УДК 519.85

И. И. Еремин, Вл. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев

Системы линейных неравенств в математическом программировании и распознавании образов*

Линейные неравенства привлекли внимание математиков еще в первой половине прошлого столетия (Фурье [1], М. В. Остроградский [2]) в связи с приложениями, в частности, в аналитической механике. Однако разработка теории линейных неравенств началась только в конце столетия (Минковский [3]). В 1901 г. появляется обстоятельное исследование Фаркаша [4], посвященное системам линейных неравенств, а в 1908 г.— исследование Г. Ф. Вороного [5], посвященное квадратичным формам целочисленных переменных. В последнем исследовании возникает общая задача изучения геометрических свойств выпуклого полиэдрального множества, определяемого решениями конечной системы линейных неравенств. Системы линейных неравенств изучались далее Штимке [6], Дайнсом [7], Вейлем [8] и другими математиками. Однако интенсивность исследований, относящихся к линейным неравенствам, продолжительное время оставалась невысокой, и лишь в начале пятидесятых годов, когда вполне определились широкие возможности для приложений теории линейных неравенств в экономике (Л. В. Канторович [9], Купманс [10]), она существенно возросла (в основном, по-видимому, за счет исследований прикладного характера).

Фундаментальным вкладом в теорию линейных неравенств явилась установленная С. Н. Черниковым теорема, названная принципом граничных решений (формулировку см. в п. 1). Эта теорема, доказанная в [11] для конечных систем линейных неравенств в модульной форме, а в [12] — для конечных систем линейных неравенств обычного вида вскоре привлекла внимание ряда советских и зарубежных математиков. Г. Н. Нефедьев [13], Г. Ш. Рубинштейн [14], Фань-Цзи [15], Беккенбах, Беллман [16] и др. и стала одним из основных широко используемых в исследованиях фактов теории линейных неравенств. В работах С. Н. Черникова [12, 17—45] теория линейных неравенств получила глубокое и всестороннее развитие. Его исследованиями было подготовлено построение чисто алгебраической теории линейных неравенств. Такая теория последовательно изложена в его монографии «Линейные неравенства» [44] (на немецком языке [46]), которая и до сих пор является единственной монографией в нашей стране, посвященной линейным неравенствам.

С. Н. Черникову принадлежит весьма важный метод «свертывания» систем линейных неравенств, позволяющий по любой системе линейных неравенств и заданному подпространству связанного с ней линейного пространства находить новую систему линейных неравенств, множество решений которой совпадает с проекцией множества решений рассматриваемой системы на взятое подпространство [24, 26, 31, 34, 44, 45]. Метод свертывания позволяет решать задачи линейного программирования, дает алгоритмы для получения общих формул, определяющих все множество решений конечной системы линейных неравенств и соответственно—алгоритмы для получения всего множества оптимальных решений в задачах линейного программирования

С. Н. Черников выделил и изучил весьма важный класс бесконечных систем линейных неравенств — полиэдрально замкнутые системы [29, 36, 39, 40, 44]. Для случая конечномерного действительного линейного пространства — это бесконечные системы, сопряженный конус которых топологически замкнут. На полиэдрально замкнутые бесконечные системы линейных неравенств переносятся некоторые свойства конечных систем линейных неравенств. Полиэдрально замкнутые системы линейных неравенств

---

* В настоящей статье ссылки [1—50] в точности соответствуют библиографии работы: *Красовский Н. Н., Еремин И. И.* Системы линейных неравенств и некоторые приложения // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 4.— С. 456—478. Поэтому список работ [1—50] здесь н е приводится, а дается лишь его продолжение [51—76].

являются эффективным средством анализа разных вопросов математического программирования, вопросов теории приближения функций, теории управления и др. В п. 3 изложены результаты исследований в этом направлении, в п. 4 — вопросы дальнейшего развития результатов С. Н. Черникова как в теоретическом плане, так и в прикладном.

1. Принцип граничных решений. Пусть P — произвольное упорядоченное поле, $L(P)$ — произвольное линейное пространство над полем P и $L^*(P)$ — пространство линейных (однородных и аддитивных) функций, определенных на $L(P)$ со значениями в P. Под системой линейных неравенств над пространством $L(P)$ понимается система

$$f_\alpha(x) - a_\alpha \leqslant 0, \quad \alpha \in \mathcal{J}, \tag{1}$$

где $f_\alpha \in L^*(P), \alpha_\alpha \in P$ и $\alpha \in \mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ — произвольное множество индексов). Система (1) над пространством $L(P) = P^n$ принимает вид

$$f_\alpha(x) = a_{\alpha 1}x_1 + \ldots + a_{\alpha n}x_n \leqslant a_\alpha, \alpha \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

где $a_{\alpha i}$, $\alpha \in \mathcal{J}$, $i = 1, \ldots, n$,— элементы поля P. Максимальное число линейно независимых функций $f_\alpha(x)$, $\alpha \in \mathcal{J}$, называется рангом системы (1).

Ниже рассматриваются конечные системы вида (1); в этом случае полагаем $\mathcal{J} = \{1, \ldots, m\}$ и $\alpha = j$. Сформулируем теперь предложение, называемое *принципом граничных решений.*

Теорема 1 [44]. *Если система линейных неравенств*

$$f_j(x) - a_j \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

над произвольным пространством $L(P)$, *имеющая ранг* $r > 0$, *совместна, то найдутся* r *линейно независимые функции* $f_{j_1}(x), \ldots, f_{j_r}(x)$ *такие, что все решения системы уравнений*

$$f_{j_s}(x) - a_{j_s} = 0, \qquad s = 1, \ldots, r, \tag{4}$$

будут удовлетворять системе (3).

Множество решений произвольной системы (4) такого рода называется *минимальной гранью* многогранника решений системы (3). Это определение позволяет сформулировать принцип граничных решений в следующей форме.

Теорема 2 [44]. *Многогранник решений любой конечной совместной системы линейных неравенств* (3) *обладает хотя бы одной минимальной гранью.*

Для систем линейных неравенств над пространством R^n теорема 2 была получена С. Н. Черниковым в работе [12] (теорема 2). Для систем линейных неравенств над произвольным действительным пространством $L(R)$ оно очевидным образом сводится к этому частному случаю [23].

Принцип граничных решений был распространен и на системы линейных неравенства вида

$$|f_j(z) - a_j| \leqslant d_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

(модульная форма), где $f_j(z)$ — линейные функции, определенные на произвольном линейном пространстве $L(K)$ над полем K комплексных чисел со значениями в K, $a_j \in K$; d_j, $j = 1, \ldots, m$,— неотрицательные действительные числа. В работе [23] получено следующее утверждение.

Теорема. *Если система* (5) *ранга* $r > 0$ *совместна, то найдутся такие* r *линейно независимые функции* $f_{j_1}(z), \ldots, f_{j_r}(z)$, *что система*

$$|f_{j_s}(z) - a_{j_s}| = d_{j_s}, \quad s = 1, \ldots, r,$$

$$|f_j(z) - a_j| \leqslant d_j, \quad j \neq j_1, \ldots, j_r,$$

совместна.

Для систем вида (5) над пространством $L(K) = K^n$ это предложение установил С. Н. Черников в 1944 г. [11]. Рассматриваемый в теореме 1 общий случай очевидным образом сводится к этому частному случаю.

В монографии [44] принцип граничных решений используется для решения многих вопросов, возникающих в теории линейных неравенств. Это прежде всего вопросы о совместности конечных систем линейных неравенств и существовании у них решений с теми или иными свойствами (в частности, вопрос о существовании неотрицательных решений), вопрос об условиях неограниченности множества решений, о приводимости системы к модульной форме.

2. Свертывание линейных неравенств: теория и приложения. Приведем некоторые введенные С. Н. Черниковым понятия, связанные с методом исключения неизвестных, и сформулируем полученные им результаты [44].

Пусть U — произвольное подпространство пространства $L(P)$ и V — прямое дополнение U в $L(P)$. Конусом U-сплетенности конечной системы линейных неравенств (3) над $L(P)$ называется конус $C(U)=\{(u_1, \ldots, u_m)\geqslant 0: u_1 f_1(x)+\ldots+u_m f_m(x)=0,\ x\in U\}$. Фундаментальным элементом конуса $C(U)$ называется такой его элемент $u^0=(u_1^0, \ldots, u_m^0)$, что среди функций $f_{j_1}(x), \ldots, f_{j_{s+1}}$, соответствующих его ненулевым координатам $u_{j_1}, \ldots, u_{j_{s+1}}$, имеется точно s функций, линейно независимых на U. В книге [44] устанавливаются следующие свойства фундаментальных элементов конуса $C(U)$:

а) если конус $C(U)$ содержит ненулевые элементы, то он содержит и фундаментальные элементы;

б) множество существенно различных фундаментальных элементов конуса $C(U)$ конечно;

в) максимальные системы существенно различных фундаментальных элементов ненулевого конуса $C(U)$ и только они являются его базисами, т. е. несократимыми системами образующих элементов.

Два элемента u' и u'' конуса $C(U)$ не считаются существенно различными, если существует такой положительный элемент $p\in P$, что $u''=pu'$.

Пусть далее

$$\{u^i\}=\{(u_1^i, \ldots, u_m^i)\},\quad i=1, \ldots, h, \tag{6}$$

— какая-нибудь максимальная система существенно различных фундаментальных элементов конуса $C(U)$. Тогда система

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^i f_j(x)-\sum_{j=1}^{m} u_j^i a_j\leqslant 0 \qquad i=1, \ldots h \tag{7}$$

называется *фундаментальной U-сверткой* системы (3). Если $C(U)=\{0\}$, то фундаментальная U-свертка считается пустой.

Если (6) — любая система образующих элементов конуса $C(U)$ (т. е. не обязательно являющаяся базисом), то система (7) называется *U-сверткой* системы (3). Если конус $C(U)$ нулевой, то и U-свертка считается пустой. Если $U=L(P)$, то U-свертка называется полной.

Пусть U и U' — какие-нибудь два подпространства из $L(P)$. Если U-свертка S системы (3) непуста, то U'-свертка системы S (рассматриваемой над $L(P)$) называется повторной (U, U')-сверткой системы (3). Если U-свертка пуста, либо пуста ее U'-свертка, то (U, U')-свертка системы (3) пуста по определению.

Значение приведенных здесь понятий раскрывается в следующих теоремах [44].

Теорема 4. *Множество решений произвольной непустой свертки системы (3) в любом прямом дополнении V подпространства U в $L(P)$ совпадает с проекцией (U-проекцией) множества решений системы (3) в это подпространство. Если U-свертка пуста, то эта проекция совпадает со всем подпространством V.*

Теорема 5. *Если система (3) совместна, то совместна или пуста каждая ее U-свертка по любому подпространству $U\subset L(P)$. Если какая-нибудь U-свертка системы (3) совместна или пуста хотя бы для одного подпространства $U\subset L(P)$, то система (3) совместна.*

Теорема 6. *Любая повторная* (U, U')-*свертка системы* (3) *совпадает с некоторой* $(U + U')$-*сверткой этой системы.*

Опишем процедуру получения U-сверток системы (3). Интересующую нас процедуру получения U-сверток системы (3) следует рассматривать в предположении, что U — конечномерное подпространство. Возьмем какой-нибудь базис $u^1, \ldots, u^r$ пространства U. Тогда произвольный элемент $u \in U$ представляется в виде $u = x_1 u^1 + \ldots + x_r u^r$, где $x_1, \ldots, x_r$ — элементы поля P, и система (3) представится в виде

$$x_1 f_j(u^1) + \ldots + x_r f_j(u^r) - t_j \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Здесь параметры $t_j = a_j - f_j(x)$ являются свободными членами, где x — произвольный элемент из фиксированного прямого дополнения подпространства U в $L(P)$. Допустим, что для таких систем известна процедура получения полной свертки. Тогда, найдя полную свертку системы (8) и подставив в нее $t_j = a_j - f_j(x)$, получим полную U-свертку исходной системы (3) (считая, что x в ней — произвольный элемент из $L(P)$). Таким образом, алгоритм сводится к процедуре нахождения полной свертки системы вида

$$T_j(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

где все a_{ji} и a_j — элементы поля P (эта система соответствует случаю системы (3) над пространством $L(P) = P^n$).

Пусть теперь $U_1, \ldots, U_n$ — пространства, порожденные в пространстве P^n соответственно векторами $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Тогда $P^n = U_1 + \ldots + U_n$ и в силу теоремы 6 полная свертка системы (9) получится следующим образом. Для системы (9) находится U_1-свертка, для нее U_2-свертка и т. д. На n-м шаге получается полная свертка системы (9). Следовательно, процедура получения полной свертки полностью сводится к нахождению U_i-свертки системы (9).

На основе идеи фундаментального свертывания С. Н. Черников в 1963—1965 гг. [28, 34] разработал оптимальный (с минимальным числом комбинирований) алгоритм исключения неизвестных из систем вида (9) со свободными параметрами в качестве свободных членов. Этот алгоритм получил название алгоритма сокращенного фундаментального свертывания. Он является по существу пока единственным универсальным и в то же время рациональным алгоритмом для получения общих (параметрических) формул, определяющих все множество решений системы линейных неравенств вида (9), а также всего множества оптимальных решений в задачах линейного программирования.

Метод свертывания нашел существенное применение в решении задач распознавания образов. Основой для таких применений служит следующая ниже теорема С. Н. Черникова [42]. Для того чтобы ее сформулировать, приведем необходимые определения.

Индексом произвольного неравенства U-свертки конечной системы линейных неравенств называется совокупность номеров тех неравенств последней, которые при составлении рассматриваемого неравенства U-свертки были взяты с ненулевыми коэффициентами. Неравенство $a \leqslant 0$ с $a > 0$ или неравенство $a < 0$ с $a \geqslant 0$ называется несовместным.

Теорема 7. *Номера неравенств несовместной системы линейных неравенств*

$$\begin{aligned} f_j(x) - a_j &< 0, \qquad j = 1, \ldots, m_1, \\ f_j(x) - a_j &\leqslant 0, \qquad j = m_1 + 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{10}$$

(*над пространством* $L(P)$), *входящих в произвольную ее минимальную несовместную подсистему, составляют индекс одного из несовместных неравенств полной фундаментальной свертки системы* (10). *И наоборот, номера неравенств системы* (10), *входящих в индекс произвольного несовместного неравенства ее полной фундаментальной свертки, являются номерами неравенств некоторой минимальной несовместной подсистемы системы* (10).

Отсюда вытекает, что подсистема T несовместной системы (10) совместна в том и только том случае, когда совокупность номеров тех неравенств системы (10), которые входят в подсистему T, не включает целиком индекс ни одного из несовместных неравенств полной фундаментальной свертки системы (10). Это свойство совместных подсистем системы (10) позволило построить алгоритм для выделения всех максимальных совместных подсистем (м.с.п.) несовместной системы (10) над пространством P^n (и, в частности, над R^n). В основу этого алгоритма положена отмеченная выше процедура сокращенного фундаментального свертывания (в форме, приспособленной для систем вида (10)).

Один из способов решения задачи распознавания образов, основанный на понятии комитета системы линейных неравенств, может быть сведен к выделению м. с. п. у системы вида (10) над пространством R^n, а затем к выделению некоторой совокупности их решений. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Как известно, большое применение при построении алгоритмов распознавания получил способ, основанный на построении аффинных разделяющих функций. Пусть, например, A' и B' — два неизвестных непересекающихся множества из R^n, A и B — известные конечные множества, выделенные соответственно в A' и B'. Задача построения аффинной функции $f(c) = \langle x, c\rangle + x_{n+1}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, разделяющей A и B, заключается в решении системы линейных неравенств

$$\langle x, c\rangle + x_{n+1} > 0, \quad c \in A, \quad \langle x, c\rangle + x_{n+1} < 0, \quad c \in B, \tag{11}$$

содержащей столько неравенств, сколько содержится элементов в $A \cup B$; здесь $\langle , \rangle$ —символ скалярного произведения. Если система (11) совместна и $(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$ — ее некоторое решение, то классификация элемента $c \in A' \cup B'$ производится согласно следующему правилу:

$$c \in \begin{cases} A', \text{ если } \langle \bar{x}, c\rangle + \bar{x}_{n+1} > 0, \\ B', \text{ если } \langle \bar{x}, c\rangle + \bar{x}_{n+1} \leqslant 0. \end{cases}$$

Однако система (11) может оказаться несовместной. В этом случае оказывается полезным следующее понятие [47].

Комитетом системы (11) называется такое конечное множество $K \subset R^{n+1}$, что всякому ее неравенству удовлетворяет большинство элементов из K. Если $K = \{(x^1, x^1_{n+1}), (x^2, x^2_{n+1}), \ldots, (x^m, x^m_{n+1})\}$ — комитет системы (11), то произвольный вектор $c \in A' \cup B'$ будет относиться к A' или B' в зависимости от того, будет ли большинство выражений $\langle x^i, c\rangle + x^i_{n+1}$, $i = 1, \ldots, m$, положительным или отрицательным.

3. Полиэдрально замкнутые системы линейных неравенств. Весьма важным (в частности, с точки зрения приложений) классом бесконечных систем линейных неравенств, т. е. систем вида (1) при бесконечном множестве индексов $\mathcal{J}$, является выделенный С. Н. Черниковым [36, 44] класс полиэдрально замкнутых систем. На системы этого класса переносятся многие важные факты теории конечных систем линейных неравенств и линейного программирования. Приведем здесь определение полиэдрально замкнутой системы линейных неравенств и некоторые относящиеся к ним результаты С. Н. Черникова [44].

Пусть $L' = L'(P)$ — подпространство пространства L^* линейных функционалов, определенных на линейном пространстве $L = L(P)$.

Однородная система линейных неравенств над L

$$f_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \alpha \in \mathcal{J}, \tag{12}$$

где $f_\alpha \in L'$, $\alpha \in \mathcal{J}$, называется полиэдрально (L, L')-замкнутой, если ее двойственный конус C (т. е. выпуклый конус, порожденный элементами f_α) совпадает с конусом $D(C)$, являющимся пересечением всех множеств, содержащих C и задаваемых линейными неравенствами над L' вида $x(f) \leqslant 0$, $x \in L$. Система $f_\alpha(x) - a_\alpha \leqslant 0$, $\alpha \in \mathcal{J}$, называется полиэдрально (L, L')-замкнутой, если однородная система над $\overline{L} = L + P^1 : f_\alpha(x) - a_\alpha t \leqslant 0, -t \leqslant 0$, $\alpha \in \mathfrak{J}$, является полиэдрально $(\overline{L}, \overline{L}')$-замкнутой. Здесь $\overline{L'} = L' + P^1$.

Справедливо следующее обобщение теоремы Минковского.

Теорема 8 ([44], теорема 7.1). *Для того чтобы неравенство $f^0(x) \leqslant 0$, $f^0 \in L'$, было следствием системы* (12), *необходимо и достаточно, чтобы $f^0 \in D(C)$.*

Наиболее важные свойства полиэдрально замкнутых систем выражают следующие предложения.

Теорема 9. *Совместная система вида* (1) *тогда и только тогда полиэдрально (L, L')-замкнута, когда она финитно L'-определена.*

Система (1) называется *финитно L'-определенной*, если любое неравенство $f^0(x) \leqslant 0$, $f^0 \in L'$, являющееся ее следствием, является и следствием некоторой ее конечной подсистемы.

Теорема 10 ([44], теорема 7.5). *Полиэдрально (L, L')-замкнутая система совместна, если совместны все ее конечные подсистемы.*

Теорема 11 ([44], следствие 7.2). *Если система линейных неравенств* (2) *над R^n с ограниченным и замкнутым множеством векторов $(a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha n}, -a_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{J}$, устойчиво совместна (т. е. строго совместна), то она полиэдрально замкнута и, значит, финитно определена.*

Теория полиэдрально замкнутых систем позволила С. Н. Черникову [44] решить все основные вопросы, связанные с задачей линейного программирования при бесконечной полиэдрально замкнутой системе ограничений (1). Эту задачу назовем задачей полиэдральной оптимизации. В связи с ней положим

$$\sup\{f(x) \mid f_\alpha(x) - a_\alpha \leqslant 0, \quad \alpha \in \mathfrak{J}\} = \tilde{m}. \tag{13}$$

Здесь $\{f, f_\alpha, \alpha \in \mathfrak{J}\} \subset L^*(P)$. Следует отметить, что практически любая задача выпуклого программирования может быть сведена к задаче вида (13). В связи с задачей полиэдральной оптимизации следует отметить прежде всего следующее утверждение (см. [44], теорема 7.13).

Теорема 12. *Пусть совместная система $f_\alpha(x) - a_\alpha \leqslant 0$, $\alpha \in \mathfrak{J}$, полиэдрально замкнута и $\tilde{m} < +\infty$ для некоторой линейной функции $f(x)$. Тогда существует такая ее конечная подсистема $f_{\alpha_k}(x) - a_{\alpha_k} \leqslant 0$, $k = 1, \ldots, r$, ранга r, для которой*

$$\sup\{f(x) \mid f_{\alpha_k}(x) - a_{\alpha_k} \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, r\} = \tilde{m},$$

и на множестве решений которой $\tilde{m}$ достигается. Если, кроме того, выделенная подсистема не имеет собственных подсистем с такими же свойствами и значение $\tilde{m}$ на множестве решений исходной системы достигается, то множество оптимальных векторов рассматриваемой задачи полиэдральной оптимизации совпадает с

$$\{x \mid f_{\alpha_k}(x) - a_{\alpha_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, r, f_\alpha(x) - a_\alpha \leqslant 0, \quad \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}.$$

Задаче полиэдральной оптимизации может быть поставлена в соответствие следующая задача, называемая двойственной по отношению к исходной. Найти

$$\min\{\sum_{\alpha \in I} u_\alpha a_\alpha \mid f(x) = \sum_{\alpha \in I} u_\alpha f_\alpha(x), u_\alpha \geqslant 0, \alpha \in I \subset \mathfrak{J}\} = m, \tag{14}$$

где I — произвольное конечное подмножество множества индексов $\mathfrak{J}$ системы (1), обеспечивающее разрешимость уравнения $f(x) = \sum_{\alpha \in I} u_\alpha f_\alpha(x)$ в неотрицательных u_α. Отметим, что в задаче (14) множество I является переменным множеством.

Справедливо следующее предложение (см. [44], теорема 7.15).

Теорема 13 (теорема двойственности). *Если в задаче полиэдральной оптимизации, рассматриваемой в теореме 12, оптимальное значение $\tilde{m}$ конечно, то ей двойственная задача разрешима и при* *этом $\tilde{m} = m$. И наоборот, если задача, двойственная задаче полиэдральной оптимизации, разрешима, и $\tilde{m}$ — ее оптимальное значение, то разрешима и исходная задача, причем $m = \tilde{m}$.*

Приведенные выше теоремы и свойства, относящиеся к полиэдрально замкнутым системам, находят важные приложения. Приведем здесь некоторые примеры приложения такого рода.

Пример 1. Задача наилучшего равномерного приближения непрерывной на компакте $C \subset R^n$ функции $g(x)$ обобщенными многочленами $\Phi(x, u) = \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x)$ по системе непрерывных на C функций $g_j(x)$ — это задача, имеющая целью найти

$$\min_{u \in R^m} \max_{x \in C} |g(x) - \Phi(x, u)|.$$

Эта задача эквивалентна следующей: найти $\min u_0$ при ограничениях

$$g(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x) \leqslant u_0, \; -g(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x) \leqslant u_0, \quad x \in C. \tag{15}$$

Система линейных неравенств относительно $(u_0, u_1, \ldots, u_m) \in R^{m+1}$ будет финитно определенной (и, значит, полиэдрально замкнутой), следовательно, сформулированная задача эквивалентна задаче полиэдральной оптимизации при ограничениях (15). Теоремы 11 и 12 позволяют легко провести анализ рассматриваемой задачи, например, в случае, когда функции $g(x)$, $g_j(x)$ определены на отрезке $[x_0, x_1]$, а $\{g_j(x),\ j = 1, \ldots, m\}$ — система Чебышева.

Пример 2. Двойственность в выпуклом программировании. Задача выпуклого программирования — это задача нахождения $\inf \{g_0(x) \mid g_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \in C \subset L(R)\}$. Здесь $\{g_j(x),\ j = 0, 1, \ldots, m\}$ — определенные на $L(R)$ выпуклые функции, и C — не пустое выпуклое множество. Этой задаче могут быть поставлены в соответствие задачи нахождения $\inf_{x \in C} \sup_{u \leqslant 0} F(x, u)$ (эквивалент исходной задачи) и $\sup_{u \leqslant 0} \inf_{x \in C} F(x, u)$; $\left(\text{здесь } F(x, u) = g_0(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x),\ u = (u_1, \ldots, u_m) \leqslant 0 \text{ означает } u_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\right)$. Последняя называется обобщенно двойственной рассматриваемой задаче. Взаимные свойства этих двух задач существенно зависят от предположения о полиэдральной замкнутости линейной относительно $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ системы неравенств

$$u_0 + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x) \leqslant g_0(x), \quad x \in C. \tag{16}$$

Если, например, [50], система (16) полиэдрально замкнута и существует такой вектор $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m) < 0$ (т. е. $\bar{u}_i < 0,\ i = 1, \ldots, m$), что $\inf_{x \in C} F(x, u) > -\infty$, то исходная задача разрешима в некоторой точке x_0 и при этом

$$\inf_{x \in C} \sup_{u \leqslant 0} F(x, u) = \sup_{u \leqslant 0} \inf_{x \in C} F(x, u) = g_0(x_0). \tag{17}$$

Отметим, что если $L(R) = R^n$ и C — компакт, то система (16) полиэдрально замкнута.

4. Дальнейшее развитие результатов. Область применений аппарата линейных неравенств чрезвычайно широка. Наравне с системами линейных уравнений системы линейных неравенств и модели оптимизации при такого рода ограничениях стали важной составной частью вычислительной и прикладной математики. Принципы и результаты теории линейных неравенств по существу легли в основу новой математической дисциплины — выпуклого анализа [51, 57].

Исследования С. Н. Черникова были продолжены его учениками (Г. Н. Нефедьев [13], Н. В. Черникова [52, 53], И. И. Еремин, В. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев [54—57] и др.).

В монографиях [54—57] дано дальнейшее развитие тех вопросов математического программирования, в которых использование аппарата систем линейных неравенств играет принципиальную роль. Причем это касается не только теоретических вопросов, но и прикладных (конечномерная линейная аппроксимация нелинейных задач оптимизации, фейеровские процессы для задач линейного и выпуклого программирования, комитетные конструкции в распознавании образов и др.).

Остановимся на развитии идей полиэдральной оптимизации [58—69]. Исследования полиэдральной оптимизации явились начальным этапом в рассмотрении задачи (13) в общем случае. В настоящее время за последними закрепилось название задачи полубесконечного программирования (ПЛП). Начиная с 1981 г. были проведены три международных конференции специально по теории и приложениям задач ПЛП [58]. К таким задачам редуцируются, помимо указанных выше, проблема моментов [59], задача пластичности [60], задачи приближения функций. В новейших исследованиях класс полиэдральных систем продолжает играть важную роль при построении вычислительных процедур. Это объясняется тем, что они допускают простую и эффективную аппроксимацию по числу ограничений.

Выпишем задачу выпуклого программирования (ВП) над R^n

$$C : \inf \{f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, x \in M\} = v.$$

Здесь $f_i(x)$ — выпуклые функции, $M \subset R^n$ — выпуклое множество.

Традиционной схемой погружения задачи C в класс ПЛП является линеаризация по принципу «обкатки», т. е. переход к задаче ПЛП вида

$$L(C) : \inf \{(a_0, x) = f_0(x) \mid (h_j, x - p) + f_j(p) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$h_j \in \partial f(p), p \in R^n\}.$$

Здесь для простоты предполагается, что $M = R^n$, $f_0(x) = (a_0, x)$. Для регулярной задачи C (т. е. задачи, для которой выполнено некоторое условие регулярности, например условие Слейтера) задача $L(C)$, как правило, является полиэдральной. И потому условия оптимальности для них (в частности, теорема Куна-—Таккера) легко могут быть получены из свойства полиэдральности задачи $L(C)$. В общем случае $L(C)$ не принадлежит классу полиэдральных, но для нее применима теорема Фаркаша—Минковского в обобщенном виде (теорема 8). Высказывается точка зрения, что эта теорема не менее работоспособна в вопросах анализа условий оптимальности, чем теорема отделимости в выпуклом анализе. При этом сохраняется полная конструктивность линейных неравенств в названном анализе [54, 57, 60, 61, 68, 69]. Здесь уместно заметить, что условия полиэдральности задачи ПЛП (13) сформулированы С. Н. Черниковым еще в 1963 г. [29]. С учетом изучения нерегулярных задач C удобным оказалось переформулировать двойственную к C задачу

$$\sup_{u \geqslant 0} \inf_{M} \left\{f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x)\right\}$$

в виде

$$C_\infty^* : \sup \left\{u_0 \mid f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i \geqslant u_0, u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m; \quad \forall x \in M\right\} = v^*.$$

Здесь $x \in M$ — индекс линейного неравенства по $[u_0, u] \in R^{m+1}$ [54, 57]. В общем случае задача C_∞^* (например, в случаях разрыва в двойственности $v^* < v$ или неустойчивости C) также не является полиэдральной. В работе [63] показано, что задача C_∞^* всегда принадлежит классу квазифинитных задач, являющимися некоторым расширением полиэдрального класса. При этом задачи $L(C)$ в случае нерегулярности C выводят и за класс квазифинитных задач. Задача C_∞^* всегда позволяет сеточные подходы [67].

В связи с теоремой 10 представляет интерес следующий результат из [58, 65].

Пусть система (2) *несовместна, а все ее конечные подсистемы совместны. Тогда существует такой вектор* $a \in R^n$, *что для любого числа* α *найдется конечная подсистема из* (2), *для которой неравенство* $(a, x)+\alpha \leqslant 0$ *является ее следствием.*

Как известно, решение задачи конечномерного ЛП в силу теоремы двойственности сводится к решению конечной системы линейных неравенств. Такой аналогии для ПЛП нет (в силу отсутствия аналогии в двойственных соотношениях). Однако для полиэдральной задачи (13) имеет место аппроксимация ее по числу ограничений. В случае же не полиэдральных задач (например, при $v^* < v$ или неустойчивости) такая аппроксимация на имеет места. Для последних процедуры конечных аппроксимаций рассматриваются в работах [60, 61, 66, 67]. В работах [54, 57, 63] рассмотренная С. Н. Черниковым схема двойственности для ПЛП была перенесена на класс задач бесконечномерного ЛП, т. е. задач с бесконечным числом как переменных, так и ограничений.

Рассмотрим далее приложения аппарата систем линейных неравенств к задачам распознавания образов [70—75]. В настоящее время предложены, теоретически исследованы и активно используются в решении прикладных задач оптимизации и классификации различные виды комитетов (точнее, комитетных конструкций) с теми или иными логиками. А именно, кроме логики принятия решений по большинству голосов, используются логика старшинства, вето-комитеты и др. Алгоритмы нахождения минимальных комитетных конструкций существенно используют метод свертывания.

Решатели задач оптимизации, классификации и диагностики, основанные на программных реализациях комитетных конструкций, активно используются в решении нестационарных и противоречивых задач технико-экономического планирования и прогнозирования, медицинской диагностики и др.

Метод комитетов применялся в ряде задач диагностики и классификации сложных объектов, причем не только в задачах дискриминантного анализа, но и в таксономии, и при поиске информативных систем признаков, а также в некоторых задачах принятия решений, в задачах математического программирования.

Аппарат комитетных конструкций применялся, в частности, при решении таких практических задач распознавания образов: интерпретации геологических и геофизических данных, технической и медицинской диагностики, метеорологического и экологического прогнозирования, прогнозирования свойств смесей веществ, нахождения эмпирических зависимостей в социологии.

Конструкции p-комитетов применяются также в решении задач оптимизации с противоречивыми системами условий, с несогласованными совокупностями целевых функций.

51. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis.— New York : Princeton Univ. press., 1970.— 241 p.
52. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений систем линейных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1964.— **4**, № 4.— С. 733—737.
53. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Там же.— 1965.— **5**, № 2.— С. 334—337.
54. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М. : Наука, 1976.— 192 с.
55. *Еремин И. И., Мазуров В. Д.* Нестационарные процессы математического программирования.— М. : Наука, 1979.— 228 с.
56. *Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.— М. : Наука, 1983.— 336 с.
57. *Астафьев Н. Н.* Линейные неравенства и выпуклость.— М. : Наука, 1982.— 153 с.
58. *Semi-infinite* Programming and Application (An Intern. Sympos. Austin, Texas, September 8—10, 1981) / Ed. by A. V. Fiacco, K. O. Kortanek // Lecture Notes in Econom. Math. Systems.— 1981.— **215**.— 320 p.
59. *Gustafson S. A.* On the Computational Solution of a Class of Generalized Moment Problems// SIAM J. Numer. Anal.— 1970.— **7**, N 3.— P. 343—357.
60. *Kortanek K. O.* Semi-infinite programming duality and finite elements in plane stress plasticity // Util. math.— 1985.— **28**.— P. 219—232.
61. *Charnes A., Cooper W. W., Kortanek K. O.* On the theory of semi-infinite programming and

generalization of the Kuhn—Tucker saddle point theorem for arbitrary convex functions // Nav. Res. Log. Quart.— 1969.— **10**, N 1.— P. 41—52.
62. *Ky Fan*. On infinite systems of linear inequalities // J. Math. Anal. and Appl.— 1968.— **21**.— P. 475—478.
63. *Астафьев Н. Н*. Бесконечномерные задачи линейного программирования с разрывом в двойственности // Докл. АН СССР.— 1984.— **275**, № 5.— С. 1033—1036.
64. *Goberna M. A*., *Lopez M. A*., *Pastor J*. Farkas—Minkowski system in semi-infinite programming // Appl. Math. and Optim. 1981.— **7**, N 4.— P. 295—308.
65. *Blair C. E*. A note of infinite systems of liner inequalities in R^n // J. Math. Anal. and Appl.— 1974.— **48**, N 1.— P. 150—154.
66. *Korney D. F*. Duality gaps in semi-infinite linear programming — *An* approximation problem // Math. Program.— 1981.— **20**, N 2.— P. 129—143.
67. *Astafiev N. N*. On regularization of semi-infinite linear programming // Abstr. 1. 12th IFIP Conf. on System modelling and optimization.— Budapest, 1985.— P. 2—6.
68. *Duffin R. J*. Convex analysis treated by linear programming // Math. Program.— 1973.— **4**, N 2.— P. 125—143.
69. *Zlobec S*., *Ben-Israel A*. Duality in convex programming: A linearization approach // Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Optim.— 1979.— **10**, N 2.— P. 171—178.
70. *Мазуров Вл. Д*. Математические методы распознавания образов.— Свердловск : Урал. ун-т, 1982.— 83 с.
71. *Комитеты* в принятии решений / Вл. Д. Мазуров, В. С. Казанцев, Н. О. Сачков и др. // Кибернетика.— 1984.— № 1.— С. 90—96.
72. *Белецкий Н. Г*. Модели комитетных алгоритмов распознавания образов // Мат. методы планирования пром. пр-ва — Свердловск, УНЦ АН СССР , 1984.— С. 91—95.
73. *Кривоногов А. И*., *Мазуров Вл. Д*. Метод комитетов для задач оптимизации и диагностики технико-экономических систем.— Свердловск: ФТИ УНЦ АН СССР, 1985.— 42 с.
74. *Мазуров Вл. Д*. Линейная оптимизация и моделирование.— Свердловск : Урал. ун-т. 1986.— 69 с.
75. *Мазуров Вл. Д*., *Смирнов А. И*. Об алгебраическом подходе к восстановлению объектов по их изображениям // Автомат. системы обработки изображений.— М. : Наука, 1986.— С. 154.

Ин-т математики и механики
УНЦ АН СССР, Свердловск

Получено 28.07.87