УДК 512.54

Ю. И. Мерзляков

Точное матричное представление голоморфов групп Абельса

Пусть n, m — целые числа, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, G_{nm} — группа всех верхних треугольных матриц степени n над кольцом $\mathbb{Z}\,[1/m]$ m-ичных дробей с диагональными элементами вида m^k, $k \in \mathbb{Z}$, и единицей на местах (1, 1) и (n, n). Как показал Абельс [1], группа G_{4p} при любом простом p конечно определена и не удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп — существование групп с такими свойствами составляло содержание известной проблемы Ф. Холла. А. Н. Люлько [2] распространил этот результат на группы G_{nm} при любых $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$.

В настоящей работе методом расщепляемых координат [3, 4] доказывается следующая теорема.

Теорема. *При любых $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$ голоморф группы G_{nm} имеет точное представление матрицами над кольцом $\mathbb{Z}\,[1/m]$.*

Таким образом, группы Абельса G_{nm} не только сами по себе, но и вместе с их группами автоморфизмов включаются теперь в общую теорию линейных групп.

Лемма 1. *Унитреугольная группа $U = \mathbf{UT}_n\,(\mathbb{Z}\,[1/m])$ — нильпотентный радикал, т. е. наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа группы $G = G_{nm}$. В частности, подгруппа U автоморфно допустима в G.*

Доказательство. Очевидно, U — нормальная подгруппа группы G и, согласно предложению 16.1.4 из [5], U нильпотентна. Пусть N — произвольная нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Покажем, что $N \leqslant U$ или, что то же самое, $NU = U$. Пусть, напротив, $NU > U$. Тогда NU содержит нетривиальную диагональную матрицу $d = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть $\alpha_i \neq 1$, $\alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_n = 1$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Наряду с каждой трансвекцией $t_{i,i+1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}\,[1/m]$, $\alpha \neq 0$, подгруппа NU содержит коммутатор $[t_{i,i+1}(\alpha), d] = t_{i,i+1}(\beta)$, где $\beta = \alpha((1/\alpha_i) - 1) \neq 0$. Повторяя это рассуждение, видим, что сколь угодно длинные простые коммутаторы $[t_{i,i+1}(\alpha), d, \ldots, d]$ отличны от единицы, что противоречит нильпотентности группы NU. Лемма доказана.

Приступая непосредственно к доказательству теоремы, заметим прежде всего, что гомоморфизм $G \to G/U \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ индуцирует гомоморфизм групп автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}\, G \to \mathrm{Aut}\, G/U \simeq \mathbf{GL}_{n-2}(\mathbb{Z}). \tag{1}$$

Оказывается, что в действительности не вся группа $\mathbf{GL}_{n-2}(\mathbb{Z})$, а лишь очень малая ее часть появляется при этом гомоморфизме.

Лемма 2. *Образ естественного гомоморфизма* (1) *конечен.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{St}_u G$ — ядро гомоморфизма (1), т. е. стабилизатор секции G/U в $\mathrm{Aut}\, G$. Так как группа $\mathbf{GL}_{n-2}(\mathbb{Z})$ почти вся не имеет кручения (см., например, [4], доказательство предложения 60.2.1), то достаточно убедиться, что для всякого $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ найдется такое натуральное число $k = k(\varphi)$, что $\varphi^k \in \mathrm{St}_u G$. Если порядок автоморфизма φ конечен, то утверждение тривиально, пусть поэтому $|\varphi| = \infty$.

Покажем сначала, что подгруппа $F = (\varphi) G$ голоморфа $\mathrm{Hol}\, G$ содержит нормальную подгруппу F_0 конечного индекса, коммутант которой F_0' нильпотентен. В самом деле, рассмотрим в F матрёшку подгрупп

$$F > G > U = U^{(0)} > U^{(1)} > \ldots > U^{(n-1)} = 1 \tag{2}$$

с секциями

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}^{n-2},\ \mathbb{Z}[1/m]^{n-1}, \ldots, \mathbb{Z}[1/m], \tag{3}$$

где $U^{(i)}$ — подгруппа группы U с i нулевыми диагоналями выше главной, $X^l = X \oplus \ldots \oplus X$ (l раз). Группа F действует в этих секциях сопряжениями, индуцируя автоморфизмы $\mathbb{Z}$- и $\mathbb{Z}[1/m]$-модулей соответственно. Следовательно, возникают гомоморфизмы

$$F \to \{\pm 1\}, \quad F \to \mathbf{GL}_{n-2}(\mathbb{Z}), \quad F \to \mathbf{GL}_l(\mathbb{Z}[1/m]),\ l = n-1, \ldots, 1.$$

Так как F разрешима, то образы этих гомоморфизмов почти триангулируемы над полем алгебраических чисел $\overline{\mathbf{Q}}$ (см. [4], теорема 45.1.1). Если F_0 — пересечение прообразов триангулируемых частей, то $|F : F_0| < \infty$ и коммутант F_0' действует унитреугольно во всех секциях (3), т. е. $[M_i, F_0', \ldots, F_0'] \leqslant \leqslant M_{i+1}$, где M_i — члены матрёшки (2) и число коммутирований достаточно велико. В частности, группа F_0' нильпотентна. Можно считать, что $F_0 \lhd F$.

Далее, по лемме 1 U — нильпотентный радикал группы G, поэтому $[G^k, \varphi^k] \leqslant F_0' \cap G \leqslant U$, где $k = |F : F_0|$. С другой стороны, так как факторгруппа G/U абелева, то ввиду коммутаторных соотношений (см. [5], п. 3.2) $[G/U, \varphi^k]^k \leqslant [(G/U)^k, \varphi^k] = [G^k, \varphi^k] \cdot U$, откуда $[G, \varphi^k]^k \leqslant U$. Так как группа $G/U \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ не имеет кручения, то $[G, \varphi^k] \leqslant U$, т. е. $\varphi^k \in \mathrm{St}_u G$. Лемма доказана.

Итак, задача упрощается: $|\operatorname{Aut} G : \mathrm{St}_u G| < \infty$, поэтому достаточно представить матрицами над $\mathbb{Z}[1/m]$ группу $H = \mathrm{St}_u G \cdot G$.

Покажем сначала, что кольцо $\mathbb{Z}[1/m]$ биномиально в смысле [6], т. е. вместе с каждым своим элементом α содержит все «биномиальные коэффициенты»

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим через $A(\alpha, k)$ числитель этого коэффициента, т. е. положим $A(\alpha, k) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$.

Лемма 3. *Пусть p — простое число, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — кольцо целых p-адических чисел, N_p — аддитивная p-адическая норма. Тогда*

$$\min_{\alpha \in \mathbb{Z}_{p^\infty}} N_p(A(\alpha, k)) = N_p(k!) = [k/p] + [k/p^2] + \ldots,$$

где квадратные скобки обозначают взятие целой части.

Доказательство. Прежде всего второе равенство доказано в [5, с. 103]. Далее, $A(k, k) = k!$, поэтому остается доказать, что

$$N_p(A(\alpha, k)) \geqslant [k/p] + [k/p^2] + \ldots \tag{4}$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Докажем это индукцией по k.

При $k = 1$ утверждение очевидно, так как $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Докажем формулу (4) для данного k, предполагая ее доказанной для всех $A(\beta, l)$, $\beta \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $l < k$. Пусть $\alpha \equiv a \pmod p$, $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$; тогда $\alpha - a = p\beta$, $\beta \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Можно считать, что $k \geqslant p$. Среди множителей, составляющих произведение $A(\alpha, k)$, имеются $\alpha - a$, $\alpha - a - p, \ldots,$ $\alpha - a - (l-1)p$, где $l = [k/p]$, т. е. $A(\alpha, k)$ делится на $p^l A(\beta, l)$, откуда $N_p(A(\alpha, k)) \geqslant [k/p] + N_p(A(\beta, [k/p]))$. Так как $l = [k/p] < k$, то по индуктивному предложению $N_n(A(\beta,$

$l)) \geqslant [l/p] + [l/p^2] + \ldots$. Но $[l/p^i] = [k/p^{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$, что завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Кольца* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *и* $\mathbb{Z}[1/m]$ *биномиальны.*

Доказательство. В самом деле, биномиальность кольца $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ сразу следует из леммы 3. Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{Z}[1/m]$, $k \in \mathbb{N}$ и p — произвольное простое число, не делящее m. Тогда $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, поэтому по лемме 3 $N_p\left(\binom{\alpha}{k}\right) \geqslant 0$. Следовательно, несократимая запись рационального числа $\binom{\alpha}{k}$ не содержит множителя p в знаменателе, а потому $\binom{\alpha}{k} \in \mathbb{Z}[1/m]$. Лемма доказана.

Итак, $\mathbb{Z}[1/m]$ — биномиальное кольцо и, следовательно, U является $\mathbb{Z}[1/m]$-степенной группой в смысле Холла [6] с операцией возведения матриц в степень по формуле $u^\alpha = (e + (u - e))^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} (u - e)^k$, $u \in U$. Заметим еще, что

$$(u^\alpha)^\varphi = (u^\varphi)^\alpha \tag{5}$$

для всех $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{Z}[1/m]$, $\varphi \in \operatorname{Aut} U$. Действительно, пусть $\alpha = a/b$, где a, b — взаимно простые натуральные числа. Положим $u^{1/b} = v$. Так как $u = v^b$, то $u^\varphi = (v^\varphi)^b$, а так как U — группа с однозначным извлечением корня ([5], теорема 16.2.8), то $(u^\varphi)^{1/b} = v^\varphi = (u^{1/b})^\varphi$. Возведя обе части в a-ю степень, получим (5).

Напомним, что мы собираемся группу $H = \mathrm{St}_u\, G \cdot G$ представить матрицами над кольцом $\mathbb{Z}[1/m]$. Следуя плану работы [7], рассмотрим с этой целью вложение $H \to \operatorname{Aut}(G \wr \mathbb{Z}_2)$, определяемое правилом

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^{\varphi g} = \begin{pmatrix} x^{\varphi g} & 0 \\ 0 & y^\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}^{\varphi g} = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} x^\varphi \\ y^\varphi g & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\varphi \in \mathrm{St}_u G$, $g \in G$.

Пусть $d_i(\alpha)$ — диагональная матрица степени n, содержащая на i-м диагональном месте α, а на остальных диагональных местах единицы. Пусть $d_1, \ldots, d_{2n-4}$ — матрицы $d_i(m)$, $d_i(1/m)$, $i = 2, \ldots, n-1$, занумерованные в каком-нибудь порядке, $u_1, \ldots, u_s$ — все трансвекции вида $t_{kl}(1)$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $s = \binom{n}{2}$, занумерованные в порядке увеличения разностей $l - k$.

Лемма 5. *Всякий элемент $u \in U$ единственным образом записывается в виде $u = u_1^{\eta_1(u)} \ldots u_s^{\eta_s(u)}$, $\eta_i(u) \in \mathbb{Z}[1/m]$, причем показатели $\eta_i(u)$ выражаются многочленами над* $\mathbf{Q}$ *от матричных координат элемента* u.

Доказательство. Рассмотрим в U убывающую матрёшку подгрупп

$$U = U^{(0)} > U^{(1)} > \ldots > U^{(n-1)} = 1 \tag{7}$$

(см. (2)). Очевидно, что трансвекции $t_{kl}(1)$ с разностью значков $l - k = i$ составляют базу свободного $\mathbb{Z}[1/m]$-модуля $U^{(i)}/U^{(i+1)}$, откуда и следует первое утверждение. Второе утверждение леммы легко получается индукцией по номеру члена матрёшки (7).

Так как $G = \mathrm{гр}(d_1, \ldots, d_{2n-4}, U)$, а U порождается как $\mathbb{Z}[1/m]$-степенная группа элементами $u_1, \ldots, u_s$ (лемма 5) и, кроме того, справедлива формула (5), то каждый элемент φg, $\varphi \in \mathrm{St}_u G$, $g \in G$, однозначно определяется его действием на матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & u_j \end{pmatrix}$$

в силу (6), т. е. элементами матриц

$$g,\ g^{-1},\ v_i(\varphi g),\ v_i(\varphi),\ u_j^{\varphi g},\ u_j^{\varphi},\ 1 \leqslant i \leqslant 2n-4,\ 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{8}$$

где v_i определяются так: $d_i^{\xi} = d_i v_i(\xi)$, $v_i(\xi) \in U$.

Будем считать элементы матриц (8) координатами элемента φg и обозначим через $t_1, \ldots, t_M$ координатные функции, возникающие на H описанным способом. Достаточно доказать, что эти координаты $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляются, и применить затем следующую лемму о расщепляемых координатах.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{o}$ — целостное кольцо главных идеалов, k — его поле частных, S — полугруппа с единицей и k-значными координатами $t_1, \ldots, t_M$, причем $t_\alpha(xy) = \sum_{\beta=1}^{L} f_{\alpha\beta}(x) h_{\alpha\beta}(y)$, $x, y \in S$, $1 \leqslant \alpha \leqslant M$, где $f_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ — функции со значениями в $\mathfrak{o}$ и k соответственно. Тогда существуют натуральное число N и изоморфное вложение $\rho : S \to \mathrm{Mat}_N(\mathfrak{o})$, причем их можно выбрать такими, что отображение ρ^{-1} будет линейным над k на S^ρ в матричных координатах.*

Координаты $\{t_\alpha\}$ и называются расщепляемыми или, точнее, $\mathfrak{o}$-расщепляемыми на S.

Эта лемма доказана в [3], лемма 2 (см. также [4], лемма 57.3.1). Заметим, что $\mathbb{Z}[1/m]$ — кольцо главных идеалов, так как для всякого его идеала I множество I_0 числителей элементов из I — идеал кольца $\mathbb{Z}$; ясно, что порождающий его в $\mathbb{Z}$ элемент порождает в $\mathbb{Z}[1/m]$ идеал I.

Итак, остается доказать, что введенные перед леммой 6 координаты $\{t_\alpha\}$ $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляются на группе $H = \mathrm{St}_u G \cdot G$. Так как координатами произведения $\varphi g \cdot \varphi_1 g_1$ являются элементы матриц

$$g^{\varphi_1} g_1,\ g_1^{-1}(g^{-1})^{\varphi_1},\ v_i(\varphi_1 g_1) v_i(\varphi g)^{\varphi_1 g_1},\ v_i(\varphi_1) v_i(\varphi)^{\varphi_1},\ u_j^{\varphi g \cdot \varphi_1 g_1},\ u_j^{\varphi \varphi_1},$$

то достаточно убедиться, что $\mathrm{St}_u G$ действует на G $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо. С другой стороны, всякая матрица $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = d(g)\,u(g)$, где $d(g) \in D = \mathrm{diag}(1, m^{\mathbb{Z}}, \ldots, m^{\mathbb{Z}}, 1)$, $u(g) \in U$, поэтому ввиду предложения 57.2.1 из [4] достаточно убедиться, что $\mathrm{St}_u G$ действует $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо на D и U.

Лемма 7. *Группа $\mathrm{St}_u G$ действует на D $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо. Более точно, существуют такие функции $f_k : D \to \mathbb{Z}[1/m]$ и $h_k : \mathrm{St}_u G \to \mathbf{Q}$, что $d^\varphi = \sum_k f_k(d) h_k(\varphi)$ для любых $d \in D$, $\varphi \in \mathrm{St}_u G$.*

Доказательство. Пусть $d = d_1^{\xi_1(d)} \ldots d_r^{\xi_r(d)}$, $\varphi \in \mathrm{St}_u G$, все $\xi_i(d) \in \mathbb{N}$, где $r = 2n - 4$. Очевидно, показатели $\xi_i(d)$ определяются матрицей d однозначно. Так как $d^\varphi = (d_1 v_1(\varphi))^{\xi_1(d)} \ldots (d_r v_r(\varphi))^{\xi_r(d)}$ и отображение $(\xi, u) \mapsto (d_i u)^\xi$, $\xi \in \mathbb{N}$, $u \in U$, при фиксированном i $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо (см. [4], предложение 57.2.3), то ввиду предложения 57.2.1 из [4] отображение $(d, \varphi) \mapsto d^\varphi$, $d \in D$, $\varphi \in \mathrm{St}_u G$, также $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо. Лемма доказана.

Лемма 8. *Группа $\mathrm{St}_u G$ действует на U $\mathbb{Z}[1/m]$-расщепляемо. Более точно, существуют такие полиномиальные над $\mathbf{Q}$ в матричных координатах, имеющихся на U, функции $f_l^* : U \to \mathbb{Z}[1/m]$ и такие функции $h_l^* : \mathrm{St}_u G \to \mathbf{Q}$, что $u^\varphi = \sum_l f_l^*(u) h_l^*(\varphi)$ для любых $u \in U$, $\varphi \in \mathrm{St}_u G$.*

Доказательство. Пусть $u = u_1^{\eta_1(u)} \ldots u_s^{\eta_s(u)}$, $\eta_j(u) \in \mathbb{Z}[1/m]$. Ввиду (5)

$$u^\varphi = (u_1^\varphi)^{\eta_1(u)} \ldots (u_s^\varphi)^{\eta_s(u)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\eta_1(u)}{k} (u_1^\varphi - e)^k \ldots$$

$$\ldots \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\eta_s(u)}{k} (u_s^\varphi - e)^k,$$

и остается воспользоваться вторым утверждением леммы 5. Лемма 8, а вместе с ней и теорема доказаны.

Отметим в заключение, что на самом деле приведенное здесь доказательство применимо для групп более широкого класса, нежели группы Абельса, в частности условие $x_{11} = x_{nn} = 1$ из их определения никак не использовалось в наших рассуждениях.

1. *Abels H.* An example of a finitely presented solvable group // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1979.— N 36.— P. 205—211.
2. *Люлько А. Н.* Семейство разрешимых линейных групп без условия максимальности для нормальных подгрупп // Мат. заметки.— 1986.— **39**, № 4.— С. 507—511.
3. *Мерзляков Ю. И.* О матричном представлении автоморфизмов, расширений и разрешимых групп // Алгебра и логика.— 1968.— **7**, № 3.— С. 63—104.
4. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы.— 2-е изд.— М. : Наука, 1987.— 448 с.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—3-е изд. — М. : Наука, 1982.— 288 с.
6. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика : Сб. пер.— 1968.— **12**, № 1.— С. 3—36.
7. *Мерзляков Ю. И.* О линейности групп автоморфизмов линейных групп // Алгебра и логика.— 1971.— **10**, № 5.— С. 503—522.

Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск

Получено 24.08.87