УДК 512.544

А. В. Изосов, Н. Ф. Сесекин

Группы с конечным числом бесконечных классов сопряженных подгрупп

Подгруппа H группы G называется почти нормальной, если она нормальна в некоторой подгруппе конечного индекса. Изучению строения групп по свойствам их почти нормальных подгрупп посвящено много работ. Так, Нейман [1] изучил группы, все собственные подгруппы которых почти нормальны. И. И. Еремин [2] получил аналогичный результат для групп, у которых почти нормальными являются все абелевы подгруппы. И. И. Еремин [3], С. Н. Черников [4], Я. Д. Половицкий [5] изучали группы, у которых почти нормальными являлись все бесконечные абелевы подгруппы. Н. Н. Семко, С. С. Левищенко, Л. А. Курдаченко [6] продолжают начатое в [3] изучение групп, все бесконечные подгруппы которых почти нормальны. Все эти группы можно рассматривать как группы, не содержащие тех или иных подгрупп, определяющих бесконечные классы сопряженных подгрупп. В данной работе изучаются группы, имеющие лишь конечное число бесконечных классов сопряженных подгрупп. В дальнейшем класс таких групп будем обозначать через $\mathfrak{X}$. Подмножество всех элементов группы G, каждый из которых имеет в G конечное множество сопряженных, будем называть FC-центром группы G и обозначать $FC(G)$. И. И. Еремин [2] показал, что в группе с конечными классами сопряженных элементов могут существовать подгруппы, определяющие бесконечные классы сопряженных с ними подгрупп (см. также [7, с. 109]). В связи с этим определенный интерес представляет доказанное в данной работе утверждение, что в группе G из $\mathfrak{X}$ всякая подгруппа FC-центра является почти нормальной. С помощью этого факта установлено, что если фактор-группа $G/FC(G)$ бесконечна, то $FC(G)$ является конечной группой. Если же группа G из $\mathfrak{X}$ конечна над $FC(G)$, то она включает в себя по модулю некоторой конечной подгруппы такую абелеву нормальную подгруппу A-свободную конечного ранга, что любой элемент, не содержащийся в A, действует на A рационально неприводимо. При этом G/A — циклическая группа простого порядка.

Введем следующие обозначения: $T(G)$ — периодическая часть группы G; $Z(G)$ — центр группы G; M^G — класс подмножеств сопряженных с подмножеством M группы G, в частности g^G — класс сопряженных с g элементов группы G.

Теорема 1. *В группе $G \in \mathfrak{X}$ каждая подгруппа из $FC(G)$ определяет конечный класс сопряженных с ней подгрупп группы G.*

Доказательство. Предположим сначала, что $|G:FC(G)| = \infty$. Построим ряд подгрупп следующим образом. Пусть h_1 — некоторый элемент из $FC(G)$ и $H_1 = C_G(h_1^G)$. Если в $FC(G)$ существует элемент h_2 такой, что $H_1 \neq H_1 \cap C_G(h_2^G)$, то положим $H_2 = H_1 \cap C_G(h_2^G)$ и т. д. Пусть уже построена подгруппа H_n. Тогда, если существует элемент $h_{n+1} \in FC(G)$ такой, что $H_n \neq H_n \cap C_G(h_{n+1}^G)$, то $H_{n+1} = H_n \cap C_G(h_{n+1}^G)$. Подгруппы H_i нормальны в G и имеют конечный индекс. Поскольку $FC(G)$-подгруппа бесконечного индекса в G, то для любого натурального n подгруппа $H_n \notin FC(G)$ и поэтому содержит элементы, имеющие бесконечное множество сопряженных. Теоретико-множественная разность $H_n \setminus H_{n+1}$ содержит элементы, не являющиеся FC-элементами. Отсюда следует, что H_{n+1} не содержит некоторого бесконечного класса сопряженных подгрупп группы G, содержащегося в H_n. Таким образом, в H_{n+1} число бесконечных классов сопряженных подгрупп группы G, содержащихся в H_{n+1}, строго меньше соответствующего числа для группы H_n. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то начиная с некоторого натурального номера k будем иметь $H_k = H_{k+1} = \dots$, т. е. $H_k \leqslant C_G(h)$ для любого $h \in FC(G)$. Следовательно, $H_k \leqslant C_G(FC(G))$ и поскольку $|G:H_k| < \infty$, то $|G:C_G(FC(G))| < \infty$. Центр группы $FC(G)$ является пересечением $FC(G)$ с $C_G(FC(G))$. Окончательно получаем $|FC(G):Z(FC(G))| < \infty$.

Пусть теперь $|G : FC(G)| < \infty$. Для удобства обозначим $FC(G)$ через K. Если в K содержится бесконечный класс сопряженных подгрупп группы G, то найдется такой элемент $h_1 \in K$, что $H_1 = C_K(h_1^G)$ не содержит подгрупп из этого класса. Действительно, если бы для любого $h \in K$ централизатор $C_K(h^G)$ содержал бы этот бесконечный класс, то его содержал бы и центр группы K. Но любая подгруппа центра $Z(K)$ почти нормальна в G и мы приходим к противоречию. Подгруппа H_1 имеет в G конечный индекс. Если H_1 содержит бесконечный класс сопряженных подгрупп группы G, то в K найдется такой элемент h_2, что $H_2 = H_1 \cap C_K(h_2^G)$ не содержит подгрупп рассматриваемого бесконечного класса. Продолжая этот процесс, ввиду того, что $G \in \mathfrak{X}$, через конечное число шагов построим подгруппу H_n, не содержащую бесконечных классов сопряженных подгрупп группы G. Причем эта подгруппа H_n имеет в G конечный индекс.

Если теперь $G_1 \leqslant K$ — подгруппа, определяющая в G бесконечный класс сопряженных подгрупп группы G, то $G_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} x_i (G_1 \cap H_n)$. Нормализатор $N_G(G_1 \cap H_n)$ имеет конечный индекс в G. Пересечение $N_G(G_1 \cap H_n) \cap \cap \left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} C_G(x_j)\right)$, где $x_j \in \{x_i\}_{i=1,\ldots,m}^G$, содержится в $N_G(G_1)$ и как пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса является подгруппой конечного индекса в G. Поэтому $N_G(G_1)$ имеет конечный индекс в G, что притиворечит выбору G_1.

Следствие 1. *Класс $\mathfrak{X}$ не пересекается с классом FC-групп.*

Следствие 2. *FC-центр группы G из $\mathfrak{X}$ является конечным расширением своего центра. При этом коммутант FC-центра конечен.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 остается воспользоваться теоремой Неймана или теоремой И. И. Еремина (см., например, [7, с. 111, 112]). Последнее утверждение является следствием теоремы Шура ([7, с. 49]).

Следствие 3 (эквивалентная формулировка теоремы 1). *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, тогда индекс $C_G(FC(G))$ в группе G конечен.*

Предложение 1. *Группа G из $\mathfrak{X}$ является группой с конечным числом бесконечных классов сопряженных элементов.*

Доказательство. По условию в G содержится лишь конечное множество бесконечных классов сопряженных циклических подгрупп. Ясно, что нужно рассматривать только те циклические подгруппы, которые не содержатся в $FC(G)$. Каждая конечная подгруппа группы G пересекается лишь с конечным числом классов сопряженных элементов. Докажем, что каждая бесконечная циклическая подгруппа группы G, не принадлежащая $FC(G)$, пересекается лишь с конечным числом бесконечных классов сопряженных элементов. Пусть $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа, не принадлежащая $FC(G)$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то среди подгрупп группы $\langle g \rangle$ можно выбрать по одной подгруппе из различных бесконечных классов сопряженных подгрупп. Пусть теперь $g_1 \in \langle g \rangle \setminus FC(G)$. Тогда группа $\langle g_1 \rangle$ определяет бесконечный класс сопряженных с ней подгрупп группы G и поэтому сопряжена с одной из выбранных подгрупп группы $\langle g \rangle$. Это означает, что g_1 сопряжен с одним из образующих подгруппы, сопряженной с $\langle g_1 \rangle$. Так как в каждой бесконечной циклической группе образующих элементов всего лишь два, то получаем, что $\langle g \rangle$ пересекается с конечным числом бесконечных классов сопряженных элементов. Ввиду того, что все циклические подгруппы группы G образуют конечное число бесконечных классов сопряженных подгрупп, утверждение полностью доказано.

Следствие. *Если $G \in \mathfrak{X}$, то $FC(G/FC(G))$ конечен.*

Доказательство. Из предложения 1 легко получается следующее утверждение. Фактор-группа $G/FC(G)$ является группой с конечным числом классов сопряженных элементов. Отсюда следует, что $FC(G/FC(G))$ является объединением конечного числа конечных классов сопряженных элементов и поэтому конечна.

Предложение 2. *Пусть G — группа с конечным числом беско-*

нечных классов сопряженных элементов. Тогда для каждого элемента $g \in G \setminus FC(G)$ такого, что $g^n \in FC(G)$, где n — натуральное число, централизатор $C_{FC(G)}(g)$ является периодической группой.

Доказательство. Пусть $g \in G \setminus FC(G)$ и $g^n \in FC(G)$. Предположим, что порядок элемента g бесконечен. Рассмотрим множество $M = \{g^i \mid g^i \notin FC(G)\}$. Поскольку $G \setminus FC(G) = \bigcup_{j=1}^{m} g_j^G$, то существует такое число k, что $M \cap g_k^G$ бесконечно. Все степени элемента g, попавшие в это пересечение, сопряжены. Но тогда и их n-е степени сопряжены в G, т. е. $(g^{i_1})^{x_1} = g^{i_2}, \ldots, (g^{i_r})^{x_r} = g^{i_{r+1}}, \ldots$ и соответственно $(g^{ni_1})^{x_1} = g^{ni_2}, \ldots, (g^{ni_r})^{x_r} = g^{ni_{r+1}}, \ldots$. Так как все g^{ni_r} принадлежат $FC(G)$, то найдутся такие натуральные числа u и v, что $g^{ni_u} = g^{ni_v}$, откуда $g^{n(i_u - i_v)} = 1$. Полученное противоречие доказывает конечность порядка элемента g.

Пусть теперь $c \in C_{FC(G)}(g)$. Снова, предположив бесконечность порядка элемента c, рассмотрим множество $M_1 = \{gc^i\}$. Множество M_1 бесконечно и в нем существует бесконечное подмножество, элементы которого сопряжены в G, т. е. $(gc^{i_1})^{x_1} = gc^{i_2}, \ldots, (gc^{i_r})^{x_r} = gc^{i_{r+1}}, \ldots$. Для любого натурального m имеем $(g^m c^{mi_1})^{x_1} = g^m c^{mi_2}, \ldots, (g^m c^{mi_r})^{x_r} = g^m c^{mi_{r+1}}, \ldots$. Подставляя вместо m порядок элемента g, получаем $(c^{|g|i_1})^{x_1} = c^{|g|i_2}, \ldots, (c^{|g|i_r})^{x_r} = c^{|g|i_{r+1}}, \ldots$. Поскольку все эти элементы принадлежат FC-центру, то найдутся такие u и v, что $c^{|g|i_u} = c^{|g|i_v}$. Отсюда $c^{|g|(i_u - i_v)} = 1$. Противоречие.

Теорема 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $|G : FC(G)| = \infty$, то $FC(G)$ — конечная группа.*

Доказательство. По следствию 2 из теоремы 1 коммутант группы $FC(G)$ конечен. Ясно, что $FC(G)/FC(G)' \leqslant FC(G/FC(G)')$. Пусть $xFC(G)' \in FC(G/FC(G)')$. Это означает, что $|G : N_G(xFC(G)')| < \infty$. Поскольку $xFC(G)'$ — конечное множество, то $|N_G(xFC(G')) : C_G(xFC(G'))| < \infty$. А так как $C_G(xFC(G)') \leqslant C_G(x)$, то $|G : C_G(x)| < \infty$. Таким образом, доказано, что $FC(G) / FC(G)' = FC(G/FC(G)')$. Поэтому достаточно установить конечность $FC(G/FC(G)')$. Пусть $\overline{G} = G/FC(G)'$. Очевидно, что $\overline{G} \in \mathfrak{X}$. По следствию 3 из теоремы 1 имеем $G : C_{\overline{G}}(FC(\overline{G}))| < \infty$. Централизатор элемента $\overline{x}$ из $\overline{G}$ в подгруппе $C_{\overline{G}}(FC(\overline{G}))$ является подгруппой конечного индекса в группе $C_{\overline{G}}(\overline{x})$. Отсюда и из того, что $FC(\overline{G})$ — абелева группа, получаем $FC(\overline{G}) = FC(C_{\overline{G}}(FC(\overline{G})))$. Легко видеть, что если $G \in \mathfrak{X}$, то и любая ее подгруппа конечного индекса принадлежит $\mathfrak{X}$. Таким образом, можно считать, что $FC(G) \leqslant Z(G)$. А так как $Z(G) \leqslant FC(G)$, то $Z(G) = FC(G)$.

Покажем, что $FC(G)$ — периодическая группа. Если в $G/FC(G)$ существуют элементы конечного порядка, то это следует из предложения 2. Пусть теперь $G/FC(G)$ — группа без кручения. По следствию из предложения 1 FC-центр группы $G/Z(G)$ тривиален. Отсюда получаем $|G : N_G(\langle g, Z(G)\rangle)| = \infty$ для любого элемента $g \in G \setminus FC(G)$. Кроме того для любой подгруппы $A \leqslant Z(G)$ имеем $N_G(\langle g, A\rangle) \leqslant N_G(\langle g, Z(G)\rangle)$. Покажем, что если в $Z(G)$ содержится элемент c бесконечного порядка, то группы $\langle g, c^m\rangle$ и $\langle g, c^k\rangle$ при $m \neq k$ не сопряжены в G. Пусть для определенности $k < m$. Если $\langle g, c^m\rangle^x = \langle g, c^k\rangle$ для некоторого $x \in G$, то $c^k = (g^i c^{jm})$. Отсюда $(g^i)^x c^{jm} = c^k$ или $(g^i)^x = c^{k-jm}$. Поскольку $c \in Z(G)$, то $i = 0$ и $c^{k-jm} = 1$. Противоречие. Наконец, так как $|G : N_G(\langle g, c^n\rangle)| = \infty$ для всякого натурального n, то получаем противоречие с условием $G \in \mathfrak{X}$.

Итак, $Z(G)$ — периодическая группа. Если она бесконечно порождена, то в группе G существует бесконечный ряд неизоморфных конечнопорожденных подгрупп вида $\langle g, c_1, \ldots, c_m\rangle$, где $c_i \in Z(G)$. Каждая из этих подгрупп определяет бесконечный класс сопряженных подгрупп. Снова приходим к противоречию.

Лемма 1. *Пусть группа G является нетривиальным конечным расширением своего FC-центра. Если $G \in \mathfrak{X}$, то периодическая часть $T(FC(G))$ подгруппы $FC(G)$ конечна.*

Доказательство. Предположим, что $T(FC(G))$ — бесконечная группа. Рассмотрим бесконечный ряд подгрупп группы G вида $G_m = \langle g, c_1^G, \ldots, c_m^G\rangle$, где g — некоторый элемент из $G \setminus FC(G)$, а элементы $c_i \in FC(G) \setminus G_{i-1}$ для любого натурального i. Все эти группы конечны и поскольку $G_m \cap FC(G)$ попарно неизоморфны, то группы G_m попарно не сопряжены в группе G. Очевидно, что $C_G(G_m) \leqslant C_G(g)$. Следовательно, $|G : C_G(G_m)| = \infty$ для любого натурального m. Так как G_m — конечная группа, то $|N_G(G_m) : C_G(G_m)| < \infty$. Последнее соотношение означает, что каждая группа G_m определяет в G бесконечный класс сопряженных подгрупп. Противоречие с условием $G \in \mathfrak{X}$.

Лемма 2. *Пусть группа G является нетривиальным конечным расширением своего FC-центра. Если $G \in \mathfrak{X}$, то любая бесконечная подгруппа группы G почти нормальна в G.*

Доказательство. Коммутант FC-центра содержится в $T(FC(G))$ [7, с. 50]. По лемме 1 $T(FC(G))$ — конечная группа. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для фактор-группы $G/T(FC(G))$, т. е. можно считать, что $FC(G)$ — абелева группа без кручения и каждый элемент g из $G \setminus FC(G)$ индуцирует на $FC(G)$ регулярный автоморфизм.

Пусть g — некоторый элемент из $G \setminus FC(G)$. Рассмотрим подгруппу $H = \langle g, FC(G)\rangle = \langle g\rangle \ltimes FC(G)$ и покажем, что любая бесконечная подгруппа группы H почти нормальна в H. Предположим, что это не так, т. е. в H существует бесконечная подгруппа B такая, что $|H : N_H(B)| = \infty$. Ясно, что $B = \langle b\rangle \rightthreetimes B_1$, где $B_1 = B \cap FC(G)$. Можно считать, что $b = gh$ для некоторого $h \in FC(G)$. Подгруппа B_1 нормальна в группе H. Действительно, для любого $x \in H$ имеем $x = g^i a$, где $a \in FC(G)$, или $x = b^i a_1$, где $a_1 \in FC(G)$. Отсюда $B_1^x = B_1^{b^i a_1} \leqslant B$ и $B_1 \leqslant FC(G)$. Следовательно, $B_1^x \leqslant B_1$.

Рассмотрим теперь произвольную подгруппу A из B_1 такую, что A нормальна в H, и группу $\langle b\rangle \rightthreetimes A$. Если $x \in N_H(\langle b\rangle \rightthreetimes A)$, то для любого элемента $b^i \cdot a$ из B имеем $(b^i a)^x = (b^x)^i a^x$. Поскольку $a \in B_1$, то и $a^x \in B_1$. Элемент b принадлежит $\langle b\rangle \rightthreetimes A$, поэтому $(b^x)^i \in \langle b\rangle \rightthreetimes A < B$. Отсюда получаем $(b^i a)^x \in B$ или $B^x \leqslant B$. Последнее соотношение означает, что $N_H(\langle b\rangle \rightthreetimes A) \leqslant N_H(B)$ и поэтому $|H : N_H(\langle b\rangle \rightthreetimes A)| = \infty$. Пусть теперь A и A_1 — подгруппы группы B_1, нормальные в H и такие, что $A > A_1$. Если $a \in A \setminus A_1$ и $x \in H$ такой, что $(\langle b\rangle \rightthreetimes A)^x = \langle b\rangle \rightthreetimes A_1$, то $a^x \in \langle b\rangle \rightthreetimes A_1$. Поскольку $a \in A$ и A нормальна в H, то $a^x \in (\langle b\rangle \rightthreetimes A_1) \cap A = A_1$. Противоречие.

Каждый элемент FC-центра группы G содержится в конечно-порожденной нормальной в G подгруппе. Если подгруппа B_1 группы B не является конечнопорожденной, то в B_1 существует строго возрастающий ряд конечнопорожденных подгрупп, нормальных в H. Их полупрямые произведения на подгруппу $\langle b\rangle$ не сопряжены в группе H и определяют бесконечные классы сопряженных в H подгрупп. Противоречие с условием $H \in \mathfrak{X}$. Следовательно, B_1 конечно порождена.

Таким образом, группа B_1 является свободной абелевой группой конечного ранга. Рассмотрим ряд подгрупп $B_1 > B_1^2 > B_1^3 > \ldots$, где $B_1^n = \{x^n \mid x \in B_1\}$. Снова противоречие с условием $H \in \mathfrak{X}$. Поскольку H — подгруппа конечного индекса в G, то тем самым доказана почти нормальность всех бесконечных подгрупп группы H в G.

Пусть теперь Y — бесконечная подгруппа группы G. Тогда $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} b_i Y_1$, где $Y_1 = Y \cap FC(G)$. Подгруппы $\langle b_i, Y_1\rangle$ почти нормальны в G, т. е. $|G : N_G(\langle b_i, Y_1\rangle)| < \infty$. Пусть $N = \bigcap\limits_{i=1}^{n} N_G(\langle b_i, Y_1\rangle)$ и $x \in N$. Тогда $Y^x = \bigcup\limits_{i=1}^{n} b_i^x Y_1$. Поскольку $b_i^x \in Y$, то $Y^x \leqslant Y$, т. е. $N \leqslant N_G(Y)$. Подгруппа N имеет конечный индекс в G, поэтому $|G : N_G(V)| < \infty$. Последнее соотношение означает, что Y почти нормальна в G.

Определение. *Пусть* A — *группа автоморфизмов абелевой группы* G. *Назовем группу* A *рационально неприводимой* (*см.*, *например*, [6]), *если всякая неединичная* A*-допустимая подгруппа определяет периодическую фактор-группу. Если* A — *рационально неприводимая группа автоморфизмов группы* G *и* $A = \langle \alpha \rangle$, *то автоморфизм* α *также назовем рационально неприводимым.*

Теорема 3. *Пусть группа* G *является нетривиальным конечным расширением своего* FC*-центра. Группа* $G \in \mathfrak{X}$ *тогда и только тогда, когда* G — *группа одного из следующих типов*:

1) $G = \langle b \rangle \leftthreetimes A$, *причем* а) $|b| = p$, p — *простое число*, $C_G(b) = \langle b \rangle$; б) A — *свободная абелева группа ранга* $p-1$; в) b *индуцирует на* A *рационально неприводимый автоморфизм;*

2) G *содержит такую конечную нормальную подгруппу* F, *что* G/F — *группа типа* (1).

Доказательство. В силу леммы 2 необходимость утверждения следует из теоремы 1 работы [6].

Ясно, что обратное утверждение достаточно доказать для групп типа 1. Пусть G — группа типа 1. Тогда взаимный коммутант $[b, G]$ состоит из коммутаторов. Группы $\langle b \rangle$ и $\langle ba \rangle$, где $a \in A$, сопряжены в G тогда и только тогда, когда $a \in [b, G]$. Отсюда число бесконечных классов сопряженных подгрупп группы G равно индексу $|A : [b, G]|$. Так как $[b, G]$ — нормальная в G подгруппа группы A и b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм, то $[b, G]$ имеет конечный индекс в G.

В заключение заметим, что вопрос о зависимости числа бесконечных классов сопряженных элементов группы G из $\mathfrak{X}$ от числа бесконечных классов сопряженных подгрупп остается открытым.

1. *Neuman B. H.* Groups with finite classes conjugate subgroups // Math. Z.— 1955.— **63**, N 1.— S. 76—96.
2. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Мат. сб.— 1959.— **47**, № 1.— С. 45—54.
3. *Еремин И. И.* О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданным свойством // Докл. АН СССР.— 1961.— **134**, № 4.— С. 772—773.
4. *Черников С. Н.* Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 47—65.
5. *Половицкий Я. Д.* Группы с конечными классами сопряженных бесконечных абелевых подгрупп // Изв. вузов. Математика.— 1980.— № 10.— С. 49—54.
6. *Семко Н. Н., Левищенко С. С., Курдаченко Л. А.* О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Там же.— 1983.— № 10.— С. 57—63.
7. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 120 с.

Урал. ун-т

Получено 07.07.87