УДК 519.14

Е. С. Мафцир, Б. И. Плоткин

Группа автоморфизмов базы данных

1. Определение основных понятий. Постановка задач. База данных предназначена для хранения информации и выдачи ответов на поступающие в нее запросы. Запрашиваться может то, что непосредственно хранится в базе данных, а также некоторая производная информация. Все это предполагает, что имеется некоторая совокупность данных и программных средств, позволяющих производить операции над данными. Система данных, как правило, организуется в определенную алгебру. Базу данных можно представить в виде некоторой алгебраической структуры, позволяющей более целенаправленно организовывать программные средства. С использованием этой структуры можно добиваться удовлетворения основных требований, предъявляемых к базе данных: непротиворечивости, целостности, отсутствия избыточности. Указанная структура позволяет также решать и другие задачи теории и практики баз данных.

В первом приближении база данных может рассматриваться как автомат вида $\mathfrak{A} = (F, Q, R)$, где F — множество состояний, Q — алгебра запросов, R — алгебра ответов на запросы. Предполагается, что задана операция $* : F \times Q \to R$, так что $f * q = r$, где r — ответ на запрос q в состоянии f. Необходимо также потребовать, чтобы структура ответа на запрос была согласована со структурой самого запроса, т. е. чтобы отображение $\hat{f} : Q \to R$, определяемое через $\hat{f}(q) = f * q$, являлось гомоморфизмом алгебр. Таким образом, алгебры Q и R должны быть однотипными алгебрами, и так как запросы в базах данных строятся на основе языка исчисления предикатов первой ступени, то Q и R должны быть связаны с исчислением предикатов. Алгебраизация исчисления предикатов первой ступени достигается, в частности, на основе алгебр Халмоша, которые связаны с исчислением предикатов подобно тому как булевы алгебры связаны с исчислением высказываний. Чтобы дать формальное определение алгебры Халмоша, приведем необходимые предварительные сведения.

Рассмотрим множество переменных X и отображение $n : X \to \Gamma$, где Γ — множество сортов переменных. Это отображение разбивает множество X по сортам $X = (X_i, i \in \Gamma)$.

В схему также включено многообразие θ Γ-сортных Ω-алгебр. Через $W = (W_i, i \in \Gamma)$ обозначим свободную в θ алгебру над комплектом $X = (X_i, i \in \Gamma)$. Пусть $S = \operatorname{End} W$ — полугруппа эндоморфизмов алгебры W, элементы из S переводят переменные из X_i в элементы из W_i.

Возьмем произвольную булеву алгебру H. Отображение $\exists : H \to H$ называется квантором существования, если выполняются следующие условия: 1) $\exists 0 = 0$; 2) $h < \exists h \ \forall h \in H$; 3) $\exists (h_1 \wedge \exists h_2) = \exists h_1 \wedge \exists h_2$.

H есть кванторная алгебра в схеме $n : X \to \Gamma$, если каждому $Y \subset X$ отвечает квантор существования $\exists (Y)$, причем имеют место свойства:

1) $\exists (\varnothing) h = h \ \forall h \in H$;

2) $\exists (Y_1 \cup Y_2) h = \exists (Y_1) \cdot \exists (Y_2) h \ Y_1 \subset X, \ Y_2 \subset X$.

Введем теперь понятие носителя элемента $w \in Wi$. Назовем $Y \subset X$ носителем w, если для любых двух гомоморфизмов $\sigma_1 : W \to \mathcal{D}$ и $\sigma_2: W \to \mathcal{D}$ из того, что $\sigma_1 (x) = \sigma_2 (x) \ \forall x \in Y$ следует, что $\sigma_1 (w) = \sigma_2 (w)$. Понятно, что каждый элемент w обладает конечным носителем и, следовательно, можно выбрать минимальный носитель элемента w. Минимальный носитель обозначим через Δw. Теперь дадим определение алгебры Халмоша. H является алгеброй Халмоша в данной схеме, если это кванторная алгебра, и полугруппа $S = \operatorname{End} W$ действует в качестве полугруппы эндоморфизмов булевой алгебры H, удовлетворяя следующим требованиям:

1) $s_1 \exists (Y) = s_2 \exists (Y)$, если $s_1 x = s_2 x \ \forall x \notin Y$, $s_1, s_2 \in \operatorname{End} W$;

2) $\exists (Y) s = s \exists (s^{-1} Y)$, если а) $s (x_\alpha) = s (x_\beta) \in Y$ возможно лишь при $x_\alpha = x_\beta$ и б) если $x \notin s^{-1} Y$, то $\Delta (sx) \cap Y = \varnothing$.

В приложениях часто бывает важно, чтобы в схеме языка исчисления предикатов присутствовал знак равенства. В качестве операции знак равенства можно определить и для алгебры Халмоша. Равенство в алгебре Халмоша H — это функция d, сопоставляющая каждой паре элементов w_1 и w_2 из одного и того же W_i элемент $d (w_1, w_2)$ алгебры Халмоша H так, чтобы выполнялись следующие аксиомы, имитирующие аксиомы равенства:

1) $sd (w_1, w_2) = d (sw_1, sw_2)$, $s \in \operatorname{End} W$, $w_1, w_2 \in W_i$;

2) $d (w, w) = 1$;

3) $d (w_1, w_1') \wedge \ldots \wedge d (w_n, w_n') < d (w_1 \ldots w_n \omega, \ w_1' \ldots w_n' \omega)$, где ω — операция соответствующего типа из Ω, и каждая пара $(w_1, w_1') \ldots (w_n, w_n')$ принадлежит одному типу;

4) $s_{w_1}^{x_\alpha} h \wedge d \ (w_1, w_2) < s_{w_2}^{x_\alpha} h$; здесь $h \in H$, $w_1, w_2 \in W_i$, $s_{w_1}^{x_\alpha}$ переводит x_α в w_1, а все остальные x_β оставляет без изменений. Доказывается, что если в алгебре Халмоша можно задать равенство, то это можно сделать единственным способом. Верен также тот факт, что любую алгебру Халмоша можно вложить в алгебру Халмоша с равенством.

Введем понятие носителя элемента алгебры Халмоша. Подмножество $Y \subset X$ называется носителем элемента $h \in H$, если выполняется условие: $\exists (\bar{Y}) h = h$. Носитель Y содержит все переменные из X, входящие в «состав» данного h. Это такие x, для которых выполняется $\exists_x h \neq h$.

Рассмотрим теперь основные примеры алгебр Халмоша, которые используются в базах данных в качестве алгебры запросов и алгебры ответов на запросы

Начнем с алгебры ответов на запросы. Исходить будем из схемы алгебры Халмоша, описанной выше. Пусть $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_i, i \in \Gamma)$ — произвольная многосортная Ω-алгебра из многообразия θ. Обозначим через $\tilde{D}$ декартово произведение $\tilde{D} = D_1^{X_1} \times \ldots \times D_k^{X_k}$, где $k = |\Gamma|$. Элементами в $\tilde{D}$ являются наборы $a = (a^1, \ldots, a^k)$, где a^i — отображение типа $X_i \to D_i$. Каждому $a \in \tilde{D}$ отвечает гомоморфизм $W \to \mathcal{D}$. Следовательно, множество $\tilde{D}$ можно отождествить с множеством $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$. Возьмем теперь множество всех подмножеств $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$ и обозначим его через $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{M}(X, \mathcal{D})$. Определим действие полугруппы $\mathrm{End}\, W$ в $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$:

$$(\mu s)(x_\alpha) = \mu(s x_\alpha),\ \mu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D}),\ s \in \mathrm{End}\, W.$$

Далее, продолжим действие S на подмножества из $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$. Если $A \subset \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$, то $\mu \in sA$, если $\mu s \in A$. Теперь определим действие кванторов на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Для этого каждому подмножеству $Y \subset X$ сопоставим квантор существования $\exists(Y)$ по следующему правилу: для любого $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ положим $\mu \in \exists(Y) A$, если в A найдется такой μ', что $\mu(x) = \mu'(x)\ \forall x \notin Y$. Доказывается, что определенная таким образом алгебра $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ является алгеброй Халмоша. На ней можно определить равенство d по правилу $d(w_1, w_2) = D_{w_1, w_2}$, где D_{w_1, w_2} есть множество всех $\mu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$, для которых выполняется $w_1^\mu = w_2^\mu$. Множества вида D_{w_1, w_2} называются диагоналями алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Нетрудно заметить, что множество $V_{\mathcal{D}} = V(X, \mathcal{D})$, состоящее из всех тех элементов $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, которые имеют конечный носитель, является подалгеброй алгебры Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{M}(X, \mathcal{D})$. Такая подалгебра $V_{\mathcal{D}}$, содержащая все диагонали, играет в базах данных роль универсальной алгебры ответов на запросы.

Перейдем теперь к построению алгебры запросов. Как отмечалось выше, эта алгебра связана с языком исчисления предикатов первой ступени. Пусть в дополнение к уже описанной схеме задано множество символов отношений Φ. Каждому $\varphi \in \Phi$ отвечает определенный тип $\tau = (i_1 \ldots i_m)$, тип операции $\omega \in \Omega$ имеет вид $\tau = (i_1 \ldots i_m, j)$. Символ φ типа τ реализуется в качестве подмножества в декартовом произведении $D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_m}$, т. е. реализация $f(\varphi)$ есть подмножество в $D_{i_1} \times \ldots D_{i_m}$; этим задается модель $(\mathcal{D}, \Phi, f)$. Реализация f рассматривается также как состояние заданной схемы в алгебре $\mathcal{D}$. Построим теперь множество формул исчисления предикатов над свободной алгеброй в многообразии θ.

Определим сначала элементарные формулы, как формулы вида $\varphi(w_1 \ldots \ldots w_m)$, где φ — символ отношения типа $\tau = (i_1 \ldots i_m)$, $w_i \in W_i$. Получили набор элементарных формул, который обозначим через $\tilde{\Phi}$. Теперь с помощью операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists x_\alpha$, $x_\alpha \in X$, породим множеством $\tilde{\Phi}$ свободную алгебру $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$.

Для каждого состояния f определяется интерпретация $\tilde{f}$ формул из $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$ в алгебре Халмоша отношений $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Сделаем это для элементарных формул. Итак, если даны $u = \varphi(w_1 \ldots w_m)$ и $\mu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$, то положим $\mu \in \tilde{f}(u) \Leftrightarrow (w_1^\mu \ldots w_m^\mu) \in f(\varphi)$. Затем, рассматривая множество $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$ как свободную алгебру, продолжаем данное отображение $\tilde{f}$ на все формулы. Таким образом, имеем гомоморфизм $\tilde{f}: \mathcal{L}\tilde{\Phi} \to \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$.

В рассматриваемом специализированном исчислении предикатов можно указать его аксиомы и правила вывода, связанные с заданным многообразием θ. Это позволяет определить на $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$ отношение τ следующим образом: $u\tau v \Leftrightarrow\ \vdash (u \to v) \wedge (v \to u)$, где $u, v \in \mathcal{L}\tilde{\Phi}$, $\vdash w$ означает, что формула w выводима из аксиом. Можно показать, что τ-эквивалентность, согласованная с операциями алгебры $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$ и $u\tau v$, означает, что формулам u и v отвечает один и тот же запрос в любом состоянии f, и следовательно, им отвечает один и тот же ответ. Факторизуя алгебру $\mathcal{L}\tilde{\Phi}$ по τ, получаем алгебру $U = \mathcal{L}\tilde{\Phi}/\tau$, которая может быть наделена структурой алгебры Халмоша. Именно U и является универсальной алгеброй запросов в базе данных и для каждого состояния f имеем гомоморфизм $f: U \to V_{\mathcal{D}}$. Из приводившихся рассуждений видно, что алгебра Халмоша U зависит только от схемы и не зависит от системы данных.

Вернемся снова к базам данных и уточним их определение, данное выше. Автомат $\mathfrak{A} = (F, Q, R)$, определенный в начале пункта, является автоматом типа вход — выход (запрос — ответ) и называется $*$-автоматом. Здесь Q и R — алгебры Халмоша в заданной схеме. Для полного определения базы данных автомат $\mathfrak{A}$ необходимо привязать к алгебре данных $\mathcal{D}$.

Как уже отмечалось, роль алгебры запросов играет алгебра U, а алгебры ответов на запросы — алгебра $V_{\mathcal{D}}$. С набором символов отношений Φ и алгеброй $\mathcal{D}$ связано множество всех состояний базы — $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \mathcal{F}(\Phi, \mathcal{D})$. Таким образом, в заданной схеме каждой алгебре $\mathcal{D} \in \theta$ отвечает тройка $\mathrm{Atm}\, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Гомоморфизм $\hat{f}: U \to V_{\mathcal{D}}$ определяет операцию $*: \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \times U \to V_{\mathcal{D}}$ по правилу: $f * u = \hat{f}(u)$ и тогда приходим к $*$-автомату $\mathrm{Atm}\, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Этот автомат называется универсальным $*$-автоматом и трактуется как универсальная база данных над алгеброй данных $\mathcal{D}$.

Рассмотрим сейчас связь абстрактного автомата $\mathfrak{A} = (F, Q, R)$ с алгеброй $\mathcal{D}$. Эта связь задается как представление-гомоморфизм автоматов: $\rho = (\alpha, \beta, \gamma): \mathfrak{A} = (F, Q, R) \to \mathrm{Atm}\, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Здесь $\alpha: F \to \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ — отображение множеств, которое абстрактные состояния делает реальными состояниями в алгебре $\mathcal{D}$, $\beta: U \to Q$ — гомоморфизм алгебр, действующий в противоположном стрелке ρ направлении. Он связывает абстрактные запросы с их записями в языке. Обратное направление объясняется тем, что любой абстрактный запрос начинается с его записи. Отображение $\gamma: R \to V_{\mathcal{D}}$ также является гомоморфизмом алгебр, который представляет ответы на запросы в виде отношений в системе $\mathcal{D}$. И, наконец, по определению гомоморфизма должно выполняться условие $f^{\alpha} * u = (f * u^{\beta})^{\gamma}$, $f \in F$, $u \in U$.

Теперь можно дать общее определение базы данных как алгебраической структуры. База данных — это система $\mathfrak{A} = (F, Q, R, U, \mathcal{D}, \rho)$, где (F, Q, R) — абстрактный $*$-автомат, U представляет схему, $\mathcal{D}$ — алгебра данных, ρ — представление в $\mathrm{Atm}\, \mathcal{D}$.

Представление базы данных в виде алгебраической структуры позволяет применять алгебраический аппарат для изучения различных свойств баз данных. Целью данной статьи является рассмотрение группы автоморфизмов базы данных, и как первый шаг к этому, исследуется группа автоморфизмов алгебры Халмоша отношений.

2. Группа автоморфизмов алгебры Халмоша отношений. В данном пункте рассматриваются группы автоморфизмов специализированной алгебры Халмоша отношений и ее локально конечной части. Пусть X — множество переменных, Γ — множество сортов переменных, отображение $n: X \to \Gamma$ разбивает переменные по сортам, Ω — произвольный набор операций, θ — многообразие Ω-алгебр, W — свободная алгебра в θ над X. Возьмем в θ произвольную алгебру $\mathcal{D} = (D_i, i \in \Gamma)$. Для нее имеем множество $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$, множество всех подмножеств которого является специализированной в θ алгеброй Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Она понимается как алгебра отношений, поскольку ее элементы можно рассматривать также как подмножества в соответствующем декартовом произведении.

Перейдем теперь к рассмотрению группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Наша цель — связать ее с группой автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}$. Зададим действие элементов $g \in G = \mathrm{Aut}\, \mathcal{D}$ на множестве $\mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$ по следующему правилу: $(\mu g)(x) = \mu(x) g_{n(x)}$. Здесь элемент $\mu g: W \to \mathcal{D}$ есть произведение гомоморфизма $\mu: W \to \mathcal{D}$ и автоморфизма $g: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Перенесем действие группы G на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$. Для любого $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ полагаем $g_* A = \{\mu : \mu g \in A\}$.

Предложение 1. *Определенное выше правило задает представление группы G на $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ в качестве группы автоморфизмов.*

Доказательство. Согласованность каждого g с булевыми операциями очевидна. Проверим согласованность действия $g \in G$ с кванторными операциями и с элементами из полугруппы эндоморфизмов End W. Сначала докажем равенство: $g_*\exists(Y)A = \exists(Y)g_*A$, где $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, $Y \subset X$. Возьмем $\mu \in g_*\exists(Y)A$, тогда $\mu g \in \exists(Y)A$ и по определению квантора существования существует $\nu \in A$ такое, что $\mu g(x) = \nu(x)\ \forall x \notin Y$. Возьмем $\nu_1 \in g_*A$, такой, что $\nu_1 g = \nu$. Тогда $\mu g(x) = \nu_1 g(x)\ \ \forall x \notin Y$ и $\mu(x) = \nu_1(x)$, а это означает, что $\mu \in \exists(Y)g_*A$. Включение в обратную сторону доказывается аналогично. Теперь покажем справедливость равенства $g_*sA = sg_*A$, где $s \in$ End W. Очевидно, $\mu \in g_*sA \Leftrightarrow \mu gs \in A$ и $(\mu gs)(x) = (\mu g)(sx) = \mu(sx)\, g_{n(sx)} = (\mu s)(x)\, g_{n(x)} = (\mu sg)(x)$. Таким образом, $\mu sg \in A$ и, следовательно, $\mu \in sg_*A$. Обратное включение проверяется аналогично. Далее справедливы соотношения $(g_{1*}g_{2*})A = g_{1*}(g_{2*}A)$ и $\varepsilon_* A = A$, где $g_1, g_2 \in G$, ε — единица в G. Тем самым предложение доказано.

Теперь покажем, что каждый автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ реализуется некоторым $g \in G$. Для доказательства этого факта необходимы некоторые предварительные замечания.

Рассмотрим булеву алгебру $\mathfrak{M}$ всех помножеств произвольного множества M. Каждая подстановка σ множества M определяет автоморфизм σ_* алгебры $\mathfrak{M}$ по правилу $\sigma_*A = \{a : a\sigma \in A\}$, где $A \in \mathfrak{M}$. Верно и обратное.

Предложение 2. *Каждый автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}$ порождается некоторой подстановкой множества M.*

Доказательство. Возьмем τ-произвольный автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}$. Покажем, что найдется подстановка g множества M такая, что выполняется равенство

$$\tau A = gA \tag{1}$$

для произвольного $A \in \mathfrak{M}$. Вначале заметим, что если $A = \{a\}$ — одноэлементное множество, то и τA одноэлементно. Действительно, возьмем в τA одноэлементное подмножество B, $B \subset \tau A$. Тогда $\tau^{-1}B \subset A$ и так как A одноэлементно и $\tau^{-1}B$ непусто, то $\tau^{-1}B = A$ и $B = \tau A$. Построим теперь по τ подстановку g на M. Возьмем $a \in M$ и $A = \{a\}$. Тогда $B = \tau A$ состоит из одного элемента b и положим $bg = a$. Подстановка g действует также и на множестве $\mathfrak{M}$. Докажем вначале равенство (1) для случая одноэлементных множеств. По определению действия подстановки g на $\mathfrak{M}$ имеем $g_* A = \{c : cg \in A\}$, но $A = \{a\}$, следовательно, $a = cg$. Учитывая, что $a = bg$, получаем $c = b$ и $gA = \{b\} = \tau A$.

Перейдем к случаю, когда A – произвольное множество. Для этого надо показать справедливость равенства

$$\tau A = \bigcup_{a \in A} \tau\{a\}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\bigcup_{a \in A} \tau\{a\} \subseteq \tau A$. Предположим включение строгое. Тогда

$$\tau A = \bigcup_{a \in A} \tau\{a\} \cup B, \tag{3}$$

где $B \neq \varnothing$ и $B \cap \left(\bigcup_{a \in A} \tau\{a\}\right) = \varnothing$. Из (3) имеем $A = \tau^{-1}\left(\bigcup_{a \in A} \tau\{a\}\right) \cup \tau^{-1}B$. Возьмем в $\tau^{-1}B$ произвольное одноэлементное подмножество $A_0 = \{a_0\}$. Тогда $\tau A_0 \subset \bigcup_{a \in A} \tau\{a\}$ и $A_0 \subset \tau^{-1}\left(\bigcup_{a \in A} \tau\{a\}\right)$, что дает противоречие с требованием пустого пересечения B и $\bigcup_{a \in A} \tau\{a\}$. Таким образом, получили (2) и вместе с этим, учитывая, что $gA = \bigcup_{a \in A} g\{a\}$, доказали требуемое равенство (1).

Вернемся к множеству Hom $(W, \mathcal{D})$. Обозначим через Σ группу всех его подстановок. Пусть Σ_i — группа всех подстановок множества D_i, $i \in \Gamma$, и $\Sigma_x = \Sigma_{n(x)}$. Рассмотрим декартово произведение всех Σ_x, $x \in X$, и обозначим его через $\tilde{\Sigma}$. Определим действие $\tilde{\Sigma}$ на Hom $W, (\mathcal{D})$ следующим образом: $\forall \mu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$, $\forall \sigma \in \tilde{\Sigma}\ \mu\sigma(x) = \mu(x)\sigma(x)$.

Введем сейчас понятие правильной подстановки. Подстановка множества Hom $(W, \mathcal{D})$ называется правильной, если $\forall \mu$, $\nu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$ $\mu(x) = \nu(x)$ тогда и только тогда, когда $\mu\tau(x) = \nu\tau(x)$ для всех $x \in X$.

Множество всех правильных подстановок является подгруппой в группе Σ. Покажем, что эта подгруппа изоморфна $\tilde{\Sigma}$.

Понятно, что $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ действует в Hom $(W, \mathcal{D})$ как правильная подстановка, причем разные σ действуют по-разному. Определим теперь по правильной подстановке τ подстановку $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, которая действует в Hom $(W, \mathcal{D})$ также, как τ. Возьмем $a \in D_x = D_{n(x)}$ и выберем гомоморфизм μ такой, что $\mu(x) = a$. Подстановку σ выберем так, чтобы выполнялось $a\sigma(x) = (\mu\tau)(x)$. Такое требование корректно, так как оно не зависит от выбора μ, ввиду того, что τ — правильная подстановка. Осталось заметить, что $a\sigma(x) = \mu(x)\sigma(x) = \mu(x)\tau(x)$ для всех $x \in X$. Таким образом, получили требуемый изоморфизм.

В данной ситуации справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Подстановка $\sigma \in \Sigma$ тогда и только тогда перестановочна с кванторами в $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, когда $\sigma \in \tilde{\Sigma}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, $A \in \mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, $Y \subset X$. Проверим выполнение равенства $\sigma\exists(Y)A = \exists(Y)\sigma A$. Возьмем $\mu \in \sigma\exists(Y)A$, тогда $\mu\sigma \in \exists(Y)A$ и, следовательно, существует $\nu \in A$, что $\forall x \notin Y$ $(\mu\sigma)(x) = \nu(x)$. Выберем еще ν_1 такой, что $\nu_1(x) = (\nu\sigma^{-1})(x)$ $\forall x \notin Y$. Имеем равенства для всех x, не лежащих в Y:

$$\mu(x) = (\mu\sigma\sigma^{-1})(x) = (\mu\sigma)(x)\sigma^{-1}(x) = \nu(x)\sigma^{-1}(x) = (\nu\sigma^{-1})(x) = \nu_1(x).$$

Но по определению $\nu_1 \in \sigma A$, следовательно, $\mu \in \exists(Y)\sigma A$. Обратное включение проверяется аналогично и требуемое равенство получено.

Пусть теперь подстановка $\sigma \in \Sigma$ перестановочна с квантором существования. Заметим сразу, что тогда и обратная подстановка σ^{-1} будет также перестановочна с кванторами. Возьмем далее два элемента μ и ν из Hom $(W, \mathcal{D})$ так, чтобы $\mu(x) = \nu(x)$ для некоторого $x \in X$. Определим $Y = X \setminus \{x\}$. Тогда $\mu \in \exists(Y)\{\nu\}$ и $\mu\sigma \in \sigma^{-1}\exists(Y)\{\nu\} = \exists(Y)\sigma^{-1}\{\nu\} = \exists(Y)\{\nu\sigma\}$. Отсюда имеем, что $\mu\sigma(x) = \nu\sigma(x)$. Применяя к последнему равенству подстановку σ^{-1}, получаем, что $\mu\sigma(x) = \nu\sigma(x)$ влечет $\mu(x) = \nu(x)$. Таким образом проверено, что σ — правильная подстановка, и, следовательно, предложение доказано.

Из последних двух предложений видно, что каждый автоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$, перестановочный с кванторами, реализуется некоторой правильной подстановкой. Верно также и обратное утверждение.

Найдем теперь в $\tilde{\Sigma}$ все элементы, которые перестановочны с действием каждого s из полугруппы эндоморфизмов $S = \mathrm{End}\ W$. Для этого выделим в $\tilde{\Sigma}$ подгруппу Σ_0, состоящую из тех σ, для которых $\sigma(x) = \sigma(y)$ для любых x и y одного сорта. Подстановку $\sigma \in \Sigma_0$ можно представить в виде $\sigma = \{\sigma_i, i \in \Gamma\}$, где σ_i — подстановка множества D_i. Таким образом, группа Σ_0 является группой всех подстановок системы $\mathcal{D} = (D_i, i \in \Gamma)$, а группа автоморфизмов $G = \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ — ее подгруппой.

П р е д л о ж е н и е 4. *Подстановка $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ перестановочна с действием каждого $s \in \mathrm{End}\ W$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in G = \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1 $\sigma \in G$ является автоморфизмом алгебры Халмоша $\mathfrak{M}_{\mathcal{D}}$ и, следовательно, σ перестановочна с каждым $s \in \mathrm{End}\ W$. Пусть теперь $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ и обладает свойством перестановочности с эндоморфизмами W. Докажем вначале, что $\sigma \in \Sigma_0$. Возьмем x и y одного и того же сорта и предположим, что $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Выберем в $D_y = D_{n(y)}$ элемент a такой, что $a\sigma(x) \neq a\sigma(y)$, и $\mu \in \mathrm{Hom}(W, \mathcal{D})$ такой, что $\mu(y) = a$. Пусть также s — произвольный эндоморфизм, переводящий

x в y. Тогда, учитывая, что перестановочность σ с действием $s \in \operatorname{End} W$ в $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ равносильна перестановочности с s в $\operatorname{Hom}(W, \mathscr{D})$, имеем

$$(\mu\sigma s)(x) = (\mu\sigma)(sx) = (\mu\sigma)(y) = \mu(y)\sigma(y) = a\sigma(y)\xi$$

$$(\mu s\sigma)(x) = (\mu s)(x)\sigma(x) = \mu(sx)\sigma(x) = \mu(y)\sigma(x) = a\sigma(x).$$

Отсюда $a\sigma(y) = a\sigma(x)$. Таким образом, пришли к равенству $\sigma(x) = \sigma(y)$, и, следовательно, $\sigma \in \Sigma_0$. Для завершения доказательства осталось показать, что σ сохраняет операции в $\mathscr{D}$. Пусть $\omega \in \Omega$ — операция типа $(i_1, \ldots i_n, j)$. Проверим, что $(a_1 \ldots a_n\omega)^\sigma = a_1^\sigma \ldots a_n^\sigma\omega$, где $a_i \in D_i$, $i \in \Gamma$. Возьмем $x, x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\mu \in \operatorname{Hom}(W, \mathscr{D})$, чтобы выполнялось $x_1^\mu = a_1, \ldots, x_n^\mu = a_n$ и $x^s = x_1 \ldots x_n\omega$. Тогда $(\mu s\sigma)(x) = ((\mu s)(x))^\sigma = (\mu(sx))^\sigma = ((x_1 \ldots x_n\omega)^\mu)^\sigma = (a_1 \ldots a_n\omega)^\sigma$ и $(\mu\sigma s)(x) = (\mu\sigma)(sx) = (\mu\sigma)(x_1 \ldots x_n\omega) = x_1^{\mu\sigma} \ldots x_n^{\mu\sigma}\omega = a_1^\sigma \ldots a_n^\sigma\omega$. Таким образом, доказано, что $\sigma \in G = \operatorname{Aut} \mathscr{D}$.

Приведенные предложения доказывают следующую теорему.

Теорема 1. *Каноническое представление группы* $\operatorname{Aut} \mathscr{D}$ *в качестве группы автоморфизмов алгебры Халмоша* $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ *определяет изоморфизм групп* $\operatorname{Aut} \mathscr{D}$ *и* $\operatorname{Aut} \mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$.

Если алгебра $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ наделена структурой равенства, то и в этом случае справедлива аналогичная теорема.

Теорема 2. *Группа* $\operatorname{Aut} \mathscr{D}$ *изоморфна группе автоморфизмов алгебры Халмоша* $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$ *с равенством.*

Доказательство. Для доказательства, учитывая утверждение теоремы 1, достаточно проверить, что действие каждого $g \in \operatorname{Aut} \mathscr{D}$ согласовано с диагоналями алгебры $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$, т. е. $g_* D_{w,w'} = D_{w,w'}$.

Пусть $\mu \in g_* D_{w,w'}$, т. е. $\mu g \in D_{w,w'}$. Тогда $w^{\mu g} = (w^\mu)^g = (w'^\mu)^g$, $w^\mu = w'^\mu$ и $\mu \in D_{w,w'}$. Теперь покажем обратное включение. Итак, $\mu \in D_{w,w'}$, тогда $w^{\mu g} = (w^\mu)^g = (w'^\mu)^g = w'^{\mu g}$ и $\mu g \in D_{w,w'}$ и, следовательно, $\mu \in g_* D_{w,w'}$. Теорема доказана.

В случае бесконечного множества X важную роль играет алгебра Халмоша $V_{\mathscr{D}}$, являющаяся локально конечной частью $\mathfrak{M}_{\mathscr{D}}$. Понятно, что группа $\operatorname{Aut} \mathscr{D}$ действует в $V_{\mathscr{D}}$ в качестве группы автоморфизмов. Но возникает вопрос: исчерпываются ли этим все автоморфизмы алгебры $V_{\mathscr{D}}$. Используя соотношения Галуа, можно показать, что в случае конечной алгебры $\mathscr{D}$ группа $\operatorname{Aut} \mathscr{D}$ индуцирует все автоморфизмы $V_{\mathscr{D}}$. Оказывается, что и в общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой алгебры* $\mathscr{D}$ *представление* $\operatorname{Aut} \mathscr{D} \to \operatorname{Aut} V_{\mathscr{D}}$ *есть изоморфизм групп.*

Доказательство. Возьмем в X конечное подмножество X^0, содержащее переменные всех сортов. В схеме $n: X^0 \to \Gamma$ имеем алгебру Халмоша $V_{\mathscr{D}}^0$. Для нее по теореме 1 имеем $\operatorname{Aut} V_{\mathscr{D}}^0 \approx \operatorname{Aut} \mathscr{D}$ (ввиду конечности X^0). Рассмотрим теперь подалгебру $V_{\mathscr{D}}(X^0)$ алгебры $V_{\mathscr{D}}$, содержащую все элементы из $V_{\mathscr{D}}$, имеющие своим носителем X^0. Покажем, что существует канонический изоморфизм между $V_{\mathscr{D}}^0$ и $V_{\mathscr{D}}(X^0)$. Для этого возьмем проектирование $\tilde{\pi}(Y): \tilde{D} \to D(Y)$, где $\tilde{D} = \prod_{\alpha \in X} D_\alpha = \prod_{\alpha \in X} D_{n(\alpha)}; D(Y) = \prod_{\alpha \in Y} D_\alpha = \prod_{\alpha \in Y} D_{n(\alpha)}$. По этому проектированию имеем отображение $\pi_*: B(Y) \to V_{\mathscr{D}}$, где $B(Y)$ — булева алгебра всех подмножеств множества $D(Y)$ и $\pi_*(A) = \{b \in \tilde{D}: b\tilde{\pi} \in A\}$. Нетрудно заметить, что $\pi_*: B(Y) \to V_{\mathscr{D}}(Y)$ есть изоморфизм булевых алгебр и учитывая, что $V_{\mathscr{D}}^0$, как булева алгебра, изоморфна алгебре $B(X^0)$ (по определению $V_{\mathscr{D}}^0$), имеем канонический изоморфизм $\pi = \pi(X^0): V_{\mathscr{D}}^0 \to V_{\mathscr{D}}(X^0)$ (согласованность с операциями алгебры Халмоша проверяется тривиально). Пусть теперь σ — произвольный автоморфизм алгебры $V_{\mathcal{D}}$. Тогда ему отвечает автоморфизм σ_0 алгебры $V^0_{\mathcal{D}}$, соответствующий ограничению σ на $V_{\mathcal{D}}(X^0)$, и имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\sigma"] & V_{\mathcal{D}} \\ V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\sigma_0"] & V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}.$$

Далее, взяв $g \in \operatorname{Aut} \mathcal{D}$, имеем автоморфизмы g_* и g^0_* алгебр $V_{\mathcal{D}}$ и $V^0_{\mathcal{D}}$ соответственно, причем очевидно, что справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{D}} \arrow[r, "g_*"] & V_{\mathcal{D}} \\ V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "g^0_*"] & V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}.$$

Теперь надо показать, что для любого автоморфизма $\sigma \in \operatorname{Aut} V_{\mathcal{D}}$ найдется $g \in \operatorname{Aut} \mathcal{D}$, что $\sigma = g_*$. Для $\sigma_0 \in \operatorname{Aut} V^0_{\mathcal{D}}$ существует $g^0 \in \operatorname{Aut} \mathcal{D}$, что $\sigma_0 = g^0_*$, так как X^0 — конечное множество.

Прежде всего заметим, что если g и g_1 из $\operatorname{Aut} \mathcal{D}$ различны, то и g^0_* и $g^0_{1_*}$ также различны. Рассмотрим теперь новое конечное множество X^1, содержащее X^0. Соответственно имеем алгебру Халмоша $V^1_{\mathcal{D}}$. Тогда автоморфизму σ отвечает автоморфизм σ_1 в $V^1_{\mathcal{D}}$, причем можно подобрать $g_1 \in \operatorname{Aut} \mathcal{D}$, что $\sigma_1 = g^1_{1*}$. Так как $V(X^0)$ является подалгеброй $V(X^1)$, то по аналогии с первой диаграммой имеем

$$\begin{tikzcd} V^1_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\sigma_1"] & V^1_{\mathcal{D}} \\ V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\sigma_0"] & V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}.$$

Ее, в свою очередь, учитывая конечность множеств X^0 и X^1, можно представить в виде

$$\begin{tikzcd} V^1_{\mathcal{D}} \arrow[r, "g^1_{1_*}"] & V^1_{\mathcal{D}} \\ V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "g^0_{\circ}"] & V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}.$$

Помимо этого, используя тот факт, что g порождает автоморфизмы и в $V^0_{\mathcal{D}}$ и в $V^1_{\mathcal{D}}$, аналогично второй диаграмме имеем

$$\begin{tikzcd} V^1_{\mathcal{D}} \arrow[r, "g^1_*"] & V^1_{\mathcal{D}} \\ V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "g^0_*"] & V^0_{\mathcal{D}} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd},$$

которая также коммутативна.

Из последних двух диаграмм, учитывая единственность выражения σ_1 через автоморфизм алгебры $\mathcal{D}$, получаем $g^1_{1_*} = g^1_*$ и, следовательно, $g^0_{1_*} = g^0_*$. Таким образом, g совпадает с g_1 и σ_1 порождается тем же g, что и σ_0. А так как любой элемент алгебры $V_{\mathcal{D}}$ принадлежит какой-то подалгебре $V(Y)$, где Y носитель этого элемента и $Y \supset X^0$, то и $\sigma \in \operatorname{Aut} V_{\mathcal{D}}$ порождается этим же $g \in \operatorname{Aut} \mathcal{D}$, т. е. $\sigma = g_*$. Этим теорема доказана. Приведенные теоремы дают полное описание автоморфизмов алгебры Халмоша отношений и ее локально конечной части на основе автоморфизмов алгебры $\mathcal{D}$.

Эти результаты имеют непосредственное приложение к базам данных, где $\mathcal{D}$ является алгеброй данных, $V_{\mathcal{D}}$ — алгеброй Халмоша ответов на запросы.

3. Группа автоморфизмов универсальной базы данных. Опишем группу автоморфизмов универсальной базы данных, определение которой дано в п. 1. Как известно, такая база данных представляет собой $*$-автомат вида $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D} = (\mathcal{F}_{\mathcal{D}}, U, V_{\mathcal{D}})$. Во втором пункте по автоморфизму $g: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ строился автоморфизм $g_*: V_{\mathcal{D}} \to V_{\mathcal{D}}$ локально конечной части алгебры Халмоша отношений. Сейчас по $g \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ построим автоморфизм булевой алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, который также обозначается g_*.

Начнем с того факта, что $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ действительно является булевой алгеброй. Множество Φ состоит из символов отношений φ, каждый из которых имеет определенный тип $\tau = (i_1 \dots i_m)$. И тогда Φ можно представить в виде объединения $\Phi = \bigcup\limits_{\tau} \Phi_\tau$, где Φ_τ — совокупность символов отношений типа τ. Так как каждому $\varphi \in \Phi$ типа $\tau = (i_1 \dots i_m)$ отвечает отношение в декартовом произведении $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$, то множеству Φ_τ отвечает множество всех подмножеств $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$, обозначаемое нами в дальнейшем $\mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$. Понятно, что $\mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$ есть булева алгебра, и, следовательно, множество функций $\mathcal{F}^\tau = \mathrm{Fun}(\Phi^\tau, \mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D}))$ с покомпонентным определением операций также является булевой алгеброй. И наконец, учитывая то, что множество всех состояний $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ есть декартово произведение всех $\mathcal{F}^\tau$, получаем, что и $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ является булевой алгеброй.

Итак, пусть теперь $g: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — автоморфизм алгебры $\mathcal{D}$, в соответствии с которым имеем отображение $g_\tau: D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m} \to D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m}$. Далее определяем отображение $g_{\tau_*}: \mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D}) \to \mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$ булевой алгебры $\mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$ в себя по правилу $g_{\tau_*} B = \{a \in D_{i_1} \times \dots \times D_{i_m} : g_\tau(a) \in B\}$. Легко понять, что g_{τ_*} — автоморфизм булевой алгебры $\mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$, если g — автоморфизм $\mathcal{D}$. Следующий этап — это задание отображения $\tilde{g}_\tau: \mathcal{F}^\tau \to \mathcal{F}^\tau$, где $f^{\tilde{g}_\tau}(\varphi) = (f(\varphi))^{g_{\tau_*}}$. Так как $\mathcal{F}^\tau$ является декартовой степенью алгебры $\mathrm{Rel}^\tau(\mathcal{D})$ с покомпонентным определением операций, то $\tilde{g}_\tau$ есть автоморфизм $\mathcal{F}^\tau$. Наконец, все $\tilde{g}_\tau$ покомпонентно определяют отображение $g_*: \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, которое, очевидно, является автоморфизмом булевой алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Приведем теперь без доказательства теорему, которой в дальнейшем будем пользоваться.

Теорема 4 [1]. *Если $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ — алгебры из многообразия θ, $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$ и $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}'$ — соответствующие универсальные базы данных, то каждый эпиморфизм алгебр $\delta: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ индуцирует вложение δ_*: $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}' \to \mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$. Здесь $\delta_* = (\delta_*^F, \mathrm{I}, \delta_*^V)$, где $\delta_*^F: \mathcal{F}'_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $\delta_*^V: V'_{\mathcal{D}} \to V_{\mathcal{D}}$ являются мономорфизмами соответствующих алгебр, индуцируемые δ.*

Если $\delta: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ — изоморфизм, то и $\delta_*: \mathrm{Atm}\,\mathcal{D}' \to \mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$ будет изоморфизмом, в частности, если $g \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$, то соответствующее $g_* = (g_*^F, I, g_*^V)$ будет автоморфизмом универсальной базы данных $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$. Этот автоморфизм не действует на алгебру запросов U. Таким образом, имеем представление группы $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ в качестве группы автоморфизмов универсальной базы данных $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$. Причем справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Рассматриваемое представление дает изоморфизм между группой $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ и подгруппой в $\mathrm{Aut}\,(\mathrm{Atm}\,\mathcal{D})$, состоящей из автоморфизмов, не меняющих запросы.*

Доказательство. Пусть (α, γ) — произвольный автоморфизм алгебры $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$, не меняющий запросы. Так как γ — автоморфизм алгебры Халмоша $V_{\mathcal{D}}$, то по теореме 3 он индуцируется некоторым $g \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$. Покажем сейчас, что α однозначно определяется этим γ.

Для любого $u \in U$ имеем $f^\alpha * u = (f * u)^\gamma$, но $(f * u)^\gamma = (f(u))^\gamma$. Тогда

$f^{\alpha}(u)=(\hat{f}(u))^{\gamma}$. Таким образом, справедливо равенство гомоморфизмов $\hat{f}^{\alpha}=\hat{f}^{\gamma}$, т. е. f^{α} определяется через f и γ, и, следовательно, α определяется через γ. Тогда α индуцируется тем же $g\in \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$, что и γ. Учитывая существование взаимно-однозначного соответствия между автоморфизмами алгебры $V_{\mathcal{D}}$ и автоморфизмами $\mathcal{D}$, завершаем доказательство предложения.

Перейдем к рассмотрению автоморфизмов $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$, меняющих алгебру запросов U. Пусть $\xi: U\to U$ — автоморфизм алгебры U. Определим по нему подстановку $\hat{\xi}$ на множестве $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ по правилу $\hat{\xi}f*u=f*\xi^{-1}u$, где $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $u\in U$. Последнее равенство можно записать с помощью соответствующих гомоморфизмов в виде $\widehat{\hat{\xi}f}=\hat{f}\xi^{-1}$, где $\hat{\xi}$ — действительно подстановка на $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, так как из определения имеем $\hat{f}=\widehat{\hat{\xi}f}\cdot\xi$ и выполняется $\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2=\widehat{\xi_1\xi_2}$. Проверим последнее равенство: $\widehat{\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2f}=\widehat{\hat{\xi}_2(\hat{f}\xi_1^{-1})}=(\hat{f}\xi_1^{-1})(\xi_2^{-1})=\hat{f}\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}=\hat{f}(\xi_1\xi_2)^{-1}=\widehat{\widehat{\xi_1\xi_2}f}$. Понятно также, что тождественное преобразование U определяет единичную подстановку. Таким образом, имеем представление $\mathrm{Aut}\,U$ в качестве группы подстановок множества $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Теперь каждому $\xi\in\mathrm{Aut}\,U$ сопоставим тройку $(\hat{\xi},\xi,\mathrm{I})$. Так как $f^{\hat{\xi}}*u^{\xi}=f*\xi^{-1}\xi u=f*u=(f*u)^{\mathrm{I}}$, то тройка $(\hat{\xi},\xi,\mathrm{I})$ есть автоморфизм универсальной базы данных $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$. И тем самым задано представление $\mathrm{Aut}\,U$ в $\mathrm{Aut}\,(\mathrm{Atm}\,\mathcal{D})$. Пусть, далее, $\mathrm{Aut}\,U\times\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ — прямое произведение групп автоморфизмов. Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5. *Имеется каноническое представление*

$$\mathrm{Aut}\,U\times\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}\to\mathrm{Aut}\,(\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}),$$

являющееся изоморфизмом групп.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем пару $(\xi,g)\in\mathrm{Aut}\,U\times\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$, причем ξ отвечает автоморфизм $(\hat{\xi},\xi,\mathrm{I})$ автомата $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$, а g — автоморфизм (g_*,I,g_*) (здесь символом g_* отмечены разные отображения). Рассмотрим произведение автоморфизмов $(\hat{\xi},\xi,\mathrm{I})(g_*,\mathrm{I},g_*)=(\hat{\xi}g_*,\xi,g_*)$. Покажем, что переход $(\xi,g)\xrightarrow{\psi}(\hat{\xi}g_*,\xi,g_*)$ есть гомоморфизм групп. Для этого заметим, что выполняется равенство $\hat{\xi}g_*=g_*\hat{\xi}$. Действительно, $f^{\hat{\xi}g_*}=(f*\xi^{-1}u)^{g_*}=f^{g_*}*\xi^{-1}u=f^{g_*\hat{\xi}}$. Отсюда следует, что перестановочны автоморфизмы $(\hat{\xi},\xi,\mathrm{I})$ и (g_*,I,g_*). Далее проверим, что выполняется $[(\xi_1,g_1)(\xi_2,g_2)]^{\psi}=(\xi_1,g_1)^{\psi}(\xi_2,g_2)^{\psi}$:

$$[(\xi_1,g_1)(\xi_2,g_2)]^{\psi}=(\xi_1\xi_2,g_1g_2)^{\psi}=(\widehat{\xi_1\xi_2},\xi_1\xi_2,\mathrm{I})((g_1g_2)_*,\mathrm{I},(g_1g_2)_*)=$$

$$=(\hat{\xi}_1,\xi_1,\mathrm{I})(\hat{\xi}_2,\xi_2,\mathrm{I})(g_{1*},\mathrm{I},g_{1*})(g_{2*},\mathrm{I},g_{2*})=(\xi_1,\xi_1,\mathrm{I})(g_{1*},\mathrm{I},g_{1*})\times$$

$$\times(\hat{\xi}_2,\xi_2,\mathrm{I})(g_{2*},\mathrm{I},g_{2*})=(\xi_1,g_1)^{\psi}(\xi_2,g_2)^{\psi}.$$

Итак показано, что переход ψ есть гомоморфизм групп.

Инъективность этого гомоморфизма очевидна. Докажем его сюръективность. Пусть тройка (α,β,γ) — произвольный автоморфизм $\mathrm{Atm}\,\mathcal{D}$. Тогда γ есть автоморфизм алгебры $V_{\mathcal{D}}$ и для некоторого $g\in\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ $\gamma=g_*$, β есть автоморфизм алгебры U и для некоторого $\xi\in\mathrm{Aut}\,U$ $\beta=\xi$. Осталось проверить, что $\alpha=\hat{\xi}g_*$. Возьмем $f\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, $u\in U$. Тогда имеем $f^{\alpha}*u^{\beta}=(f*u)^{\gamma}=(f*u)^{g_*}=f^{g_*}*u=f^{\alpha}*\xi u=\hat{\xi}^{-1}f^{\alpha}*u$; и $f^{g_*}=\hat{\xi}^{-1}f^{\alpha}$; $f^{\alpha}=\hat{\xi}f^{g_*}=\hat{\xi}g_*f$. Таким образом, $\alpha=\hat{\xi}g_*$. Следовательно переход ψ в действительности является изоморфизмом групп $\mathrm{Aut}\,U\times\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ и $\mathrm{Aut}\,(\mathrm{Atm}\,\mathcal{D})$. Теорема доказана.

Мы получили описание группы автоморфизмов универсальной базы данных через группы автоморфизмов алгебры запросов и алгебры данных. Знание группы автоморфизмов базы данных дает возможность использования различных свойств симметрий при изучении и конструировании баз.

1. *Плоткин Б. И.* Алгебраическая модель базы данных — автомата // Латв. мат. ежегодник.— 1983.— Вып. 27.— С. 216—232.
2. *Halmos D. R.* Algebraic logic.— New York : Chelsea Publ. Co, 1962.— 270 p.

Латв. ун-т

Получено 16.11.87