P^b$. В то же время $B\cap H\leqslant H\cap H^b$, $D\leqslant B\cap H$ и $B\cap A=1$. Поэтому $B\cap H=D(B\cap A_0)=D$ и, таким образом, $H=ADA=AD=P$.

Итак, P — максимальная подгруппа в G. Покажем теперь, что $N_G(CD)\leqslant P$. Для этого обозначим $K=N_G(CD)$, $X=N_A(CD)$, $Y=N_B(CD)$ и убедимся сначала, что $K=XYX$. Так как $XYX\subseteq K$, то остается установить обратное включение.

Пусть $a_1ba\in K$, где $a,a_1\in A$ и $b\in B$. Тогда $(CD)^{a_1ba}=CD$ и, значит, $(CD^{a_1})^b=CD^{a^{-1}}$. Отсюда $[CD^{a_1},D]^b=[CD^{a^{-1}},D]$ и так как по лемме 7 обе подгруппы $[CD^{a_1},D]$ и $[CD^{a^{-1}},D]$ нормальны в P, то по теореме Бернсайда о слиянии $[CD^{a_1},D]=[CD^{a^{-1}},D]$. Следовательно, $b\in N_G([CD^{a_1},D])$ и по доказанному либо $N_G([CD^{a_1},D])=P$, либо $[CD^{a_1},D]=1$. Но если $b\in P$, то $a_1ba\in P$ и, значит, $a_1ba\in N_P(CD)=XD\subseteq XYX$. Поэтому пусть $b\notin P$. Тогда $[CD^{a_1},D]=[CD^{a^{-1}},D]=1$, откуда $\langle CD^{a^{-1}},CD^{a_1}\rangle\leqslant C_P(D)=CD$. Но тогда $(CD)^a=(CD)^{a_1}=CD$, т. е. $a,a_1\in X$. Кроме того, из $(CD)^{a_1ba}=CD$ вытекает $(CD)^b=CD$, т. е. $b\in Y$. Поэтому $a_1ba\in XYX$ и, следовательно, $K\subseteq XYX$.

Таким образом, $K=XYX$. В частности, подгруппа K разрешима, поскольку группа G — минимальный неразрешимый контрпример. Покажем далее, что $N_P(CD)=XD$ — силовская p-подгруппа в K. Действительно, пусть S — силовская p-подгруппа в K, содержащая $N_P(CD)$. Тогда $S\leqslant P^g$ для некоторого элемента $g=a_1ba$ из G с $a,a_1\in A$ и $b\in B$. Но тогда $XD\leqslant$ $\leqslant S\leqslant P^{ba}$, откуда $X\leqslant P^{ba}$ и, значит, $X\leqslant P^b$. А так как $P^b=A^bD$, то по лемме 7 подгруппа $[X,D]$ нормальна как в P, так и в P^b. Поэтому замечая, что $1\neq[X,D]$, поскольку $X=N_A(CD)>C$, и $N_G([X,D])=P$, получаем $P=P^b$. Отсюда $S\leqslant P^{ba}=P$ и, следовательно, $S=N_P(CD)$. Но подгруппа

K разрешима и $N_P(CD) = DX$. Поэтому $K = DXT$, где T — некоторая холлова p'-подгруппа в K. Следовательно, чтобы доказать включение $N_G(CD) \leqslant P$, остается показать, что $T = 1$. Последнее, очевидно, имеет место в точности тогда, когда $Y = D$.

Пусть, напротив, $Y > D$ и $y \in Y \setminus D$. Так как $y = dxt$ с $d \in D$, $x \in X$, $t \in T$ и $xt = d^{-1}y \in Y \setminus D$, то можно считать, что $y = xt$. Тогда $x \neq 1 \neq t$ и для любого $d \in D$ имеем $1 = [d, y] = [d, xt] = [d, t][d, x]^t$. Отсюда $[d, t] = [x, d]^t$ и, следовательно, $[D, t] = [x, D]^t$. Но подгруппа $[D, t]$ инвариантна относительно t. Поэтому $[x, D]^t = [x, D]$, т. е. $t \in N_G([x, O])$. А так как ввиду леммы 7 при $[x, D] \neq 1$ справедливо $N_G([x, D]) = P$ и $t \notin P$, то $[x, D] = 1$ и потому $x \in C_X(D) = C$ и $[D, t] = 1$. Учитывая далее, что y — p-элемент, действующий на p-группе CD/D, имеем $(cD)^y = cD$ для некоторого $c \neq 1$ из C. Но тогда из $(cD)^{xt} = cD$ вытекает $(cD)^t = cD$ и так как t — p'-элемент, то по теореме I.18.6 из [5] $(cd)^t = cd$ для некоторого $d \in D$. Поэтому $c^t = c$ и, таким образом, $t \in C_G(c) = P$, что при $t \neq 1$ невозможно. Следовательно, $T = 1$ или, что равносильно, $N_G(CD) \leqslant P$.

Завершим, наконец, доказательство леммы. Для этого покажем еще, что группа G p-нормальна. Действительно, если $C^g \leqslant P$, для некоторого элемента $g = a_1ba$ из G с $a, a_1 \in A$ и $b \in B$, то $C^b \leqslant P$ и, тем самым, $C^b \leqslant C_P(D) = CD$. Поэтому $(CD)^b = C^bD = CD$, что влечет $b \in N_G(CD)$. Но по доказанному $N_G(CD) \leqslant P$ и, значит, $b \in P$. Отсюда $g = a_1ba \in P$ и, следовательно, $C^g = C$. Таким образом, G p-нормальна и поскольку $N_G(C) = P$, то по второй теореме Грюна [6] (теорема 7.5.2) $P \cap G' = P \cap N_G(C)' = P'$. Но тогда AG' — собственная подгруппа группы G, так как $P \cap AG' = A(P \cap \cap G') = AP' \neq P$. В то же время $AG' = A(B \cap AG')A$. Поэтому по предположению подгруппа AG' разрешима и, следовательно, группа G также разрешима. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы завершается теперь следующим образом. Так как по лемме 10 группа G разрешима, то по лемме 9 ее фактор-группа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна с p-дополнением, являющимся прямым произведением минимальных нормальных в $G/O_p(G)$ подгрупп. Поэтому $G/O_p(G)$ — подпрямое произведение своих гомоморфных образов, каждый из которых обладает единственной минимальной нормальной подгруппой. Следовательно, в силу лемм 3 и 4 каждый из них изоморфен при $p > 2$ группе $S(p^m, q^n)$ для подходящего простого числа q и положительных целых чисел m и n, а при $p = 2$ — одной из групп $S(2^m, q^n)$ или $H(2, 3)$. В частности, ступень разрешимости фактор-группы $G/O_p(G)$ не превышает 3. С другой стороны, ввиду леммы 6 ступень разрешимости фактор-группы $G/O_{p',p}(G)$ не превышает 2, а ввиду леммы 1 и теоремы Ито это же верно и для ступени разрешимости подгруппы $O_p(G)$. Но тогда ступень разрешимости фактор-группы $G/O_{p'}(G)$ не превышает 4. А так как группа G вложима в прямое произведение $G/O_p(G) \times G/O_{p'}(G)$, то ее ступень разрешимости также не превышает 4. Теорема доказана.

1. *Gorenstein D.* On finite groups of the form ABA // Can. J. Math.— 1962.— **14**, N 2.— P. 195—236.
2. *Guterman M.* On ABA-groups of finite order // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— **139**.— P. 109—143.
3. *Сысак Я. П.* О конечных группах вида ABA // Алгебра и логика.— 1982.— **21**, № 3.— С. 344—356.
4. *Сысак Я. П.* Конечные ABA-группы с абелевой p-подгруппой A и циклической p-подгруппой B // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 31—42.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.— Berlin etc.: Springer, 1967.— 793 S.
6. *Gorenstein D.* Finite groups.— New York : Harper and Row, 1968.— 527 p.
7. *Jsaacs S. M., Passman D. S.* Half-transitive automorphism groups // Can. J. Math.— 1966.— **18**, N 6.— P. 1243—1250.
8. *Сысак Я. П.* О строении конечных ABA-групп с абелевой подгруппой A и циклической подгруппой B // Строение групп и их подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 33—46.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 17.07.87