УДК 519.41/47

Д. И. Зайцев

О прямых разложениях бесконечных абелевых групп с операторами

1. Пусть A — абелева группа, G — некоторая группа ее операторов (автоморфизмов), т. е. A — G-модуль, $0 < B < A$ — G-композиционный ряд A. Факторы этого ряда — простые G-модули. Выделим два следующих симметричных случая: 1) подмодуль B конечен, фактор A/B бесконечен; 2) подмодуль B бесконечен, фактор A/B конечен. Нетрудно заметить, что в обоих случаях A допускает прямое разложение: $A = B \oplus D$, где D — некоторая подгруппа из A. Естественно спросить, при каких условиях в качестве D можно взять G-допустимую подгруппу, т. е. G-подмодуль. Такая задача ранее рассматривалась в [1]. В настоящей работе исследуется более общая ситуация, а именно, в теореме 1 изучаются G-модули, обладающие конечным композиционным рядом, и находятся так называемые прямые $\mathcal{F}_H$-разложения их, отвечающие нормальной подгруппе H группы G, содержащейся в ее FC-центре. Как вытекает из следствий 1, 2 теоремы 2 для G-модулей каждого из двух выделенных выше случаев существуют требуемые прямые разложения, если группа G FC-гиперцентральная и, в частности, гиперциклическая. В то же время, если группа G локально сверхразрешима, то существование прямого разложения может быть доказано только для G-модуля первого вида (теорема 3, пример 3). Теоремы 2, 3 усиливают теоремы 1, 2 из [1].

Рассматривая G-модуль A, будем, как это принято, для обозначения операции в A использовать аддитивную запись, в G — мультипликативную, действие элементов группы G в A записывается умножением: ag, $a \in A$, $g \in G$. По аналогии с обозначением взаимного коммутанта подгруппу, порожденную в A всеми элементами $a(g-1)$, $a \in A$, $g \in G$, будем обозначать $[A, G]$, централизатор $C_A(G)$ группы G в A — это, как обычно, множество всех элементов из A, остающихся неподвижными при умножении на любой элемент из G. Модуль A называется G-тривиальным, если $A = C_A(G)$. Отметим, что если $N \lhd G$, то $C_A(N)$, $[A, N]$ — G-подмодули из A. Определение и свойства FC-центра и FC-гиперцентральной группы см. в [2] (гл. 4).

2. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Композиционный фактор G-модуля A назовем *H-конечным*, если H индуцирует в нем конечную группу автоморфизмов, и *H-бесконечным* в противном случае. В частности (при $H = G$), композиционный фактор G-модуля A тогда и только тогда конечен, когда он G-конечен.

Теорема 1. *Пусть A — G-модуль, обладающий конечным композиционным рядом, H — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в FC-центре группы G. Тогда модуль A обладает таким прямым разложением $A = \mathfrak{F}_H(A) \oplus \mathfrak{F}^*_H(A)$, в котором $\mathfrak{F}_H(A)$ — подмодуль, каждый G-композиционный фактор которого H-конечен, а $\mathfrak{F}^*_H(A)$ — подмодуль, каждый G-композиционный фактор которого H-бесконечен. Это прямое разложение единственно, будем называть его $\mathfrak{F}_H$-разложением модуля A.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для модуля A с длиной композиционного ряда равной двум. Пусть $0 < B < A$ — композиционный ряд A. Могут представиться два симметричных случая (подобных тем, о которых упоминалось в п. 1):

1) группа $H/C_H(B)$ конечна, группа $H/C_H(A/B)$ бесконечна;

2) группа $H/C_H(B)$ бесконечна, группа $H/C_H(A/B)$ конечна. Другими словами, в случае 1 подмодуль B H-конечен, фактор A/B H-бесконечен, а в случае 2 наоборот. Покажем, что B прямо дополняем в A некоторым подмодулем.

Рассмотрим первый из выделенных случаев. Будем считать, что G точно действует в A, т. е. $C_G(A) = 1$. Положим $H_1 = C_H(B)$. Так как индекс $|H:H_1|$ конечен и группа $H/C_H(A/B)$ бесконечна то $H_1 \not\leq C_H(A/B)$. Возьмем в множестве $H_1 \setminus C_H(A/B)$ некоторый элемент x и введем обозначение $G_1 = C_G(x^G)$. Поскольку $H \leqslant FC(G)$, то класс сопряженных элементов x^G конечен и, значит, G_1 — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Ввиду простоты G-модуля A/B он разлагается, как вытекает из результатов работы [3], в прямую сумму конечного множества простых G-подмодулей: $A/B = \bigoplus_i A_i/B$, среди которых в силу соотношения $x \notin C_H(A/B)$ можно найти такой A_k/B, в котором x действует нетривиально. Тогда $A_k(x-1) \nleqslant B$, а так как A_k/B — простой G_1-модуль и $B \leqslant C_{A_k}(x) \neq A_k$, то должно выполняться соотношение $B = C_{A_k}(x)$. Изоморфизм G_1-модулей $A_k/B = A_k/C_{A_k}(x) \simeq A_k(x-1)$ влечет простоту G_1-модуля $A_k(x-1)$; обозначим через M G-подмодуль, порожденный им в A. Поскольку $A = B + M$ и M разлагается в прямую сумму простых G_1-подмодулей, то $A = B \oplus N$ для некоторого G_1-подмодуля N из M. Отсюда, учитывая, что элементы подгруппы $H_1 \cap G_1$ тривиально действуют в B, получаем соотношение $[A, H_1 \cap G_1] \leqslant N$, означающее, что $B \cap [A, H_1 \cap G_1] = 0$.

Осталось пояснить, почему G-модуль $[A, H_1 \cap G_1]$ должен быть ненулевым. Если он равен нулю, то ввиду точности действия G в A подгруппа $H_1 \cap G_1$ единичная, откуда с учетом конечности индексов $|G:G_1|$, $|H:H_1|$ вытекает конечность подгруппы H, а это, разумеется, противоречит предположению о подгруппе H (ее фактор-группа $H/C_H(A/B)$ бесконечна). Таким образом, $[A, H_1 \cap G_1] \neq 0$ и поскольку A/B — простой G-модуль, то $[A, H_1 \cap G_1]$ служит для B прямым дополнением в A.

Рассмотрим второй из выделенных выше случаев; по-прежнему считаем, что G действует в A точно. Положим $H_1 = C_H(A/B)$. Так как индекс $|H:H_1|$ конечен и группа $H/C_H(B)$ бесконечна, что $H_1 \nleqslant C_H(B)$. Возьмем в множестве $H_1 \setminus C_H(B)$ некоторый элемент x и введем обозначения $K = \langle x^G \rangle$, $G_1 = C_G(K)$. Подгруппа G_1 является нормальной подгруппой конечного индекса группы G и потому из результатов работы [3] вытекает, что модуль A обладает конечным G_1-композиционным рядом. Следовательно, в A можно найти наименьший по вложению G_1-подмодуль A_1, удовлетворяющий условию $A_1 \nleqslant B$.

Если для любого элемента $y \in K$ имеет место соотношение $C_{A_1}(y) \nleqslant B$, то ввиду выбора G_1-подмодуля A_1 его G_1 подмодуль $C_{A_1}(y)$ совпадает с A_1 для любого $y \in K$ и потому $C_{A_1}(K) = A_1$. Значит, $C_A(K) \nleqslant B$ и тогда в силу простоты G-модуля A/B приходим к разложению $A = B + C_A(K)$. В действительности это разложение является прямым, так как в противном случае простота G-модуля B влечет соотношение $B \leqslant C_A(K)$, означающее, что $A = C_A(K)$, $K \leqslant C_G(A)$, а поскольку G действует в A точно, то $K = 1$. Противоречие.

Пусть теперь реализуется вторая возможность: в K существует такой элемент y, что $C_{A_1}(y) \leqslant B$. Тогда, так как $A_1(y-1) \leqslant B$ и естественный G_1-изоморфизм $A_1/C_{A_1}(y) \simeq A_1(y-1)$ индуцирует G_1-изоморфизм $A_1/B \simeq A_1(y-1)/B(y-1)$, то $A_1(y-1)/B(y-1)$ есть ненулевой G_1-фактор подмодуля B, причем в этом факторе, так же как и в факторе A_1/B, элементы пересечения $H_1 \cap G_1$ действуют тривиально. Поскольку B — простой G-подмодуль и индекс $|G:G_1|$ конечен, то B, а следовательно, и $A_1(y-1)$ разлагаются в прямую сумму конечного числа простых G_1-подмодулей. Отсюда вытекает существование прямого разложения $A_1(y-1) = B(y-1) \oplus D$, где D — некоторый G_1-подмодуль. При этом $(H_1 \cap G_1)$-тривиальность фактора $A_1(y-1)/B(y-1)$ влечет $(H_1 \cap G_1)$-тривиальность G_1-подмодуля D, т. е. $D \leqslant C_B(H_1 \cap G_1)$. Поэтому, в частности, $C_B(H_1 \cap G_1) \neq 0$, откуда ввиду простоты G-подмодуля B и соотношения $H_1 \cap G_1 \lhd G$ явствует, что $B = C_B(H_1 \cap G_1)$, $H_1 \cap G_1 \leqslant C_H(B)$. Таким образом, подгруппа $H_1 \cap G_1$ конечного индекса группы H входит в централизатор $C_H(B)$ и, значит, H индуцирует в B конечную группу автоморфизмов вопреки предположению о подгруппе H в рассматриваемом втором случае. Итак, утверждение леммы доказано для модулей с длиной композиционного ряда, равной двум.

Доказательство леммы в общем случае использует индукцию по длине композиционного ряда модуля A. Пусть B — максимальный подмодуль из A и $B = V \oplus W$ — его $\mathfrak{F}_H$-разложение, $V = \mathfrak{F}_H(B)$, $W = \mathfrak{F}^*_H(B)$. Предположим, например, что A/B — H-конечный фактор. Тогда, если $W = 0$, то $A = \mathfrak{F}_H(A)$, $\mathfrak{F}_H^*(A) = 0$. Если же $W \neq 0$ и W_1 — некоторый максимальный подмодуль из W, то фактор-модуль $A/V \oplus W_1$ имеет композиционный ряд длины 2 и по доказанному выше его H-бесконечный подмодуль $B/V \oplus W_1$ прямо дополняем в нем некоторым H-конечным подмодулем $D/V \oplus W_1$. По соображениям индукции D обладает $\mathfrak{F}_H$-разложением, причем $V < \mathfrak{F}_H(D)$, $W_1 = \mathfrak{F}_H^*(D)$, поэтому $A = \mathfrak{F}_H(D) \oplus W$ — $\mathfrak{F}_H$-разложение модуля A. Изучение той ситуации, когда A/B — H-бесконечный фактор, проводится аналогично. Единственность $\mathfrak{F}_H$-разложения — следствие основных теорем об изоморфизмах для абелевых групп с операторами. Теорема доказана.

Теорема 1 существенно используется в доказательстве следующей теоремы 2, относящейся к модулям более общего вида, чем модули, удовлетворяющие условиям случаев 1, 2, о которых шла речь в п. 1.

Теорема 2. *Пусть A — G-модуль, обладающий конечным композиционным рядом, только один из факторов которого бесконечен. Если FC-центр группы G бесконечен и G точно действует в A, то A разлагается в прямую сумму конечного и бесконечного простого подмодулей.*

Доказательство. По условию теоремы A обладает рядом подмодулей $0 \leqslant B < D \leqslant A$, в котором два крайних фактора конечны (в частности, они могут быть нулевыми), а средний фактор D/B — это бесконечный простой G-модуль. Обозначим через H FC-центр группы G и рассмотрим его подгруппу $H_1 = C_H(D/B)$. Выберем в H_1 произвольную конечно порожденную подгруппу K, нормальную в G. Каждый элемент $x \in K$ тривиально действует в факторе D/B, поэтому $D(x-1) \leqslant B$ и, значит, $D(x-1)$ — конечная группа. Ввиду изоморфизма групп $D/C_D(x) \simeq D(x-1)$, связанного с элементом x, группа $D/C_D(x)$ также конечна. Если $x_1, \dots, x_n$ — конечное множество порождающих подгруппы K, то конечность групп $D/C_D(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, влечет конечность группы $D/C_D(K)$, поскольку $C_D(K) = \bigcap_{i=1}^{n} C_D(x_i)$. Отсюда следует конечность G-модуля $A/C_A(K)$.

Далее, в фактор-модуле $\bar{A} = A/B$ выполняется соотношение $\bar{D} \leqslant C_{\bar{A}}(x_i)$, поэтому группа $\bar{A}/C_{\bar{A}}(x_i)$ конечна и, значит, ввиду изоморфизма $\bar{A}/C_{\bar{A}}(x_i) \simeq \simeq \bar{A}(x_i - 1)$ конечна также группа $\bar{A}(x_i - 1)$, а потому и группа $A(x_i - 1)$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} A(x_i - 1) = [A, K]$ — конечная группа. Таким образом, доказана конечность G-модулей $A/C_A(K)$, $[A, K]$, где K — произвольная конечнопорожденная подгруппа, нормальная в G и входящая в H_1. Подгруппа H_1 является объединением подгрупп такого рода, так как $H_1 \lhd G$, $H_1 \leqslant \leqslant H = FC(G)$, поэтому с учетом конечности G-композиционного ряда модуля A приходим к выводу: подгруппу K можно выбрать так, чтобы $C_A(K) = C_A(H_1)$, $[A, K] = [A, H_1]$ и потому G-модули $A/C_A(H_1)$, $[A, H_1]$ конечны.

Каждому элементу $y \in H_1$ соответствует гомоморфизм группы $A/C_A(H_1)$ в группу $[A, H_1]$, индуцируемый умножением на $y - 1$, причем ввиду точности действия G в A различным элементам из H_1 соответствуют различные гомоморфизмы. Так как группы $A/C_A(H_1)$, $[A, H_1]$ по доказанному конечны, то отсюда вытекает конечность подгруппы H_1. Далее, FC-центр H группы G индуцирует в факторе D/B группу автоморфизмов, изоморфную $H/C_H(D/B) = H/H_1$, следовательно, эта группа автоморфизмов, как и подгруппа H, должна быть бесконечной. Поэтому, применяя к G-модулю A и подгруппе H группы G теорему 1, получаем требуемое прямое разложение модуля A (F_H-разложение). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если A — G-модуль с конечным композиционным рядом и группа G FC-гиперцентральна, то A разлагается в прямую сумму $A = \mathfrak{F}(A) \oplus \mathfrak{F}^*(A)$ конечного подмодуля $\mathfrak{F}(A)$ и подмодуля $F^*(A)$, не имеющего конечных G-композиционных факторов.*

Это прямое разложение называется $\mathfrak{F}$-разложением модуля A [4], *оно совпадает с $\mathfrak{F}_G$-разложением* (*см. теорему* 1).

Следствие доказывается с помощью индукции по длине композиционного ряда модуля A с использованием построений, аналогичных тем, которые были проведены в последней части доказательства теоремы 1. При этом нужно применить теорему 2 и учесть такое простое замечание: FC-центр бесконечной FC-гиперцентральной группы также бесконечен.

Следствие 2. *Модуль над гиперциклической группой, имеющий конечный композиционный ряд, обладает $\mathfrak{F}$-разложением.*

Можно показать, что теорема 2 верна, если условие бесконечности FC-центра группы G заменить более слабым, а именно, предположить, что ее FC-центр либо бесконечен, либо конечен и имеет достаточно большой порядок. В то же время теорема 2 не верна, если известно только, что FC-центр группы G отличен от единицы. В этом убеждаемся на примере $G \times \langle\alpha\rangle$-модуля A, где G-модуль A взят из первой части приведенного ниже примера 1, $\alpha : a \to 2a$, $a \in A$, $p > 2$.

Теорема 3. *Пусть A — G-модуль, обладающий конечным композиционным рядом, G — локально сверхразрешимая группа. Тогда в A существует G-подмодуль B, не имеющий конечных G-композиционных факторов, индекс которого в A конечен.*

Доказательство с помощью индукции по длине композиционного ряда модуля A сводится к изучению следующей ситуации: A обладает конечным подмодулем D, фактор по которому является бесконечным простым G-модулем; требуется установить, что D прямо дополняем в A некоторым подмодулем.

Докажем сначала это утверждение при дополнительном ограничении: элементы группы G тривиально действуют в D, т. е. $D \leqslant C_A(G)$. Выберем в A такой подмодуль A_0, что $A = D + A_0$ и пересечение $D_0 = D \cap A_0$ имеет наименьший возможный порядок. Пусть $D_0 \neq 0$, $p \in \pi(D_0)$, $H = G^{p-1}G'$. Справедливо соотношение

$$[A_0, H] \not\leqslant D_0. \tag{1}$$

Действительно, в противном случае элементы группы H тривиально действуют в факторе A_0/D_0, $H \leqslant C_G(A_0/D_0)$ и поэтому группа $\overline{G} = G/C_G(A_0/D_0)$ абелева и ее период делит $p - 1$. Так как A_0/D_0 — простой $\overline{G}$-модуль, то аддитивная группа A_0/D_0 должна быть элементарной абелевой [5], и вследствие этого $\overline{G}$ — локально циклическая группа. Значит, группа $\overline{G}$ конечна и тогда конечным оказывается фактор A_0/D_0, но это противоречит предположению о нем и тем самым соотношение (1) доказано.

Из (1) вытекает, что в модуле A_0 и в группе H можно найти такие элементы $a \in A_0 \setminus D_0$, $h \in H$, что $a(h-1) \notin D_0$. Положим $a_0 = a(h-1)$. Так как A_0/D_0 — простой G-модуль, то G-подмодуль $\langle a_0 G\rangle$, порожденный элементом a_0, удовлетворяет соотношению $A_0 = D_0 + \langle a_0 G\rangle$ и, значит, $A = \langle a_0 G\rangle$ в силу выбора подмодуля A_0. Следовательно, в группе G существует конечнопорожденная подгруппа K, для которой выполняются условия:

$$h \in K^{p-1}K', \quad a_0 \in A_1, \quad D_0 \leqslant A_1, \quad A_1 = \langle a_0 K\rangle. \tag{2}$$

Воспользуемся теперь теоремой о финитной аппроксимируемости конечнопорожденного расширения абелевой группы с помощью нильпотентной [6]. Как известно, конечнопорожденная сверхразрешимая группа является конечным расширением нильпотентной группы, значит, из этой теоремы следует утверждение о финитной аппроксимируемости конечнопорожденного расширения абелевой группы с помощью сверхразрешимой группы. Так как группа K конечнопорождена и сверхразрешима, то из последнего утверждения вытекает, что K-модуль $A_1 = \langle a_0 K\rangle$, порожденный элементом a_0, обладает K-подмодулем V, удовлетворяющим условиям: $D_0 \cap V = 0$, $|A_1 : V| < \infty$. Рассмотрим конечный K-модуль $\tilde{A}_1 = A_1/V$. Он обладает так называемым C-разложением, т. е. прямым разложением $\tilde{A}_1 = \tilde{C} \oplus \tilde{C}^*$, где $\tilde{C}$ — подмодуль, каждый K-композиционный фактор которого является циклической группой, а $\tilde{C}^*$ — подмодуль, каждый K-композиционный фактор которого является нециклической группой ([7], лемма 2, [8], лемма 2.2). Так как элементы группы G тривиально действуют в D, то элементы группы

K тривиально действуют в D_0, значит, $\tilde{D}_0 \leqslant \tilde{C}$. Отсюда с учетом соотношений $\tilde{D}_0 = D_0 \oplus V/V$, $p \in \pi(D_0)$ вытекает, что $p \in \pi(\tilde{C})$ и поэтому K-подмодуль $\tilde{A}_1$ обладает K-подмодулем $\tilde{W} = W/V$ индекса p. K-фактор A_1/W является циклической группой порядка p и, следовательно, $K^{p-1}K' \leqslant C_K(A_1/W)$. Из этого соотношения с учетом (2) получаем $A_1(h-1) \leqslant W$, $a_0 = a(h-1) \in W$ и, далее, $A_1 = \langle a_0 K \rangle \leqslant WK = W$, $A_1 = W$, а это противоречит тому, что $|A_1/W| = p$. Таким образом, соотношение $D_0 \neq 0$ невозможно, значит, $D_0 = D \cap A_0 = 0$, $A = D \oplus A_0$.

Рассмотрим теперь общий случай: элементы группы G действуют в подмодуле D не обязательно тривиально. Положим $G_1 = C_G(D)$. Подгруппа G_1 нормальна в G и имеет конечный индекс, поэтому с помощью результатов работы [3] получаем, что модуль A/D разлагается в прямую сумму конечного множества бесконечных простых G_1-подмодулей. Если A_1/D — одно из таких слагаемых, то G_1-модуль A_1 удовлетворяет условиям изученного выше частного случая и, следовательно, в соответствии с доказанным $A_1 = D \oplus V$, где V — некоторый бесконечный простой G_1-подмодуль. Порожденный им G-подмодуль W является суммой $W = \langle VG \rangle = Vg_1 + \ldots + Vg_n$ бесконечных простых G_1-подмодулей Vg_i, где $g_1, \ldots, g_n$ — множество представителей смежных классов разложения G по G_1. Значит, W не может иметь отличных от нуля конечных G_1-подмодулей и потому $D \cap W = 0$, $A = D \oplus W$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что G-модуль A, относящийся к первому виду модулей, выделенных в п. 1, обладает прямым разложением, если группа G локально сверхразрешима. Для модулей второго вида аналогичное утверждение не верно (см. пример 3), именно это и является препятствием для доказательства существования $\mathfrak{F}$-разложения модуля в теореме 3.

Одним из естественных обобщений локально сверхразрешимых групп являются группы, изучавшиеся в [9],— локально полициклические группы, ранги главных факторов всех конечнопорожденных подгрупп которых не превышают некоторой константы. Представляет определенный интерес выяснить — верна ли теорема 3, если G — группа такого вида.

3. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих доказанные теоремы.

Пример 1. Пусть A — счетная элементарная абелева p-группа, p — простое число. Представим A в виде объединения конечных подгрупп: $A_1 < A_2 < \ldots < A_k < \ldots$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$, и обозначим через G_k подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, A$, состоящую из всех таких автоморфизмов, которые оставляют A_1, A_k на месте и действуют тождественно в факторе A/A_k. Тогда G_k — конечное расширение элементарной абелевой p-группы, $G_1 < G_2 < \ldots < G_k < \ldots$ и объединение $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ — локально конечная группа. Нетрудно доказать, что конечная G-допустимая подгруппа A_1 не имеет в A прямого G-допустимого дополнения и ряд $0 < A_1 < A$ является G-композиционным. Таким образом, G-модуль A — это модуль первого вида.

Модуль второго вида можно построить двойственным способом. Именно, нужно взять в A некоторую убывающую последовательность подгрупп конечного индекса $A > A_1 > \ldots > A_k > \ldots$ с тривиальным пересечением и в качестве G_k взять подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, A$, состоящую из всех таких автоморфизмов, которые оставляют на месте A_1 и действуют тождественно в A_k. Тогда $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ — локально конечная группа и $0 < A_1 < A$ есть G-композиционный ряд A, причем A_1 не имеет в A прямого G-допустимого дополнения.

Строение группы G для каждого из найденных двух видов G-модулей малообозримо, в частности, группа G неразрешима. Следующие примеры 2, 3 — это примеры G-модулей первого и второго видов соответственно. Здесь уже в качестве G берутся двуступенно разрешимые группы, причем в примере 3 G может быть выбрана к тому же q-группой, q —

простое число. Конструкции, использованные в примерах 2, 3, являются обобщением соответствующих конструкций из [1, 10].

Пример 2. Пусть G — полупрямое произведение бесконечной элементарной абелевой p-группы F и некоторой группы H, действующей в F неприводимо. Можно считать, что F — векторное пространство над полем F_0 простого порядка p, сопряжение элементов из F посредством элементов из H обозначать умножением au, а группу G рассматривать как множество пар $G = (F, H)$ с операцией умножения: $(a, u)(b, v) = (a + bu^{-1}, uv)$; $a, b \in F$, $u, v \in H$.

Предположим далее, что задана ненулевая билинейная форма $f: F \times F \to F_0$, причем она H-допустима, т. е. $f(a, b) = f(au, bu)$ для всех $a, b \in F$, $u \in H$. Положим $A = F_0 \oplus F$ и определим умножение элементов пространства F на элементы группы G по правилу $(a_0 \oplus a)(b, u) = (a_0 + f(a, b)) \oplus au$; $a_0 \in F_0$, $a, b \in F$, $u \in H$. Тогда, как показано в [1], A превращается в G-модуль и при этом $B = F_0 \oplus 0$ — G-подмодуль из A, фактор A/B является G-простым и B не дополняем в A подмодулем. Таким образом, для построения примера модуля необходимо уметь задавать форму f, связанную с пространством F и группой H.

Опишем один из способов задания формы f. Выберем два таких различных простых числа p, q_1, что q_1 не делит $p^k - 1$ при $1 \leqslant k < q_1 - 1$ (как известно, q_1 делит $p^{q_1-1} - 1$). При этих условиях многочлен $\varphi(x) = 1 + x + \ldots + x^{q_1-1}$ неразложим в кольце $F_0[x]$. Пусть $F_1 = F_0[u_1]$ — поле, полученное из F_0 с помощью присоединения некоторого корня u_1 многочлена $\varphi(x)$. Возьмем простое число q_2 таким, чтобы многочлен $x^{q_2} - u_1$ был неразложим в кольце $F_1[x]$. Условия неразложимости такого многочлена известны [11], (глава VIII, §9), можно положить, например, $q_2 = q_1$ или взять q_2 достаточно большим. Присоединяя к F_1 корень u_2 многочлена $x^{q_2} - u_1$, получаем поле $F_2 = F_1(u_2)$. Затем берем такое простое число q_3, чтобы многочлен $x^{q_3} - u_2$ был неразложим в $F_2[x]$, и, присоединяя к F_2 корень u_3 этого многочлена, получаем поле $F_3 = F_2(u_3)$, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, приходим к возрастающей последовательности конечных полей $F_0 < F_1 < \ldots < F_k < F_{k+1} < \ldots$, получаем последовательным присоединением корней u_{k+1} многочленов $x^{q_{k+1}} - u_k$, $F_{k+1} = F_k(u_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим через F объединение полей F_k, а через H — подгруппу мультипликативной группы поля F, порожденную элементами $u_1, u_2, u_3, \ldots$, причем $u_1^{q_1} = 1$, $u_2^{q_2} = u_1$, $u_3^{q_3} = u_2, \ldots$

Положим $T = \{u_2^{i_2} u_3^{i_3} \ldots u_k^{i_k} \mid 0 \leqslant i_j \leqslant q_j - 1;\ 2 \leqslant j \leqslant k;\ k = 2, 3, \ldots\}$. Ввиду неразложимости многочленов $\varphi(x)$, $x^{q_{k+1}} - u_k$ в $F_0[x]$, $F_k[x]$ соответственно базисом пространства F над полем F_0 является множество $S = T \cup Tu_1 \cup \ldots \cup Tu_1^{q_1-2}$. Определим сначала значения формы f на $S \times S$. Для этого возьмем в F_0 некоторый элемент $d \neq 0$ и будем считать, что для любых $a, b \in S$, $f(a, b) = d^i$, если $a^{-1}b = u_1^i$, $0 \leqslant i \leqslant q_1 - 2$, и $f(a, b) = 0$, если $a^{-1}b \notin \langle u_1 \rangle$. Для любых $a, b \in F$ значения $f(a, b)$ определяются с учетом линейности формы по обоим аргументам. Тогда, так как $H = S \cup Tu_1^{q_1-1}$, $u_1^{q_1-1} = -(1 + u_1 + \ldots + u_1^{q_1-2})$, значения f на $H \times H$ удовлетворяют следующим условиям: для любых $a, b \in H$

$$f(a, b) = \begin{cases} d^i, \text{ если } a^{-1}b = u_1^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant q_1 - 2, \\ d^{q_1-1} - \varphi(d) = -(1 + d + \ldots + d^{q_1-2}), \text{ если } a^{-1}b = u_1^{q_1-1}, \\ 0, \text{ если } a^{-1}b \notin \langle u_1 \rangle. \end{cases}$$

Отсюда ввиду соотношения $(au)^{-1}(bu) = a^{-1}b$, $u \in H$, вытекает, что на $H \times H$ форма f является H-допустимой, а значит, f H-допустима и на $F \times F$. Осталось заметить, что группа H действует (посредством умножения) неприводимо на элементарной абелевой p-группе F.

В построенном примере группа H может быть как квазициклической, так и прямым произведением циклических групп различных простых порядков.

Пример 3. Пусть $S = BH$ — группа, разложимая в полупрямое произведение абелевой минимальной нормальной подгруппы B и некоторой подгруппы H, причем $C_B(H) = 1$. Возьмем произвольную бесконечную группу X и рассмотрим сплетение $W = S \wr X$. Обозначим через $\hat{S}$ базу этого сплетения. База $\hat{S}$ является прямым произведением $\hat{S} = \prod_{x \in X} S_x$ и действие X на $\hat{S}$ задается обычным способом: $s_x^y = s_{xy}$, $s \in S$, $x, y \in X$. Положим $\hat{B} = \prod_{x \in X} B_x$, $\hat{H} = \prod_{x \in X} H_x$.

Покажем, что $\hat{B}$ — минимальная нормальная подгруппа W. Действительно, если $\hat{c} \in \hat{B}$, $\hat{c} \neq 1$, то $\hat{c} = (c_1)_{x_1} \dots (c_n)_{x_n}$, где $c_i \in B$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем $c_1 \neq 1$ и все элементы x_i различны. Тогда для любого элемента $h \in H$ $[\hat{c}, h_{x_1}] = [c_1, h]_{x_1}$ и, значит, множество $[c_1, H]_{x_1}$ входит в подгруппу C, порожденную элементом $\hat{c}$ и всеми сопряженными с ним в группе W. Так как B — минимальная нормальная подгруппа группы $S = BH$ и $c_1 \neq 1$, то $[c_1, H]$ порождает B, следовательно, $B_{x_1} \leqslant C$. Сопрягая B_{x_1} элементами из X, видим, что $\hat{B} = C$.

Возьмем теперь в B произвольный элемент $b \neq 1$ и определим соответствующий ему автоморфизм β сплетения W так, чтобы β действовал на базе $\hat{S}$ покомпонентно, а на X тривиально:

$$[\beta, X] = 1, \quad s_x^{\beta} = (s^b)_x, \quad s \in S, \ x \in X. \tag{3}$$

Полупрямое произведение $V = W\langle\beta\rangle$ можно представить в виде $V = AG$, где $A = \hat{B} \times \langle\beta\rangle$, $G = \hat{H}X$, причем $A \lhd V$, $A \cap G = 1$.

Покажем, что подгруппа $\hat{B}$ не имеет в A прямого G-допустимого дополнения. Пусть $A = \hat{B} \times \langle\beta\hat{a}\rangle$, $\hat{a} \in \hat{B}$, $\langle\beta\hat{a}\rangle$ — G-допустимая подгруппа. В силу определения (3) автоморфизма β $A/\hat{B}$ — центральный фактор группы V, поэтому, в частности, $h_x^{\beta\hat{a}} = h_x$ для любых $h \in H$, $x \in X$. Если в последнем соотношении элемент $x \in X$ взять таким, чтобы компонента элемента $\hat{a}$ в множителе B_x произведения $\hat{B} = \prod_{x \in X} B_x$ была единичной (это можно сделать ввиду бесконечности подгруппы X), то $h_x^{\beta} = h_x^{\hat{a}^{-1}} = h_x$ и, значит, $h_x^{\beta} = (h^b)_x = h_x$, $h^b = h$ для любого $h \in H$. Следовательно, $b \in C_B(H)$, что противоречит предположению $C_B(H) = 1$.

Подгруппу A можно рассматривать как G-модуль, обладающий бесконечным простым подмодулем $\hat{B}$, при этом фактор-группа $A/\hat{B}$ циклическая и $\hat{B}$ не дополняем в A подмодулем. Если, например, в качестве $S = BH$ взять полупрямое произведение бесконечной элементарной абелевой минимальной нормальной p-подгруппы B и квазициклической q-подгруппы H, $q \neq p$ (такая группа уже встречалась в примере 2), и в качестве X — бесконечную абелеву q-группу, то A — будет элементарной p-группой, $G = \hat{H}X$ — двуступенно разрешимой q-группой. Иной пример G-модуля с недополняемым бесконечным простым подмодулем конечного индекса построен в [12, с. 5]; в этом примере G — неразрешимая локально конечная q-группа.

1. *Зайцев Д. И.* О существовании прямых дополнений в группах с операторами // Исслед. по теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 26—44.
2. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups.— Berlin : Springer, 1972.— V. 1.— 210 p.
3. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z.— 1970.— **114**, N 1.— P. 19—21.
4. *Зайцев Д. И.* Расщепляемые расширения абелевых групп // Строение групп и свойства их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 22—31.
5. *Baer R.* Irreducible groups of automorphisms of abelian groups // Pacif. J. Math.— 1964.— **14**, N 2.— P. 385—406.
6. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.— 1959.— **9**, N 36.— P. 595—622.
7. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 16—37.
8. *Tomkinson M. J.* Splitting theorems in abelian-by-hypercyclic groups // J. Austral. Math. Soc. A.— 1978.— **25**, N 1.— P. 71—91.
9. *Phillips R. E., Robinson D. J. S., Roseblade J. E.* Maximal subgroups and chief factors of certain generalized soluble groups // Pacif. J. Math.— 1971.— **37**, N 2.— P. 475—480.
10. *Зайцев Д. И.* О расщепляемости расширений абелевых групп // Исслед. групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 14—25.
11. *Ленг С.* Алгебра.— М. : Мир, 1968.— 564 с.
12. *Сысак Я. П.* Произведения бесконечных групп.— Киев, 1982.— 36 С.— (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 82.53).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.01.87