УДК 519.41/47

Ф. Н. Лиман

Непериодические группы, все разложимые pd-подгруппы которых нормальны

В настоящей статье продолжается (см. [1]) изучение групп, все разложимые в прямое произведение двух нетривиальных множителей pd-подгруппы которых нормальны для некоторого простого числа p. При этом предполагается, что группа содержит хотя бы одну pd-подгруппу, разложимую в прямое произведение двух нетривиальных множителей. Эти группы кратко называются di_p-группами. Если группа содержит хотя бы одну нетривиальную pd-подгруппу и все pd-подгруппы группы нормальны в ней, то она называется pdI-группой. Основные результаты работы анонсированы в [2].

Теорема. *Непериодическая неабелева группа G тогда и только тогда является di_p-группой, когда она одного из следующих типов*:

1) $G = C\langle b\rangle$, *где C — непериодическая абелева pd-подгруппа,* $b^4 = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ *для любого элемента* $c \in C$ *и* $Z(G) = \langle b^2\rangle$;

2) *G — смешанная группа, коммутант которой имеет порядок p и является единственной подгруппой порядка p группы G;*

3) $G = C\langle b\rangle$, *где C — смешанная группа, все 2d-подгруппы которой нормальны в группе G,* $|b| = 8$, $\langle b^2\rangle$ — *силовская 2-подгруппа группы C и в фактор-группе* $G/\langle b^4\rangle = \bar{G}$ $\bar{b}^{-1}\bar{c}\bar{b} = \bar{c}^{-1}$ *для любого элемента* $\bar{c} \in \bar{C}$;

4) $G = C_1 \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $C_1 = C_G(a)$ — *смешанная абелева группа,* $\langle a\rangle$ — *единственная p-подгруппа группы G порядка* $p \neq 2$, $|b| = 4$, $C = C_1 \leftthreetimes \langle b^2\rangle$ — *неабелева pdI-группа, которая содержит все разложимые pd-подгруппы группы G и в фактор-группе* $G/\langle a\rangle = \bar{G}$ $\bar{b}^{-1}\bar{c}\bar{b} = \bar{c}^{-1}$ *для любого элемента* $\bar{c} \in \bar{C}$;

5) $G = C_1\langle b\rangle$, *где* $C_1 = C_G(a)$ — *смешанная абелева группа, содержащая подгруппу $\langle c\rangle$ простого порядка $q \neq p$ и не содержащая разложимых периодических или без кручения p'-подгрупп,* $\langle a\rangle$ — *единственная p-подгруппа группы G порядка* $p \neq 2$, $|b| = 4$ *или* $|b| = 4q$, $C = C_1\langle b^2\rangle$ — *неабелева pdI-группа, которая содержит все разложимые pd-подгруппы группы G, и все периодические pd-подгруппы из C нормальны в G и в фактор-группе* $G/\langle ac\rangle = \bar{G}$ $\bar{b}^{-1}\bar{c}\bar{b} = \bar{c}^{-1}$ *для любого элемента* $\bar{c} \in \bar{C}$;

6) $G = (\langle a\rangle \times D) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $|a| = p$, $|b| = 2m > 4$, *D — абелева группа без кручения ранга 1,* $\langle a, b\rangle$ — *группа Фробениуса,* $C = \langle a, b^2, D\rangle$ — *неабелева pdI-группа, содержащая все разложимые pd-подгруппы группы G, и все периодические pd-подгруппы из C нормальны в G и в фактор-группе* $G/\langle a\rangle = \bar{G}$ $\bar{b}^{-1}\bar{y}\bar{b} = \bar{y}^{-1}$ *для любого элемента* $\bar{y} \in \bar{D}$.

Необходимость условий теоремы устанавливается в леммах 1—10, а их достаточность легко проверяется. Доказательства некоторых лемм опущены ввиду их простоты или аналогии доказательствам предыдущих лемм.

Лемма 1. *Если в непериодической неабелевой группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы, то* $G = C\langle b\rangle$, *где C — непериодическая абелева подгруппа,* $b^4 = 1$, *и* $b^{-1}cb = c^{-1}$ *для любого элемента* $c \in C$.

Лемма 2. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G содержит элементарную абелеву подгруппу A порядка p^2, то $p \neq 2$ и G является группой типа 1 теоремы.*

Доказательство. Пусть di_p-группа G удовлетворяет условиям леммы, элемент $x \in G$ и $|x| = \infty$. Если $x^n \in C_G(A)$, то $\langle x^n, a\rangle \lhd G$ для любого отличного от единицы элемента $a \in A$. Тогда $\langle a\rangle \lhd G$ как периодическая часть подгруппы $\langle x^n, a\rangle$.

Пусть $A = \langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$. Тогда $\langle x^n a, a_1\rangle \lhd G$ и потому $[x, x^n a] = [x, a] \in (\langle x^n a, a_1\rangle \cap \langle a\rangle) = 1$. Отсюда следует, что $x \in C_G(A)$. Значит, $\langle x, a\rangle \cap \langle x, a_1\rangle = \langle x\rangle \lhd G$. Следовательно, в группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы и по лемме 1 $G = C\langle b\rangle$, где C — непериодическая абелева подгруппа, $b^4 = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.

Допустим, что $p = 2$. Тогда $A\langle b\rangle \lhd G$ и потому $[b, x] \in (\langle x\rangle \cap A\langle b\rangle) = 1$, что невозможно.

Покажем, наконец, что центр $Z(G) = \langle b^2\rangle$. По действию элемента b на подгруппе C заключаем, что если $c \in Z(G)$ и $c \neq 1$, то $c^2 = 1$. Пусть $c \neq b^2$. Тогда $\langle a, b, c\rangle \lhd G$ и потому $[b, x] \in (\langle x\rangle \cap \langle a, b, c\rangle) = 1$, что невозможно. Значит, $Z(G) = \langle b^2\rangle$ и лемма доказана.

Лемма 3. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу порядка p, которая содержится в ее центре, то G является группой типа 2 теоремы при $p \neq 2$ и группой одного из типов 1 — 3 теоремы при $p = 2$.*

Доказательство. По условию леммы центр $Z(G)$ содержит подгруппу $\langle a \rangle$ порядка p и группа G не содержит элементарной абелевой подгруппы порядка p^2. Тогда любая pd-подгруппа группы G содержит элемент a.

Далее рассмотрим два случая.

1. В группе G нормальна любая циклическая p-подгруппа. Пусть F — любая pd-подгруппа из G. Тогда для любых элементов $g \in G$ и $f \in F$ имеем $[g, f] \in \langle a, f \rangle$ и потому $F \lhd G$. Значит, в этом случае G является группой типа 2 теоремы.

2. Группа G содержит p-подгруппу $\langle b \rangle$ порядка p^n, $n > 1$ и $\langle b \rangle \ntriangleleft G$. Поскольку группа G смешанная, содержит в центре элемент a порядка p и в G нормальны все разложимые pd-подгруппы, то, очевидно, G содержит нормальную бесконечную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$, причем $[b, x] \neq 1$ и потому $b^{-1}xb = x^{-1}$. Отсюда следует, что $p = 2$.

Пусть в группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Тогда по лемме 1 группа $G = C\langle b \rangle$, где C — непериодическая абелева подгруппа, $b^4 = 1$, $b^2 \in C$ и является единственной инволюцией в G, т. е. G в этой ситуации является группой типа 1 теоремы.

Предположим теперь, что группа G содержит бесконечную циклическую подгруппу $\langle y \rangle$ и $\langle y \rangle \ntriangleleft G$. Пусть $C_G(x) = C$. Тогда $G = C\langle b \rangle$. Определим порядок элемента b. В фактор-группе $G/\langle a \rangle$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы и потому $b^4 \in \langle a \rangle$, $b^8 = 1$. Среди всех бесконечных циклических подгрупп группы G выберем такую подгруппу $\langle y_1 \rangle$ из подгруппы C, чтобы $\langle y_1 \rangle \ntriangleleft \langle y_1, b \rangle$. Такая подгруппа существует, так как в противном случае получим $b^{-1}cb = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$ и $b^4 = 1$. Но при таком соотношении в группе G будут нормальны все бесконечные циклические подгруппы, что противоречит условию. Итак, пусть $|y_1| = \infty$ и $\langle y_1 \rangle \ntriangleleft \langle y_1, b \rangle$. Так как $\langle a, y_1 \rangle \lhd G$, то $\langle y_1^2 \rangle \lhd G$. Поскольку элемент b не может быть перестановочным с элементом бесконечного порядка, то $b^{-1}y_1b = y_1^{-1}a$. Отсюда $(y_1b)^2 = y_1bby_1^{-1}a = b^2a \neq 1$, так как a — единственная инволюция в группе G. Значит, $|b| = 8$.

Пусть F — произвольная $2d$-подгруппа из C и $f \in F$. Если $|f| < \infty$, то $(\langle a, f \rangle \times \langle x \rangle) \lhd G$ и потому $\langle a, f \rangle \lhd G$. Если $|f| = \infty$, то $\langle a, f \rangle \lhd G$. Значит, $F \lhd G$. Следовательно, подгруппа C либо абелева, либо неабелева и все ее $2d$-подгруппы нормальны в G.

Так как в фактор-группе $G/\langle a \rangle$ все бесконечные циклические подгруппы нормальны и ее центр имеет порядок 2, то по теореме 4.6 из [3] и лемме 1 следует, что $G/\langle a \rangle$ является IH-группой, т. е. G является группой типа 3 теоремы. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет непериодический центр, но ее единственная подгруппа $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$ не содержится в центре, то G является группой типа 2 теоремы.*

Доказательство. Пусть di_p-группа G удовлетворяет условиям леммы и центр $Z(G)$ содержит бесконечную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$. Выделим два случая.

1. Группа G содержит свободную абелеву подгруппу $\langle x_1, x_2 \rangle$ ранга 2. Пусть F — произвольная pd-подгруппа группы G. Так как для любого p-элемента $c \in G$ подгруппа $\langle c, x \rangle \lhd G$, то $\langle c \rangle \lhd G$. Поэтому если $f \in F$ и $|f| < \infty$, то $\langle a, f, x \rangle \lhd G$. Отсюда $\langle a, f \rangle \lhd G$. Если $|f| = \infty$, то хотя бы с одной из подгрупп $\langle x_1 \rangle$ или $\langle x_2 \rangle$ подгруппа $\langle f \rangle$ имеет единичное пересечение. Пусть $\langle f \rangle \cap \langle x_1 \rangle = 1$. Тогда, если $x_1^k \in C_G(a)$, то $\langle x_1^k, a \rangle \lhd G$ и $\langle x_1^{kp} \rangle \lhd G$. Пусть $f^m \in C_G\langle a, x_1^{kp} \rangle$. Тогда $\langle f^m x_1^{kp}, a \rangle \lhd G$ и потому $[f, f^m x_1^{kp}] = [f, x_1^{kp}] \in (\langle x_1^{kp} \rangle \cap \cap \langle f^m x_1^{kp}, a \rangle) = 1$. Отсюда $\langle a, f, x_1^{kpn} \rangle \lhd G$ для любого натурального числа n. Следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a, f, x_1^{kpn} \rangle = \langle a, f \rangle \lhd G$. Тем самым доказано, что $F \lhd G$, и потому в этом случае G является группой типа 2 теоремы.

2. Группа G не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2. Если F — периодическая pd-подгруппа, то $\langle F, x \rangle \lhd G$, и потому $F \lhd G$. Отсюда следует, что периодическая часть T группы G нормальна в G и явля-

ется pdI-группой (абелевой или неабелевой). Так как группа G разрешима по лемме 3 и не содержит свободной абелевой подгруппы ранга 2, то фактор-группа $G/\langle x\rangle$ локально конечна. Тогда на основании предложения 3.9 из [3] фактор-группа G/T абелева ранга 1.

Далее заметим, что если $b \in C_G(a)$, $|b| < \infty$ и $(|b|, p) = 1$, то $b \in \in Z(G)$. Действительно, возьмем произвольный элемент $g \in G$ и $|g| = \infty$. Тогда $g^n \in Z(G)$ для некоторого натурального числа n. Поэтому $\langle g^n b, a\rangle \lhd G$. Отсюда $[g, g^n b] = [g, b] \in (\langle b\rangle \cap \langle g^n b, a\rangle) = 1$. Если t — любой элемент конечного порядка группы G, то $|gt| = \infty$ и потому $[gt, b] = [t, b] = 1$. Значит, $b \in Z(G)$.

Дальнейшее рассмотрение случая 2 базируется на свойствах подгруппы T.

а). Пусть подгруппа T абелева. Покажем, что $G' = \langle a\rangle$. Возьмем произвольный коммутатор $[u, v]$ группы G.

Если $|u| < \infty$, $|v| < \infty$, то $[u, v] = 1$ по условию.

Если $|u| < \infty$, $|v| = \infty$ и $(|u|, p) = 1$, то $[u, v] = 1$ в силу сделанного выше замечания.

Пусть теперь $|u| = p^k$, $|v| = \infty$. Если $k = 1$, то $[u, v] \in \langle a\rangle$. Если $k > 1$, и $v^m \in C_G(u)$, то $\langle v^m u, a\rangle \lhd G$ и потому $\langle (v^m u)^p\rangle \lhd G$. Отсюда $[v, (v^m u)^p] = [v, u^p] = = 1$. Тогда $\langle a, v\rangle \lhd G$ и $[u, v] \in (\langle u\rangle \cap \langle a, v\rangle) = \langle a\rangle$.

И, наконец, пусть $|u| = |v| = \infty$. Так как в фактор-группе G/T подгруппа $\langle uT, vT\rangle$ циклическая, то $u = w^m t_1$, $v = w^n t_2$, где $|w| = \infty$, $t_1 \in T$, $t_2 \in T$. Тогда $[u, v] = [t_1, w^n]\cdot[w^m, t_2] \in \langle a\rangle$. Тем самым доказано, что $G' = \langle a\rangle$ и группа G является pdI-группой.

б). Пусть теперь подгруппа T неабелева. Покажем, что она не содержит группы кватернионов. Допустим, что T содержит группу кватернионов S. Так как $G/C_G(a)$ — циклическая группа, то подгруппа $C_G(a)$ содержит хотя бы один из образующих элементов s_1 группы кватернионов $S = \langle s_1, s_2\rangle$. Но тогда $\langle a, xs_1\rangle \lhd G$. С другой стороны, $[s_2, xs_1] = s_1^2 \notin \langle a, xs_1\rangle$. Это противоречие показывает, что подгруппа T не содержит группы кватернионов. Поэтому T является pdI-группой и $T = \langle a\rangle \leftthreetimes D$, где $|a| = p$, D — абелева группа [4].

Очевидно, $G' \subset (T \cap C_G(a)) = C_T(a)$. Если $C_T(a) = \langle a\rangle$, то $G' = \langle a\rangle$ и лемма доказана.

Пусть $C_T(a) \supset \langle a, b\rangle$, где $|b| = q \neq p$. Как отмечено выше, $b \in Z(G)$. Пусть F — любая подгруппа из G, содержащая $\langle a, b\rangle$. Если $f \in F$ и $|f| < \infty$, то $\langle a, f, x\rangle \lhd G$ и потому $\langle a, f\rangle \lhd G$. Если $|f| = \infty$, то $\langle a, f, b\rangle \lhd G$. Значит $F \lhd G$. Следовательно, $G' \subset \langle a, b\rangle$.

Предположим, что $G' \neq \langle a\rangle$. Тогда $G' = \langle ab\rangle$. Это означает, что группа G имеет коммутатор $[g_1, g_2] \notin \langle a\rangle$, где хотя бы один из элементов g_1, g_2 имеет бесконечный порядок. Пусть $|g_1| = \infty$. Тогда $[g_1, a] \neq 1$, так как иначе одновременно $\langle a, g_1\rangle \lhd G$ и $[g_1, g_2] \notin \langle a, g_1\rangle$, что невозможно.

Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle ab, g_1, g_2\rangle$. Ее коммутант G_1 имеет порядок pq. Обозначим $T_1 = T \cap G_1$. Тогда G_1/T_1 — бесконечная циклическая группа и потому $G_1 = T_1 \leftthreetimes \langle g\rangle$, где $|g| = \infty$. В соответствии с пунктом 2 а) подгруппа T_1 неабелева. Тогда $G_1 = C_{T_1}(a)\ \langle t\rangle \leftthreetimes \langle g\rangle$. Учитывая коммутаторное соотношение $[uv, w] = v^{-1}[u, w]\, v\cdot[v, w]$, приходим к выводу, что группа G_1 имеет коммутатор, не содержащийся в $\langle a\rangle$, порожденный образующими элементами группы G_1. Так как $T_1' = \langle a\rangle$ и для любого элемента $c \in C_{T_1}(a)$ $[c, g] \in \langle a\rangle$, то $[t, g] \notin \langle a\rangle$. Поскольку $\langle a, t\rangle \lhd G$, то $[t, g] \in \in \langle a, t\rangle$ и потому $ab \in \langle a, t\rangle$. Можно считать, что $b \in \langle t\rangle$. Поэтому если $\langle t\rangle = = \langle t_1\rangle \times \langle t_2\rangle$, где $\langle t_1\rangle$ — силовская q-подгруппа из $\langle t\rangle$, то $[g, t_2] \in \langle a\rangle$, $[g, t_1] \notin \langle a\rangle$ и $|t_1| = q^n > q$.

Далее рассмотрим подгруппу $G_2 = \langle a, t_1, g\rangle$, у которой коммутант имеет порядок pq. Пусть $g^k \in C_G(a)$, причем k — наименьшее натуральное число с таким свойством.

Пусть $|[t_1, g]| = q$. Тогда $[t_1, g] \in Z(G)$ и потому $[t_1, g^k] = [t_1, g]^k \in \in (\langle b\rangle \cap \langle a, g^k\rangle) = 1$. Значит, $k = qm$. Так как $t_1 \notin C_G(a)$, то фактор-группа $G_2/C_{G_2}(a)$ содержит нециклическую q-подгруппу, что невозможно.

Пусть $|[t_1, g]| = pq$. Не нарушая общности можно считать $[t_1, g] =$

$= ab$, $[a, g] = a^{r-1}$ и $r \neq 1$. В этой ситуации получаем следующее. С одной стороны, $[t_1, g^k] \in (\langle a, g^k\rangle \cap \langle ab\rangle) = \langle a\rangle$, с другой — $[t_1, g^k] = a^{1+r+\ldots+r^{k-1}} b^k$. Значит, $b^k = 1$ и $k = qm$, что снова невозможно по той же причине.

Следовательно, $G' = \langle a \rangle$ и группа G является группой типа 2 теоремы. Лемма доказана.

Поскольку любая непериодическая di_p-группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу $\langle x \rangle$, то лемма 4 дает описание подгруппы $C = C_G(x)$ индекса 2 в группе G в том случае, когда центр $Z(G)$ группы G периодический и не содержит единственной подгруппы $\langle a \rangle$ порядка p группы G.

В дальнейшем $|a| = p \neq 2$, $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$, $C = C_G(x)$, $C_1 = C_G(a)$.

Лемма 5. *Если непериодическая di_p-группа $G \neq C$, то подгруппа C содержит все элементы бесконечного порядка группы G, является централизатором любой бесконечной циклической нормальной подгруппы и $G = C\langle g\rangle$, $g^{2^n} = 1$, $g^2 \in C$.*

Лемма 6. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, ее центр периодический и не содержит $\langle a \rangle$ и подгруппа C абелева, то G является группой типа 1 теоремы.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы и y — ее произвольный элемент бесконечного порядка. По лемме 5 $y \in C$. Так как по условию подгруппа C абелева, то $\langle a, y \rangle \lhd G$. Поскольку $G = C\langle g\rangle$, $g^{2^n} = 1$, $g^2 \in C$ и $[a, g] \neq 1$, то $g^{-1}ag = a^{-1}$. Пусть $g^{-1}yg = a^l y^m$, где $l < p$. Так как $\langle y^p \rangle \lhd G$, то $g^{-1}y^p g = y^{mp}$. Значит, $m = \pm 1$. Но $m \neq 1$, так как иначе $(yg)^2 = g^2 a^l y^2$, и потому $|yg| = \infty$ и $yg \in C$, что невозможно. Значит, $m = -1$, т. е. $g^{-1}yg = a^l y^{-1}$. Но $g^{-2}yg^2 = a^{-2l}y$ и потому $a^{-2l} = 1$. Отсюда $l = 0$. Таким образом, $g^{-1}yg = y^{-1}$ и $\langle y \rangle \lhd G$. Следовательно, G является группой типа 1 теоремы. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если смешанная неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, ее центр не содержит $\langle a \rangle$ и подгруппа C неабелева, то $\langle a \rangle$ — силовская p-подгруппа группы G, подгруппа C_1 абелева и $G = C_1\langle h\rangle$, где $|h| = 2^m \cdot n > 2$, $m \geqslant 1$ и $C = C_1\langle h^2\rangle$.*

Лемма 8. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, ее центр периодический и не содержит элемента a, подгруппа C неабелева и содержит в центре периодическую или без кручения разложимую p'-подгруппу, то группа G является группой типа 4 теоремы.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Легко понять, что любая разложимая pd-подгруппа группы G содержится в подгруппе C, любая pd-подгруппа из C_1 нормальна в G и любая конечная pd-подгруппа из C нормальна в G. Заметим также, что наличие в центре подгруппы C разложимой периодической или без кручения p'-подгруппы равносильно существованию подгруппы с аналогичными свойствами в C_1. Это следует из того, что любая бесконечная циклическая подгруппа группы G имеет нетривиальное пересечение с центром подгруппы C, а любая конечная подгруппа $\langle b \rangle$, содержащаяся в C_1 и удовлетворяющая условию $(|b|, p) = 1$, включается в $Z(C)$ (см. доказательство леммы 4)

Допустим сначала, что $Z(C) \supset \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$ и $|x_1| = |x_2| = \infty$. Пусть $\bar{y} \in \bar{G} = G/\langle a \rangle$ и $|\bar{y}| = \infty$. Тогда любой прообраз y элемента $\bar{y}$ имеет бесконечный порядок и хотя бы одна из подгрупп $\langle x_1 \rangle$ или $\langle x_2 \rangle$ имеет единичное пересечение с $\langle a, y \rangle$. Пусть $\langle a, y \rangle \cap \langle x_1 \rangle = 1$. Так как $\langle a, y \rangle \subset C$, то $\langle a, y, x_1^n \rangle \lhd G$ для любого натурального числа n. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a, y, x_1^n \rangle = \langle a, y \rangle \lhd G$ и потому $\langle \bar{y} \rangle \lhd \bar{G}$.

Пусть теперь $Z(C) \supset \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, $|\langle b_1, b_2 \rangle| < \infty$ и $(p, |\langle b_1, b_2 \rangle|) = 1$. Если $|y| = \infty$, то $\langle a, y, b_1 \rangle \cap \langle a, y, b_2 \rangle = \langle a, y \rangle \lhd G$ и снова $\langle \bar{y} \rangle \lhd \bar{G}$.

По лемме 1 $\bar{G} = \bar{C}\langle \bar{b} \rangle$, где $\bar{C}$ — абелева смешанная группа, $\bar{b}^{-4} = 1$

и $\bar{b}^{-1}\bar{c}\bar{b} = \bar{c}^{-1}$ для любого элемента $\bar{c} \in \bar{C}$. Пусть b — прообраз $\bar{b}$. Так как $\langle b \rangle \ntriangleleft G$ и $b^4 \in \langle a \rangle$, то $b^4 = 1$. Но $b^2 \neq 1$, так как иначе для любого элемента y бесконечного порядка $by \in C_1$ и потому $b \in C$, что невозможно. Далее с учетом результатов леммы 7 получаем равенства $C = C_1 \langle b^2 \rangle$ и $G = C_1 \rtimes \langle b \rangle$. Подгруппа $\langle a \rangle$ является силовской p-подгруппой группы G по лемме 7. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, ее центр периодический и не содержит элемента a, подгруппа C неабелева и содержит в центре подгруппу $\langle c \rangle$ простого порядка $q \neq p$, то группа G является группой одного из типов 4, 5 теоремы.*

Лемма 10. *Если непериодическая неабелева di_p-группа G имеет единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, ее центр периодический и не содержит элемента a, подгруппа C неабелева и ее центр без кручения ранга 1, то группа G является группой одного из типов 4, 6 теоремы.*

Две последние леммы доказываются так же, как и лемма 8.

Доказанная теорема достаточно детально описывает строение всех непериодических di_p-групп.

1. *Лиман Ф. Н.* О периодических группах, все разложимые *pd*-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 58—61.
2. *Лиман Ф. Н.* Смешанные группы, все разложимые *pd*-подгруппы которых нормальны // XVIII Всесоюз. алгебраич. конф. : Тез. сообщ.— Кишинев, 1985.— Ч. 1.— С. 315.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Лиман Ф. Н.* Группы с некоторыми системами инвариантных *pd*-подгрупп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 100—118.

Сум. пед. ин-т | Получено 13.03.86