УДК 512.544.4

Е. Г. Косман

О геометрической характеризации силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы

Данная статья является продолжением работы [1]. Напомним, что F — конечное поле из $q = p^k$ элементов, V — счетномерное векторное пространство над F счетной мощности, $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ — ограниченная линейная группа, $\mathfrak{S}(V)$ и $\mathfrak{P}(V)$ — множества силовских p-подгрупп $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, получающихся плотным пополнением и пополнением соответственно, т. е. $P \in \mathfrak{P}(V) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} P = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_{n_i}$, где $P_{n_1} \subset P_{n_2} \subset \ldots$, P_{n_i}—силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(V_{n_i})$, и $P \in \mathfrak{S}(V) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} P \in \mathfrak{P}(V)$ и $n_i = i \;\forall\; i = \overline{1, \infty}$. Целью настоящей статьи является получение некоторой геометрической характеризации силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}(V)$ в зависимости от их нормального строения.

Пусть V' — пространство функционалов на V. Напомним некоторые определения из [2]. Подпространство U пространства V будем называть прямой, если $\dim U = 1$, и гиперплоскостью, если $\operatorname{codim} U = 1$. Для произвольного подмножества X из V и Y из V' определим подпространства $X^{\perp} = \{\rho \in V' \mid \rho x = 0 \;\forall\; x \in X\}$ и $Y^{\top} = \{x \in V \mid \rho x = 0 \;\forall\; \rho \in Y\}$. Подпространство $W \subset V'$ называется тотальным, если $W^{\top} = 0$. Легко видеть, что каждый ненулевой элемент ρ из V' определяет некоторую гиперплоскость H пространства V, а именно $H = \rho^{\top}$.

Для произвольного подмножества X из V и Y из W определим $X^0 = \{\rho \in W \mid \rho x = 0 \;\forall\; x \in X\}$ и $Y^0 = \{x \in V \mid \rho x = 0 \;\forall\; \rho \in Y\}$. Очевидно, что $X^0 = X^{\perp} \cap W$, а $Y^0 = Y^{\top}$.

Пусть $W = \langle \rho_i \mid i = \overline{1, \infty} \rangle$, где $\rho_i(x_j) = \delta_{ij}$ для базиса $x_1, x_2, \ldots$ пространства V; P — силовская p-подгруппа из $\mathfrak{P}(V)$. Обозначим через $V(P)$ и $W(P)$ следующие подпространства в V и W соответственно: $V(P) = \langle x \mid \tau_{x,\rho} \in P \rangle$, $W(P) = \langle \rho \mid \tau_{x,\rho} \in P \rangle$, где $\tau_{x,\rho}$ — трансвекция с вычетной прямой $\langle x \rangle$ и неподвижной гиперплоскостью $\rho^{\top}$. Поскольку известно [1], что P порождается трансвекциями, то $V(P) \neq \varnothing$ и $W(P) \neq \varnothing$. Кроме того, из построения P [1] следует, что $W(P) \subseteq W$.

Утверждение 1. 1) $\dim V/V(P) \leqslant 1$; 2) $\dim W/W(P) \leqslant 1$.

Доказательство. Допустим $\dim V/V(P) = k > 1$. Тогда $V = V(P) \oplus \overline{V}(P)$, где $\dim \overline{V}(P) = k$. Не ограничивая общности, можно считать $\overline{V}(P) = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Поскольку $x_1 \notin V(P)$, то трансвекция $\tau_{x_1,\rho_2} \notin P$. Но существует такое n, что $\tau_{x_1,\rho_2} \in \mathrm{GL}(V_n)$ и $P \cap \mathrm{GL}(V_n) = P_n$ (так как $P \in \mathfrak{P}(V)$), где P_n — силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(V_n)$. Тогда P_n стабилизирует флаг подпространств с базисом $\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $P_n = \langle \tau_{y_i,\mu_{i+1}} \mid i = \overline{1, n-1}, \mu_i \in V_n', \mu_i y_j = \delta_{ij} \rangle$. По определению $y_i \in V(P)$, а следовательно, $\rho_2 y_i = 0 \;\forall\; i = \overline{1, n-1}$. Поэтому $\tau_{x_1,\rho_2} y_i = y_i \;\forall\; i = \overline{1, n-1}$, а значит, $\tau_{x_1\rho_2}$ принадлежит группе стабильности флага подпространств $\langle y_1 \rangle \subset \langle y_1, y_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle y_1, \ldots, y_n \rangle = V_n$, т. е. $\tau_{x_1,\rho_2} \in P_n$. Но тогда $\tau_{x_1,\rho_2} \in P$, что противоречит условию $x_1 \notin V(P)$. Значит, $\dim V/V(P) \leqslant 1$.

Аналогично доказывается, что $\dim W/W(P) \leqslant 1$.

Следствие. *Пусть* $P \in \mathfrak{P}(V)$. *Тогда* $\dim V^0(P) \leqslant 1$ *и* $\dim W^0(P) \leqslant 1$.

Замечание. Если $\dim V/V(P) = 0$, то $\dim V^0(P) = 0$. С другой стороны, при $\dim V/V(P) = 1$ возможны случаи $\dim V^0(P) = 0$ (например, $V(P) = \langle x_1 - x_i \mid i = \overline{2, \infty} \rangle$) и $\dim V^0(P) = 1$ (например, $V(P) = \langle x_i \mid i = \overline{2, \infty} \rangle$). Аналогично, из $\dim W/W(P) = 0$ следует $\dim W^0(P) = 0$. Но при $\dim W/W(P) = 1$ возможно либо $\dim W^0(P) = 0$ (например, $W(P) = \langle \rho_i - \rho_{i+1} \mid i = \overline{1, \infty} \rangle$), либо $\dim W^0(P) = 1$ (например, $W(P) = \langle \rho_i \mid i = \overline{2, \infty} \rangle$).

Теперь сформулируем основное утверждение данной статьи.

Теорема. *Пусть P — силовская p-подгруппа из $\mathfrak{P}(V)$. Справедливы следующие утверждения:*

1) $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 0$ *тогда и только тогда, когда P не содержит нормальной подгруппы, состоящей только из трансвекций;*

2) $\dim V^0(P) = 0$ *и* $\dim W^0(P) = 1$ *или* $\dim V^0(P) = 1$ *и* $\dim W^0(P) = 0$ *тогда и только тогда, когда P содержит единственную максимальную нормальную подгруппу, состоящую только из трансвекций;*

3) $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 1$ *тогда и только тогда, когда P содержит ровно две максимальные нормальные подгруппы, состоящие только из трансвекций. При этом P имеет нетривиальный центр* $Z(P) = \langle \tau_{\lambda x, \rho} \mid \lambda \in F \rangle$, *где* $\langle x \rangle = W^0(P)$, $\langle \rho \rangle = V^0(P)$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1.

1). *Пусть* $\rho_1 - \alpha\rho_s \notin W(P)$ *для любого* $\alpha \in F$ *и всех* $s = \overline{2, \infty}$. *Тогда* $\dim W^0(P) = 1$.

2). *Пусть* $x_1 - \alpha x_s \notin V(P)$ *для любого* $\alpha \in F$ *и всех* $s = \overline{2, \infty}$. *Тогда* $\dim V^0(P) = 1$.

Доказательство. 1). Поскольку $\rho_1 \notin W(P)$, то $\rho_s \in W(P)$ $\forall s = \overline{2, \infty}$. Действительно, если существует $\rho_{s_1} \notin W(P)$ $(s_1 \neq 1)$, то $\langle \rho_1, \rho_{s_1} \rangle \not\subset W(P)$. Отсюда $\dim W/W(P) \geqslant 2$, что противоречит утверждению 1.

Покажем, что $\langle x_1 \rangle \subseteq W^0(P)$. Допустим противное, т. е. существует $\rho \in W(P)$ такой, что $\rho x_1 = \alpha_1 \neq 0$. Тогда $\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i$. Так как $\rho_s \in W(P)$ при $s = \overline{2, \infty}$, то $\alpha_1 \rho_1 = \rho - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \rho_i \in W(P)$. Значит, $\rho_1 \in W(P)$, что противоречит условию. Следовательно, $\langle x_1 \rangle \subseteq W^0(\mathrm{P})$, а по следствию из утверждения 1 $\dim W^0(P) = 1$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается п. 2 леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $\tau_{x,\rho}$ — трансвекция, $\sigma \in \overline{\mathrm{GL}}(V)$. Равенство* $\tau_{x,\rho}\sigma = \sigma\tau_{x,\rho}$ *возможно тогда и только тогда, когда* $\langle x \rangle \subseteq N$ *и* $R \subseteq \rho^{\top}$, *где R — вычетное, а N — неподвижное пространство* σ.

Доказательство. Пусть $\tau_{x,\rho}\sigma = \sigma\tau_{x,\rho}$. Для любого $y \in V$ $\tau_{x,\rho}\sigma y = \sigma y + \rho(\sigma y) x$, $\sigma\tau_{x,\rho} y = \sigma y + \rho(y)\sigma x$. Поскольку $\tau_{x,\rho}\sigma = \sigma\tau_{x,\rho}$, то $\sigma y + \rho(\sigma y) x = \sigma y + \rho(y)\sigma x$ и $\rho(\sigma y) x = \rho(y)\sigma x$. Последнее возможно только тогда, когда либо $\rho(\sigma y) = \rho(y) = 0$, либо $\rho(\sigma y) = \rho(y) \neq 0$ и $\sigma x = x$. Поскольку существует $y \in V$ такой, что $\rho(y) \neq 0$, то необходимо должно выполняться второе условие. Тогда $\rho(\sigma y) - \rho(y) = 0$ и $\sigma x - x = 0$, $\rho(\sigma - 1) y = 0$ и $(\sigma - 1) x = 0$. Отсюда $x \in N$ и $(\sigma - 1) y \in \rho^{\top}$ для любого $y \in V$. Следовательно, $\langle x \rangle \subseteq N$ и $R \subseteq \rho^{\top}$.

Наоборот, если $\langle x \rangle \subseteq N$ и $R \subseteq \rho^{\top}$, то для любого $y \in V$ $(\sigma - 1) y = r \in R$, т. е. $r \in \rho^{\top}$, а $\sigma x = x$. Поэтому $\tau_{x,\rho}\sigma y = \sigma y + \rho(y + r) x = \sigma y + \rho(y)\sigma x = \sigma\tau_{x,\rho} y$. Значит, $\tau_{x,\rho}\sigma = \sigma\tau_{x,\rho}$, что завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Пусть P — силовская p-подгруппа из $\mathfrak{P}(V)$. Справедливы следующие утверждения:*

1) *Если* $W^0(P) = \langle x \rangle$, *то для любого* $\rho \in W(P)$ *трансвекция* $\tau_{x,\rho} \in P$;

2) *Если* $V^0(P) = \langle \rho \rangle$, *то для любого* $x \in V(P)$ *трансвекция* $\tau_{x,\rho} \in P$.

Доказательство.

1). Пусть $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{n_k}$, где P_{n_k} — силовские p-подгруппы групп $GL(V_{n_k})$, $P_{n_1} \subset P_{n_2} \subset \ldots$. Известно, что P_{n_k} состоит из тех и только тех операторов $\sigma \in \mathrm{GL}(V_{n_k})$, которые стабилизируют некоторый флаг подпространств $U_1 \subset \ldots \subset U_{n_k} = V_{n_k}$ с базисом $y_1^{(k)}, \ldots, y_{n_k}^{(k)}$. Так как P порождается трансвекциями $\tau_{y,\varphi}$, где $\varphi(x) = 0$, то $\sigma x = x$ для $\sigma \in P$, а значит, и для $\sigma \in P_{n_k}$. Поэтому $\langle y_1^{(k)} \rangle = \langle x \rangle$ $\forall k$.

Для любой трансвекции $\tau_{x,\rho} \in \overline{\mathrm{GL}}(V)$ существует k такое, что $\tau_{x,\rho} \in \mathrm{GL}(V_{n_k})$. Тогда $\tau_{x,\rho} y_i^{(k)} = y_i^{(k)} + \rho(y_i^{(k)})x \ \forall\ i = \overline{1, n_k}$. Следовательно, $\tau_{x,\rho}$ входит в группу стабильности флага $U_1 \subset \ldots \subset U_{n_k}$, т. е. $\tau_{x,\rho} \in P_{n_k}$. Отсюда $\tau_{x,\rho} \in P$ для любого $\rho \in W(P)$.

2). Так как $V^0(P) = \langle\rho\rangle$, то P порождается трансвекциями $\tau_{y,\varphi}$, где $\rho(y) = 0$. Поскольку P_{n_k} стабилизирует флаг подпространств с базисом $y_1^{(k)}, \ldots, y_{n_k}^{(k)}$, то P_{n_k} содержит трансвекции с вычетными прямыми $\langle y_i^{(k)}\rangle$ для $i = \overline{1, n_k - 1}$ [1]. Поэтому $y_i^{(k)} \in V(P)$ при $i = \overline{1, n_k - 1}$.

Для любой трансвекции $\tau_{x,\rho} \in \overline{\mathrm{GL}}(V)$ существует k такое, что $\tau_{x,\rho} \in \mathrm{GL}(V_{n_k})$. Тогда $\tau_{x,\rho} y_i^{(k)} = y_i^{(k)} + \rho(y_i^{(k)})x \ \forall i = \overline{1, n_k}$. Но $\rho(y_i^{(k)}) = 0$ для $i = \overline{1, n_k - 1}$. Поэтому $\tau_{x,\rho} y_i^{(k)} = y_i^{(k)}$ при $i = \overline{1, n_k - 1}$. Следовательно, $\tau_{x,\rho}$ принадлежит группе стабильности флага $U_1 \subset \ldots \subset U_{n_k} = V_{n_k}$, т. е. $\tau_{x,\rho} \in P_{n_k}$. Отсюда $\tau_{x,\rho} \in P$ для любого $x \in V(P)$. Лемма 3 доказана.

Напомним, что $\mathrm{UT}(V_n)$ — силовская P-подгруппа группы $\mathrm{GL}(V_n)$, порожденная трансвекциями $\tau_{\lambda x_i, \rho_j}$ $(i < j;\ i = \overline{1, n-1};\ j = \overline{2, n};\ \lambda \in F)$.

Лемма 4. *Если $V^0(P) = \langle\rho\rangle$ и $W^0(P) = \langle x\rangle$, то $x \in V(P)$, а $\rho \in W(P)$.*

Доказательство. Очевидно существует такое n, что $P \cap \mathrm{GL}(V_n) = P_n$, $\rho \in V_n'$ и $x \in V_n$. Пусть σ — такой элемент из $\mathrm{GL}(V_n)$, что $\sigma^{-1} P_n \sigma = \mathrm{UT}(V_n)$. Так как для любого $g \in P$ $gx = x$ (см. доказательство леммы 3), то $\sigma^{-1} g \sigma(\sigma^{-1}x) = \sigma^{-1}x$, т. е. вектор $\sigma^{-1}x \in V_n$ остается неподвижным при действии любого элемента из $\mathrm{UT}(V_n)$. Но таким свойством обладают только векторы $\lambda x_1 \in V_n$, где $\lambda \in F$. Значит, $\sigma^{-1}x = \lambda x_1$. А поскольку $\mathrm{UT}(V_n)$ содержит трансвекцию с вычетной прямой $\langle x_1\rangle$ (например, τ_{x_1,ρ_2}), то P_n содержит трансвекцию с вычетной прямой $\langle x\rangle = \langle \sigma x_1\rangle$. Следовательно, $x \in V(P)$.

Покажем, что $\rho \in W(P)$. Действительно, P_n есть группа стабильности некоторого флага подпространств $U_1 \subset \ldots \subset U_n = V_n$, где $U_1 = \langle x\rangle$. Так как $x \in V(P)$, то $\rho(x) = 0$ и существует трансвекция $\tau_{x,\rho} \in \mathrm{GL}(V_n)$. При этом $\tau_{x,\rho} x = x$ и $\tau_{x,\rho} y = y + \rho(y)x$ для любого $y \in V_n$. Отсюда $\tau_{x,\rho}$ принадлежит группе стабильности флага $U_1 \subset \ldots \subset U_n$, т. е. $\tau_{x,\rho} \in P_n$. Значит, $\tau_{x,\rho} \in P$ и $\rho \in W(P)$.

Лемма 5 [2]. *Если $\tau_{x,\rho}$ и $\tau_{y,\varphi}$ — нетривиальные трансвекции из $\mathrm{GL}(V_n)$, то их произведение $\tau_{x,\rho}\tau_{y,\varphi}$ тогда и только тогда является трансвекцией, когда $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ или $\langle\rho\rangle = \langle\varphi\rangle$.*

Лемма 6. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G, $h \in H$, $g \in G$. Тогда $[g, h] \in H$ и $[h, g] \in H$.*

Пусть G — группа, H — подгруппа G, B — подмножество элементов из G. Обозначим через $N(B)$ минимальную нормальную подгруппу в G, содержащую B. Если B — подмножество в H, то $N(B; H) = N(B) \cap H$ обозначает минимальную нормальную подгруппу в H, содержащую B.

Лемма 7. *Пусть трансвекция $\tau_{x,\rho} \in \mathrm{UT}(V_n)$ и $N(\tau_{x,\rho};\ \mathrm{UT}(V_n))$ состоит только из трансвекций. Тогда либо $x \in \langle x_1\rangle$, либо $\rho \in \langle\rho_n\rangle$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. $x \notin \langle x_1\rangle$ и $\rho \notin \langle\rho_n\rangle$. Тогда существуют $x_k \in V_n$ и $\rho_i \in V_n'$ такие, что $\rho(x_k) = a \neq 0$ $(k < n)$ и $\rho_i x = b \neq 0$ $(i > 1)$. По лемме 6 $[\tau_{x_1,\rho_i}, \tau_{x,\rho}] = \tau_{bx_1,\rho}$ и $[\tau_{x,\rho}, \tau_{x_k,\rho_n}] = \tau_{ax,\rho_n}$ принадлежат $N(\tau_{x,\rho};\ \mathrm{UT}(V_n))$. Следовательно, $\tau_{bx_1,\rho}\tau_{ax,\rho_n} \in N(\tau_{x,\rho};\ \mathrm{UT}(V_n))$. Но по лемме 5 $\tau_{bx_1,\rho}\tau_{ax,\rho_n}$ является трансвекцией только тогда, когда $x \in \langle x_1\rangle$ или $\rho \in \langle\rho_n\rangle$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 8.

1). $N(\tau_{\mu x_1,\rho};\ \mathrm{UT}(V_n)) = N(\tau_{ax_1,\rho_k};\ \mathrm{UT}(V_n)) = \langle \tau_{max_1,\rho_k}, \tau_{\lambda x_1,\rho_j} \mid m = \overline{1, p-1};$ *$k + 1 \leqslant j \leqslant n$; $a \neq 0$ — фиксированный элемент из F; $\lambda \in F\rangle$ для некоторого $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ и состоит только из трансвекций.*

2). $N(\tau_{x,\mu\rho_n};\ \mathrm{UT}(V_n)) = N(\tau_{bx_s,\rho_n};\ \mathrm{UT}(V_n)) = \langle \tau_{mbx_s,\rho_n}, \tau_{\lambda x_j,\rho_n} \mid m = \overline{1, p-1};$ *$1 \leqslant j \leqslant s - 1$; $b \neq 0$ — фиксированный элемент из F; $\lambda \in F\rangle$ для некоторого $s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и состоит только из трансвекций.*

Доказательство. 1) Известно [3], что трансвекция $\tau_{\mu x_1,\rho}$ сопряжена с трансвекцией $\tau_{\mu\alpha_k x_1,\rho_k}$, где α_k — первый отличный от нуля коэффициент в разложении $\rho = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\rho_i$. Следовательно, $N(\tau_{\mu x_1,\rho}; \mathrm{UT}(V_n)) = N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_n))$, где $a = \mu\alpha_k$.

Очевидно $\tau_{max_1,\rho_k} = \tau^m_{ax_1,\rho_k} \in N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_n))$ для любого $m = \overline{1, p-1}$. Если $i \neq k$, то $[\tau_{max_1,\rho_k}, \tau_{\lambda x_i,\rho_j}] = e$ для любой трансвекции $\tau_{\lambda x_i,\rho_j} \in \mathrm{UT}(V_n)$. Если $k \neq n$, то $[\tau_{max_1,\rho_k}, \tau_{bx_k,\rho_j}] = \tau_{max_1,b\rho_j} \in N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_n))$ для любых $b \in F$ и $j = \overline{k+1, n}$. Поэтому $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_n))$ содержит подгруппу $H = \langle \tau_{max_1,\rho_k}, \tau_{\lambda x_1\rho_j} \mid m = \overline{1, p-1};\ k+1 \leqslant j \leqslant n;\ \lambda \in F\rangle$. Так как H порождается трансвекциями с вычетной прямой $\langle x_1\rangle$, то по лемме 5 любой элемент $h \in H$ есть трансвенкция, причем $h = \tau_{max_1 \sum_{s=k}^{n} b_s\rho_s}$, где $b_k = 1$, b_s — любые элементы из F при $s = \overline{k+1, n}$, $m \in \{1, \dots, p-1\}$. С другой стороны, легко видеть, что для любой трансвекции $\tau_{\lambda x_i,\rho_j} \in \mathrm{UT}(V_n)$ $[\tau_{\lambda x_i,\rho_j}, h] = h_1 \in H$ и $\tau_{\lambda x_i,\rho_j} h \tau^{-1}_{\lambda x_i,\rho_j} = h_1 h \in H$. Так как любой элемент $\sigma \in \mathrm{UT}(V_n)$ есть произведение трансвекций $\tau_{\lambda x_i,\rho_j} \in \mathrm{UT}(V_n)$, то $\sigma h \sigma^{-1} \in H$ для любого $h \in H$. Значит, и $\sigma\tau_{max_1,\rho_k}\sigma^{-1} \in H$. Поэтому $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_n)) = H$, что требовалось доказать.

П. 2 леммы 8 доказывается аналогично.

Лемма 9. *Пусть силовская p-подгруппа P_n группы $\mathrm{GL}(V_n)$ получается пополнением из $\mathrm{UT}(V_{n-1})$, трансвекция $\tau_{ax_1,\rho_k} \in \mathrm{UT}(V_{n-1})$, $k \leqslant n-2$. При этом $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ будет состоять только из трансвекций тогда и только тогда, когда трансвекции вида $\tau = \tau_{\lambda(\alpha x_1+x_n),\rho_1-\alpha\rho_n} \notin P_n$.*

Доказательство. Пусть $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ состоит только из трансвекций. Допустим, что трансвекция вида τ принадлежит P_n. По лемме 8 для любого $b \in F$ трансвекция $\tau_{bx_1,\rho_{k+1}}$ принадлежит $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_{n-1})) \subset N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$. Так как $2 < k+1 \leqslant n-1$, то $\rho_{k+1}(\alpha x_1 + x_n) = 0$ и $[\tau, \tau_{bx_1,\rho_{k+1}}] = \tau_{\lambda(\alpha x_1+x_n),b\rho_{k+1}}$ есть трансвекция, которая принадлежит $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ (лемма 6). Но $\tau_{\lambda(\alpha x_1+x_n),b\rho_{k+1}} = \tau_{\lambda b\alpha x_1,\rho_{k+1}}\tau_{\lambda bx_n,\rho_{k+1}}$. Отсюда $\tau_{\lambda bx_n,\rho_{k+1}} \in N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$, так как этим свойством обладают трансвекции $\tau_{\lambda(\alpha x_1+x_n),b\rho_{k+1}}$ и $\tau_{\lambda b\alpha x_1,\rho_{k+1}}$. Тогда $\tau_{ax_1,\rho_k}\tau_{\lambda bx_n,\rho_{k+1}} \in N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$, но по лемме 5 не является трансвекцией, что противоречит условию. Тем самым, необходимость утверждения леммы 9 доказана.

Пусть трансвекция вида $\tau \notin P_n$. Известно [1], что в этом случае силовская p-подгруппа P_n группы $\mathrm{GL}(V_n)$, получающаяся пополнением из $\mathrm{UT}(V_{n-1})$, порождается следующими трансвекциями: $P_n = \langle \tau_{\lambda_s x_j,\rho_{j+1}}; \tau_{\lambda_s x_{i-1},\rho_n}; \tau_{\lambda_s(\alpha_i x_i+x_n),\rho_i-\alpha_i\rho_n} \mid j = \overline{1, n-2};\ j \neq i-1;\ s = \overline{1, k};\ \lambda_s \in F\rangle$ для любых фиксированных $i \in \{2, \dots, n\}$ и $\alpha_i \in F$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — базис поля F как векторного пространства над своим простым подполем. Покажем, что $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ состоит только из трансвекций. Действительно, пусть ρ — любой из функционалов ρ_{j+1} ($j = \overline{1, n-2}$, $j \neq i$), ρ_n, $\rho_i - \alpha_i\rho_n$ ($i \geqslant 2$). Тогда $px_1 = 0$ и для любой из трансвекций $\tau_{x,\rho}$, порождающих p_n, либо $[\tau_{ax_1,\rho_k}, \tau_{x,\rho}] = e$ при $\rho_k(x) = 0$, либо $[\tau_{ax_1,\rho_k}, \tau_{x,\rho}] = \tau_{ax_1,\rho_k(x)\rho} \in N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ при $\rho_k(x) \neq 0$. Отсюда следует, что $\tau_{x,\rho}\tau_{ax_1,\rho_k}\tau^{-1}_{x,\rho} = \tau_{ax_1,\rho_k-\rho_k(x)\rho}$ есть трансвекция с вычетной прямой $\langle x_1\rangle$. Так как любой элемент $\sigma \in P_n$ есть произведение трансвекций $\tau_{x,\rho}$, порождающих P_n, то $\sigma\tau_{ax_1,\rho_k}\sigma^{-1}$ тоже есть трансвекция с вычетной прямой $\langle x_1\rangle$. А произведение таких трансвекций всегда есть трансвекция с вычетной прямой $\langle x_1\rangle$ (лемма 5). Следовательно, $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)$ состоит только из трансвекций, что и требовалось доказать.

Лемма 10. *Для двух высказываний A и B пропозициональные формы $(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$ логически эквивалентны.*

Перейдем к доказательству теоремы. Известно [1], что любая силовская

p-подгруппа $P \in \mathfrak{P}(V)$ изоморфна некоторой силовской p-подгруппе $T \in \mathfrak{S}(V)$, причем существует такое взаимно однозначное линейное отображение $\eta : V \to \to V$, что $\eta \overline{\mathrm{GL}}(V) \eta^{-1} = \overline{\mathrm{GL}}(V)$ и $\eta P \eta^{-1} = T$. Очевидно, что при таком отображении $\dim V^0(T) = \dim V^0(P)$ и $\dim W^0(T) = \dim W^0(P)$, а любая нормальная подгруппа $\eta H \eta^{-1}$ группы T обладает теми же свойствами в T, что и нормальная подгруппа H в группе P. Поэтому при доказательстве теоремы можно считать, что $P \in \mathfrak{S}(V)$, т. е. $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.

Докажем необходимость каждого из трех утверждений теоремы.

1). Пусть $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 0$. Допустим, что силовская p-подгруппа P содержит нормальную подгруппу H, состоящую только из трансвекций. Если трансвекция $\tau_{x,\rho} \in \mathrm{H}$, то $N(\tau_{x,\rho}) \subseteq H$ и состоит только из трансвекций.

Пусть $N(\tau_{x,\rho}) = \langle \tau_{x,\rho} \rangle$. Если существует трансвекция $\tau_{y,\varphi} \in P$ такая, что либо $\rho(y) \neq 0$ и $\varphi(x) = 0$, либо $\varphi(x) \neq 0$ и $\rho(y) = 0$, то по лемме 6 либо $[\tau_{x,\rho}, \tau_{y,\varphi}] = \tau_{x,\rho(y)\varphi} \in N(\tau_{x,\rho})$, либо $[\tau_{y,\varphi}, \tau_{x,\rho}] = \tau_{y,\varphi(x)\rho} \in N(\tau_{x,\rho})$. И в том, и в другом случае получаем противоречие тому, что $N(\tau_{x,\rho}) = \langle \tau_{x,\rho} \rangle$. Значит, для любой трансвекции $\tau_{y,\varphi} \in P$ истинно высказывание $\rho(y) = 0$ или $\varphi(x) \neq 0$ и $\rho(y) \neq 0$ или $\varphi(x) = 0$. По лемме 10 это означает, что для любой трансвекции $\tau_{y,\varphi} \in P$ либо $\rho(y) = 0$ и $\varphi(x) = 0$, либо $\rho(y) \neq 0$ и $\varphi(x) \neq 0$. Но последнее неверно, так как для $\tau_{x,\rho} \in P$ $\rho(x) = 0$. Следовательно, для любой трансвекции $\tau_{y,\varphi} \in P$ $\rho(y) = 0$ и $\varphi(x) = 0$. Последнее означает, что $\rho \in V^0(P)$ и $x \in W^0(P)$. Это противоречит условию $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 0$. Значит, $N(\tau_{x,\rho}) \neq \langle \tau_{x,\rho} \rangle$.

Заметим, что если $N(\tau_{x,\rho}) = \langle \tau_{x,\rho} \rangle$, то из доказанного выше и леммы 2 следует эквивалентность этого условия равенству $\tau_{x,\rho}\sigma = \sigma\tau_{x,\rho}$ для любой трансвекции $\sigma \in P_n$, а значит, и для любого элемента из P. Следовательно, $N(\tau_{x,\rho})$ содержится в центре $Z(P)$ группы P.

Рассмотрим $N(\tau_{x,\rho}; P_n)$. Если $\tau_{x,\rho}$ принадлежит центру $Z(P_n)$ группы P_n для любого n, то $\tau_{x,\rho} \in Z(P)$, откуда $N(\tau_{x,\rho}) = \langle \tau_{x,\rho} \rangle$. Но $N(\tau_{x,\rho}) \neq \langle \tau_{x,\rho} \rangle$. Следовательно, существует такое n, что $\tau_{x,\rho} \in P_{n-1}$ и $\tau_{x,\rho} \notin Z(P_{n-1})$. Не ограничивая общности, можно считать $P_{n-1} = \mathrm{UT}(V_{n-1})$. Так как $N(\tau_{x,\rho})$ состоит только из трансвекций, то таким же свойством обладают $N(\tau_{x,\rho}; P_n)$ для всех n. В частности, $N(\tau_{x,\rho}; \mathrm{UT}(V_{n-1}))$ состоит только из трансвекций. Но из лемм 7 и 8 следует, что либо $N(\tau_{x,\rho}; \mathrm{UT}(V_{n-1})) = N(\tau_{ax_1,\rho_k}; \mathrm{UT}(V_{n-1}))$, либо $N(\tau_{x,\rho}; \mathrm{UT}(V_{n-1})) = N(\tau_{bx_s,\rho_{n-1}}; \mathrm{UT}(V_{n-1}))$, причем $2 \leqslant k \leqslant n-2$ и $2 \leqslant s \leqslant n-2$, поскольку $\tau_{x,\rho} \notin Z(\mathrm{UT}(V_{n-1})) = \langle \tau_{\lambda x_1,\rho_{n-1}} \mid \lambda \in F \rangle$. Следовательно, либо $N(\tau_{x,\rho}) = N(\tau_{ax_1,\rho_k})$, либо $N(\tau_{x,\rho}) = N(\tau_{ax_s,\rho_{n-1}})$ для любого фиксированного $a \in F$.

Рассмотрим случай $N(\tau_{x,\rho}) = N(\tau_{ax_1,\rho_k})$ (второй случай рассматривается аналогично). Так как $N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P\ )$ состоит только из трансвекций и $k \leqslant \leqslant n-2$, то по лемме 9 трансвекции вида $\tau = \tau_{\lambda(\alpha x_1 + x_n),\rho_1 - \alpha\rho_n} \notin P_n$. Следовательно, для любого α из F $\rho_1 - \alpha\rho_n \notin W(P)$.

Пусть σ — такой элемент из $\mathrm{GL}(V_n)$, что $\sigma \mathrm{UT}(V_n) \sigma^{-1} = P_n$. Поскольку трансвекции вида $\tau \notin P_n$, то $\sigma x_1 = x_1$ [1]. Поэтому при переходе от P_n к $\sigma^{-1} P_n \sigma = \mathrm{UT}(V_n)$ получим $\sigma^{-1}\tau_{ax_1,\rho_k}\sigma = \tau_{\sigma^{-1}ax_1,\rho_k\sigma} = \tau_{ax_1,\mu}$, где $\mu = \rho_k\sigma$, а $\sigma^{-1} N(\tau_{ax_1,\rho_k}; P_n)\sigma = N(\tau_{ax_1,\mu}; \mathrm{UT}(V_n)) = N(\tau_{bx_1,\rho_m}; \mathrm{UT}(V_n))$ (по лемме 8) для некоторого $b \in F$. Так как $\tau_{ax_1,\rho_k} \notin Z(P_n)$, то $\tau_{bx_1,\rho_m} \notin Z(\mathrm{UT}(V_n))$, а значит, $m \leqslant n-1$. Поскольку $P_n \subset P_{n+1}$, то $\mathrm{UT}(V_n) \subset \sigma^{-1} P_{n+1} \sigma = Q_{n+1}$. По лемме 9 трансвекции вида $\tau_{\lambda(\alpha x_1 + x_{n+1}),\rho_1 - \alpha\rho_{n+1}} \notin Q_{n+1}$ Следовательно, трансвекции $\sigma\tau_{\lambda(\alpha x_1 + x_{n+1}),\rho_1 - \alpha\rho_{n+1}}\sigma^{-1} = \tau_{\sigma\lambda(\alpha x_1 + x_{n+1}),(\rho_1 - \alpha\rho_{n+1})\sigma^{-1}}$ не принадлежат P_{n+1}. Но $\sigma x_1 = x_1$, $\sigma x_{n+1} = x_{n+1}$, $\rho_1\sigma^{-1} = \rho_1$, $\rho_{n+1}\sigma^{-1} = \rho_{n+1}$ [1]. Поэтому трансвекции $\tau_{\lambda(\alpha x_1 + x_{n+1}),\rho_1 - \alpha\rho_{n+1}} \notin P_{n+1}$, т. е. $\rho_1 - \alpha\rho_{n+1} \notin W(P)$ для любого $\alpha \in F$.

Аналогично можно показать, что P_s не содержит трансвекций вида $\tau_{\lambda(\alpha x_1 + x_s),\rho_1 - \alpha\rho_s}$, т. е. $\rho_1 - \alpha\rho_s \notin W(P)$ для любых $\alpha \in F$ и $s \geqslant n$. Кроме того,

$\rho_1 - \alpha\rho_s \notin W(P)$ и для всех $s = \overline{1, n-1}$, $\alpha \in F$, так как $P_{n-1} = \mathrm{UT}(V_{n-1})$ не содержит трансвекций с неподвижными гиперплоскостями $(\rho_1 - \alpha\rho_s)^0$. Следовательно, по лемме 1 $\dim W^0(P) = 1$, что противоречит условию. Итак, необходимость п. 1 теоремы доказана.

2). Пусть $\dim V^0(P) = 0$ и $\dim W^0(P) = 1$ (случай $\dim V^0(P) = 1$ и $\dim W^0(P) = 0$ рассматривается аналогично). Тогда $W^0(P) = \langle x \rangle$. Не ограничивая общности, можно считать $W^0(P) = \langle x_1 \rangle$. Покажем, что $M(\tau_{x_1,\rho}) = \langle \tau_{\lambda x_1, \rho} \mid \rho \in W(P),\ \lambda \in F \rangle$ есть максимальная нормальная подгруппа в P, состоящая только из трансвекций.

По лемме 3 $M(\tau_{x_1,\rho}) \subset P$. По лемме 5 $M(\tau_{x_1,\rho})$ состоит только из трансвекций. Так как для любой трансвекции $\tau_{y,\mu} \in P$ (а все они порождают P) $\mu x_1 = 0$ по определению $W^0(P)$, то $[\tau_{x_1,\rho}, \tau_{y,\mu}] = \tau_{x_1,\rho(y)\mu}$ и $\tau_{y,\mu}\tau_{x_1,\rho}\tau_{y,\mu}^{-1} = \tau_{x_1,\rho-\rho(y)\mu}$ принадлежит $M(\tau_{x_1,\rho})$. Следовательно, $M(\tau_{x_1,\rho})$ есть нормальная подгруппа в P.

Допустим, что $M(\tau_{x_1,\rho})$ не есть максимальная подгруппа. Тогда существует трансвекция $\tau_{y,\varphi}$ $(y \notin \langle x_1 \rangle)$ такая, что нормальное замыкание группы $\langle M(\tau_{x_1,\rho}), \tau_{y,\varphi} \rangle$ в P есть нормальная подгруппа, состоящая только из трансвекций. Но так как в $W(P)$ существует $\rho \notin \langle \varphi \rangle$, а $y \notin \langle x_1 \rangle$, то по лемме 5 $\tau_{x_1,\rho}\tau_{y,\varphi}$ не есть трансвекция. Из этого противоречия следует, что $M(\tau_{x_1,\rho})$ есть максимальная нормальная подгруппа в P, состоящая только из трансвекций.

Допустим, что существует еще одна максимальная нормальная подгруппа $M \subset P$, состоящая только из трансвекций. Тогда существует трансвекция $\tau_{x,\mu} \in M$, где $x \notin \langle x_1 \rangle$. Кроме того, существует $\rho \in W(P)$ такой, что $\rho(x) \neq 0$. Поскольку $\tau_{x_1,\rho} \in P$ и $\mu(x_1) = 0$ (так как $\mu \in W(P)$), то $[\tau_{x_1,\rho}, \tau_{x,\mu}] = \tau_{x_1,\rho(x)\mu} \in M$ по лемме 6.

Пусть $y \in V$ такой, что $\mu(y) = 1$. Тогда $V = V_1 \oplus \langle y \rangle$, где $V_1 = \mu^0$. Во множестве векторов $\{z = y + v \mid v \in V_1\}$ есть такой вектор z_0, что трансвекция $\tau_{z_0,\varphi} \in P$. Действительно, в противном случае $y + v \notin V(P)$ для любого $v \in V_1$, откуда по лемме 1 $\dim V^0(P) = 1$, что противоречит условию утверждения.

Итак, $\tau_{y+v,\varphi} \in P$ для некоторого $v \in V_1$. Так как $\varphi(x_1) = 0$ $(\varphi \in W(P))$, то $[\tau_{x_1,\rho(x)\mu}, \tau_{y+v,\varphi}] = \tau_{x_1,\rho(x)\varphi} \in M$ по лемме 6. Поскольку $x \notin \langle x_1 \rangle$ и $\mu \notin \langle \varphi \rangle$ (так как $\varphi(y+v) = 0$, а $\mu(y+v) = 1$), то $\tau_{x_1,\rho(x)\varphi}\tau_{x,\mu} \in M$, но не является трансвекцией, что противоречит определению M. Значит, существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M(\tau_{x_1,\rho})$ в P, состоящая только из трансвекций.

3). Пусть $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 1$. Из доказательства необходимости п. 2 следует, что P содержит максимальные нормальные подгруппы $M(\tau_{x,\rho})$, где $\langle x \rangle = W^0(P)$, и $M(\tau_{z,\varphi})$, где $\langle \varphi \rangle = V^0(P)$. Тогда $M(\tau_{x,\rho}) \cap M(\tau_{z,\varphi}) = \langle \tau_{\lambda x,\varphi} \mid \lambda \in F \rangle$. Так как для любой трансвекции $\tau_{z,\rho} \in P$ $\langle z \rangle \subset \varphi^0$ и $\langle x \rangle \subset \rho^0$, то по лемме 2 $\tau_{z,\rho}\tau_{\lambda x,\varphi} = \tau_{\lambda x,\varphi}\tau_{z,\rho}$. А поскольку P порождается своими трансвекциями, то $\tau_{\lambda x,\varphi} \in Z(P)$, т. е. P имеет нетривиальный центр.

Пусть $\sigma \in Z(P)$, $\sigma \neq \tau_{\lambda x,\varphi}$. Очевидно, что $\tau_{\lambda x,\varphi} \in P_n$ и $\sigma \in P_n$ для некоторого n. Тогда $\langle \tau_{\lambda x,\varphi}, \sigma \rangle \subseteq Z(P_n)$ и $\operatorname{card} Z(P_n) \geqslant \operatorname{card} \langle \tau_{\lambda x,\varphi}, \sigma \rangle > \operatorname{card} \langle \tau_{\lambda x,\varphi} \rangle = \operatorname{card} F$. Получили противоречие, так как $\operatorname{card} Z(P_n) = \operatorname{card} Z(\mathrm{UT}(V_n)) = \operatorname{card} \langle \tau_{\lambda x_1,\rho_n} \mid \lambda \in F \rangle = \operatorname{card} F$. Значит, $Z(P) = \langle \tau_{\lambda x,\varphi} \mid \lambda \in F \rangle$.

Осталось показать, что P не содержит отличных от $M(\tau_{x,\rho})$ и $M(\tau_{z,\varphi})$ максимальных нормальных подгрупп, состоящих только из трансвекций. Допустим противное, и пусть M — такая подгруппа. Тогда M содержит некоторую трансвекцию $\tau_{u,\nu}$, где $\langle u \rangle \neq \langle x \rangle$, $\langle \nu \rangle \neq \langle \varphi \rangle$. Поскольку $W^0(P) = \langle x \rangle$, то существует $\mu \in W(P)$ такой, что $\mu(u) = 1 \neq 0$. По лемме 3 $\tau_{x,\mu} \in P$ и по лемме 6 $[\tau_{x,\mu}, \tau_{u,\nu}] = \tau_{x,\nu} \in M$. Аналогично, из $V^0(P) = \langle \varphi \rangle$ следует существование $y \in V(P)$ такого, что $\nu(y) = 1 \neq 0$. По лемме 3 $\tau_{y,\varphi} \in P$ и $[\tau_{u,\nu}, \tau_{y,\varphi}] = \tau_{u,\varphi} \in M$ по лемме 6. Тогда $\tau_{x,\nu}\tau_{u,\varphi} \in M$, но не является трансвекцией по лемме 5. Получили противоречие к определению M. Значит, P не содержит отличных от $M(\tau_{x,\rho})$ и $M(\tau_{z,\varphi})$ максимальных нормальных подгрупп, состоящих только из трансвекций.

Достаточность каждого из трех пунктов теоремы теперь очевидна. Действительно, если P не содержит нормальной подгруппы, состоящей только из трансвекций, то $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 0$, так как в противном случае согласно утверждению 1 и необходимости пп. 2 и 3 теоремы, P содержит хотя бы одну максимальную нормальную подгруппу, состоящую только из трансвекций.

Если P содержит единственную максимальную нормальную подгруппу, состоящую только из трансвекций, то в силу утверждения 1 и необходимости пп. 1 и 3 теоремы условия $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 0$ и $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 1$ невозможны, а значит, либо $\dim V^0(P) = 0$ и $\dim W^0(P) = 1$, либо $\dim V^0(P) = 1$ и $\dim W^0(P) = 0$.

Достаточность п. 3 теперь очевидна. Теорема доказана.

Следствие. $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 1$ *тогда и только тогда, когда* P *имеет нетривиальный центр* $Z(P) = \langle \tau_{\lambda x, \rho} \mid \lambda \in F,\ \langle x \rangle = W^0(P),\ \langle \rho \rangle = V^0(P) \rangle$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы.

Достаточность. Пусть $\sigma \in Z(P)$. По лемме 2 $\sigma\tau_{a,\varphi} = \tau_{a,\varphi}\sigma$ для любой трансвекции $\tau_{a,\varphi} \in P$ тогда и только тогда, когда $V(P) \subseteq N$ и $R \subseteq W^{\top}(P) = W^0(P)$, где N — неподвижное, а R — вычетное пространства σ. По следствию утверждения 1 $\dim W^0(P) \leqslant 1$. Если $\dim W^0(P) = 0$, то $\dim R = 0$ и $\sigma = 1_V$. Если же $\dim R = 1$, то σ — трансвекция с вычетной прямой $\langle x \rangle = W^0(P)$, так как $\det \sigma = 1$, поскольку $\sigma \in P$.

Допустим $\tau_{\lambda x, \rho}$ и $\tau_{\mu x, \nu}$ принадлежат $Z(P)$, причем $\langle \rho \rangle \neq \langle \nu \rangle$. Поскольку $V(P) \subseteq N_1$ и $V(P) \subseteq N_2$, где N_1 и N_2 — неподвижные пространства $\tau_{\lambda x, \rho}$ и $\tau_{\mu x, \nu}$, то для любого $a \in V(P)$ $\tau_{\lambda x, \rho} a = a$ и $\tau_{\mu x, \nu} a = a$. Отсюда для любого $\varphi \in \langle \rho, \nu \rangle \subset W(P)$ $\varphi(a) = 0$ и $\dim V^0(P) \geqslant 2$, что противоречит следствию утверждения 1. Значит, $\langle \rho \rangle = \langle \nu \rangle$, $Z(P) = \langle \tau_{\lambda x, \rho} \mid \lambda \in F,\ \langle x \rangle = W^0(P),\ \langle \rho \rangle = V^c(P) \rangle$ и $\dim V^0(P) = \dim W^0(P) = 1$, что и требовалось доказать.

1. *Косман Е. Г.* Построение силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 173—179.
2. *О'Мира О.* Общая теория изоморфизмов линейных групп // Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами.— М. : Мир, 1980.— С. 58—118.
3. *Павлов П. П.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над простым полем характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1952.— **16**, № 5.— С. 437—458.

Ин-т ботаники АН УССР, Киев

Получено 07.08.86