УДК 512.542

Л. А. Шеметков

Композиционные формации и радикалы конечных групп

В работе [1] изучались $\mathfrak{F}$ -радикалы конечных групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — радикальная локальная формация. Было показано, что хорошо известные свойства подгрупп $F(G)$, $F_p(G)$, $\tilde{F}(G)$ и др. являются проявлением общей формационной закономерности. Однако в рамки работы [1] не вкладывались результаты о квазинильпотентном радикале $F^*(G)$, поскольку формация $\mathfrak{N}^*$ квазинильпотентных групп не является локальной. Нетрудно показать, что класс $\mathfrak{N}^*$ является композиционной (в смысле [2]) формацией. Поэтому вполне естественной представляется задача расширения результатов работы [1] путем рассмотрения радикальных композиционных формаций. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения можно найти в книге [2]. Положим еще $\pi'(\mathfrak{F}) = (\pi(\mathfrak{F}))'$.

Обозначим через $\mathscr{K}(G)$ совокупность всех композиционных факторов группы G. Напомним, что композиционный экран строится следующим образом. Каждой простой группе H сопоставляем некоторую (возможно пустую) формацию $f(H)$. Затем для любой группы $G \neq 1$ полагаем $f(G) = \bigcap f(H/K)$, где H/K пробегает $\mathscr{K}(G)$. Положим еще $f(1) = \mathfrak{G}$ — класс всех групп. Построенная функция f и есть композиционный экран.

Секцию (главный фактор) H/K группы G будем называть f^+-секцией (главным f^+-фактором), если $f(H/K) \neq \varnothing$.

Лемма 1. *Пусть f — композиционный экран, $L \neq 1$ — характеристически простая f-гиперцентральная нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*: 1) *L — p-группа, $G/C_G(L) \in \mathfrak{N}_p f(p)$*; 2) *$L$ f-центральна в G.*

Доказательство. По определению f-гиперцентральности, G f-стабилизирует G-главный ряд $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = 1$, т. е. $G/C_i \in f(L_{i-1}/L_i)$, $C_i = C_G(L_{i-1}/L_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ввиду условия леммы $f(L_{i-1}/L_i) = f(L)$ для любого i. Поэтому $G/D \in f(L)$, где $D = \bigcap_i C_i$. Группу D/C, где $C = C_G(L)$, можно рассматривать как стабильную группу автомормизмов группы L. Рассмотрим два случая.

Пусть L — абелева p-группа. Тогда D/C также является p-группой, а значит, $G/C \in \mathfrak{N}_p f(p)$.

Пусть L неабелева. По лемме 9.3 из [2] имеем $\pi(D/C) \subseteq \pi(F(L))$. А так как $F(L) = 1$, то $D = C$ и $G/C \in f(L)$, что и требуется.

Лемма 2. *Пусть f — композиционный экран, M — некоторая нормальная подгруппа группы G. Если $M \in \langle f \rangle$, то каждый G-главный фактор группы M f-централен в M.*

Доказательство. Пусть H/K — G-главный фактор группы M. По условию он f-гиперцентрален в M/K. Предположим, что H/K не f-централен в M. Тогда по лемме 1 H/K является p-группой и $M/C_M(H/K) \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Поскольку $G/C_G(H/K)$, а значит, и $M/C_M(H/K)$ не имеет неединичных нормальных p-подгрупп, то получаем $M/C_M(H/K) \in f(p)$, и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние композиционные экраны формации $\mathfrak{F}$, H/K — некоторый главный f_2^+-фактор группы G. Если нормальная подгруппа A группы G действует f_1-тождественно на H/K, то A действует и f_2-тождественно на H/K.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(H/K)$. Рассмотрим два случая.

Пусть H/K — абелева p-группа. По лемме 3.12 из [2] имеем $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$. По условию $AC/C \in f_1(p)$. Поэтому $AC/C \in \mathfrak{N}_p f_2(p)$. Но так как G/C не имеет неединичных нормальных p подгрупп, то из последнего вытекает $AC/C \in f_2(p)$.

Пусть теперь H/K — неабелева группа. Тогда группы H/K и HC/C G-изоморфны. Поэтому из справедливости леммы для G/C вытекает ее справедливость и для G. Не ограничивая общности положим $C = K = 1$. По условию $A \in f_1(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $A \cap H = 1$, то $A \subseteq C = 1$, и доказывать нечего. Пусть $A \supseteq H$. Тогда по лемме 2 H f_2-центральна в A. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь композиционные экраны радикальных формаций. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется радикальной, если она одновременно S_n-замкнута и R-замкнута, т. е. выполняются следующие условия: 1) $H \triangleleft G \in \mathfrak{F}$ влечет $H \in \mathfrak{F}$; 2) из $G = AB$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Пустая формация считается радикальной. Композиционный экран назовем радикальным, если все его значения являются радикальными формациями.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная композиционная формация. Тогда ее максимальный внутренний композиционный экран радикален.*

Доказательство. Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 3.2 из [2] он обладает следующими свойствами:

1) $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;

2) $f(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой характеристически простой группы H.

Таким образом, достаточно установить, что формация $f(p)$ радикальна для любого простого p.

Пусть $G = AB$, $A \in f(p)$, $B \in f(p)$, $A \lhd G$, $B \lhd G$. Пусть H — группа порядка p. Рассмотрим сплетение $\Gamma = H \wr G = K \leftthreetimes G$, где K — база сплетения, являющаяся элементарной абелевой p-группой. Тогда $KA \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \subseteq \mathfrak{F}$. Аналогично $KB \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Из R-замкнутости $\mathfrak{F}$ теперь следует $\Gamma = KG \in \mathfrak{F}$. Следовательно, K f=гиперцентральна в Γ. Тогда по лемме 1 имеем $\Gamma/C_\Gamma(K) \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$, т. е. K f-центральна в Γ. Теперь остается заметить, что $\Gamma/C_\Gamma(K) \simeq G$, и получаем $G \in f(p)$.

Пусть теперь $N \lhd G \in f(p)$, H — группа порядка p. Рассмотрим сплетение $H \wr G = K \leftthreetimes G$, где K — база сплетения. Так как $KG \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и формация $\mathfrak{F}$ S_n-замкнута, то $KN \in \mathfrak{F}$. Применяя лемму 1, видим, что K f-центральна в KN, т. е. $KN/C_{KN}(K) \in f(p)$. Так как $K = C_{KN}(K)$, то $KN/K \simeq N \in f(p)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть f — внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Если f радикален, то формация $\mathfrak{F}$ является радикальной.*

Доказательство. Пусть экран f радикален. Если $G = AB$, где A и B нормальны в G и принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $A \cap B \neq 1$, и пусть L — содержащаяся в $A \cap B$ минимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 2 L является f-центральной как A, так и в B. Значит, $AC/C \in f(L)$, $BC/C \in f(L)$, где $C = C_G(L)$. Из R-замкнутости $f(L)$ теперь получаем $ABC/C \in f(L)$, т. е. L f-центральна в G. А так как по индукции $G/L \in \mathfrak{F}$, то и $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $N \lhd H \in \mathfrak{F}$, L — содержащаяся в N минимальная нормальная подгруппа группы H. По индукции $N/L \in \mathfrak{F}$. Так как L f-центральна в H, то $H/C_H(L) \in f(L)$. Но тогда $NC_H(L)/C_H(L) \simeq N/C_N(L) \in f(L)$, отсюда получаем $N \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть f — внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если f радикален, то формация $\mathfrak{F}$ радикальна*;

2) *если $\mathfrak{F}$ радикальна, то ее максимальный внутренний композиционный экран φ радикален, причем $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p, $\varphi(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой простой группы H.*

Доказательство вытекает из теоремы 3.2, леммы 3.15 из [2] и лемм 4 и 5.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая радикальная формация, то каждая группа G обладает $\mathfrak{F}$-радикалом $G_{\mathfrak{F}}$, совпадающим с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Рассмотрим свойства $\mathfrak{F}$-радикалов в случае, когда $\mathfrak{F}$ — радикальная композиционная формация. Основная идея заключена в следующем определении.

Определение. *Пусть f — экран формации $\mathfrak{F}$, H/K — нормальная f^+-секция группы G. Обозначим через $C_G^f(H/K)$ произведение всех тех нормальных подгрупп A группы G, которые f-централизуют секцию H/K (другими словами, для которых $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$). Подгруппу $C_G^f(H/K)$ назовем f-централизатором секции H/K в группе G.*

Так как H/K — f^+-секция, то единичная подгруппа ее f-централизует, так что в рассматриваемой ситуации множество нормальных подгрупп, f-централизующих H/K, непусто.

Лемма 6. *Пусть f — внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, H/K — некоторый главный f^+-фактор группы G. Если нормальные подгруппы A_1 и A_2 группы G действуют f-тождественно на H/K, то и A_1A_2 действует f-тождественно на H/K. В частности, $C_G^f(H/K)$ f-централизует секцию H/K.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(H/K)$. По условию $A_iC/C \in f(H/K)$, $i = 1, 2$. Пусть φ — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$.

Пусть H/K — p-группа. По теореме 1 имеем $\mathfrak{N}_p f(p) = \varphi(p)$, причем формация $\varphi(p)$ радикальна. Следовательно, $A_1A_2C/C \in \varphi(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Поскольку G/C и A_1A_2C/C не имеют неединичных нормальных p-подгрупп, то из последнего следует $A_1A_2C/C \in f(p)$, и лемма в этом случае верна.

Пусть H/K — неабелева группа. Поскольку H/K и HC/C G-изоморфны, то не ограничивая общности положим $C = 1$. Так как экран f внутренний, то $f(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда ввиду R-замкнутости $\mathfrak{F}$ получаем $A_1A_2 \in \mathfrak{F}$. Если A_1A_2 совпадает с A_1 или A_2, то лемма верна. Поэтому пусть $A_i \supseteq H$, $i = 1, 2$ (если $A_i \cap H = 1$, то $A_i \subseteq C = 1$). Теперь применим лемму 2 к подгруппам H и $A_1A_2 \in \mathfrak{F}$. По лемме 2 H f-центральна в A_1A_2, что и требовалось доказать.

Итак, в условиях леммы 6 $C_G^f(H/K)$ является наибольшей нормальной подгруппой, действующей f-тождественно на H/K.

Лемма 7. *Пусть f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$, H/K — неабелев главный f^+-фактор группы G. Если формация $\mathfrak{F}$ разрешима, то $C_G^f(H/K) = C_G(H/K)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $C_G(H/K) = 1$. Пусть нормальная подгруппа $A \neq 1$ группы G действует f-тождественно на H/K. Это значит, что $A \in f(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $C_G(H/K) = 1$, то $A \supseteq H$. Таким образом, $H \subseteq A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, т. е. H абелева. Получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть f — внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, $\{H_i/K_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех главных f^+-факторов группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}} \subseteq D = \bigcap_{i \in I} C_G^f(H_i/K_i)$, причем в группе D все ее главные f^+-факторы f-центральны.*

Замечание. В случае $I = \varnothing$ полагаем $D = G$.

Доказательство. По теореме 1 максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{F}$ является радикальным. Так как $f \leqslant h$, то каждый главный f^+-фактор группы G является и главным h^+-фактором. Применяя леммы 3 и 6, видим, что для любого $i \in I$ выполняется равенство $C_G^f(H_i/K_i) = C_G^h(H_i/K_i)$. Так как $D \subseteq M_i = C_G^f(H_i/K_i)$, то $DC_G(H_i/K_i)/C_G(H_i/K_i)$ является нормальной подгуппой группы $M_i/C_G(H_i/K_i)$. Так как $M_i/C_G(H_i/K_i)$ входит в S_n-замкнутую формацию $h(H_i/K_i)$, то $DC_G(H_i/K_i)/C_G(H_i/K_i) \in h(H_i/K_i)$. Последнее означает, что D h-централизует H_i/K_i. Отсюда и из леммы 3 вытекает, что D f-централизует H_i/K_i для любого $i \in I$. Следовательно, в группе D все ее G-главные f^+-факторы f-центральны. Поскольку один из главных рядов группы D можно получить уплотнением ее G-главного ряда, то и получаем, что в D все ее главные f^+-факторы f-центральны.

Покажем теперь, что $G_{\mathfrak{F}}$ f-централизует H_i/K_i для любого $i \in I$. Очевидно, $G_{\mathfrak{F}}K_i \cap H_i$ совпадает либо с H_i, либо с K_i. Если $G_{\mathfrak{F}}K_i \cap H_i = K_i$, то в G/K_i подгруппы H_i/K_i и $G_{\mathfrak{F}}K_i/K_i$ поэлементно перестановочны, а значит, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(H_i/K_i)$. Если же $G_{\mathfrak{F}}K_i \supseteq H_i$, то применяя лемму 2 к цепи $G/K_i \supseteq G_{\mathfrak{F}}K_i/K_i \supseteq H_i/K_i$, видим, что H_i/K_i f-центральна в $G_{\mathfrak{F}}K_i/K_i$, а значит, $G_{\mathfrak{F}}$ f-централизует H_i/K_i. Теорема доказана.

Рассмотрим приложения теоремы 2. Следующая теорема является прямым следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть f — внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$. Пусть значение f непусто на каждом главном факторе группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные факторы группы G.*

Теорема 4. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$. И пусть $D = \bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные f^+-факторы группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}} \subseteq D$, причем $D^{\mathfrak{F}}$ является разрешимой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.*

Доказательство. По теореме 2 $G_{\mathfrak{F}} \subseteq D$. По теореме 1 каждый главный фактор, не являющийся f^+-фактором, является абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой. Применяя теорему 2 и тот же факт, что f-центральные главные факторы централизуются $\mathfrak{F}$-корадикалом, получаем, что каждый D-главный фактор группы $D^{\mathfrak{F}}$ либо является абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой, либо f-централен в D и централизуется группой $D^{\mathfrak{F}}$. Допустим, что существует D-главный ряд $D^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H \supset K \supset L \supset \ldots \supset 1$, в котором H/K — абелева $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группа, а K/L f-централен в D. Тогда K/L — абелева $\pi(\mathfrak{F})$-группа и $K/L \subseteq Z(D^{\mathfrak{F}}/L)$. Поэтому $H/L = A/L \times K/L$, где $A \lhd D$, причем $A/L \simeq H/K$. Таким образом, можно перейти к D-главному ряду $D^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H \supset A \supset L \supset \ldots \supset 1$, в котором H/A является f-центральным главным фактором группы D, а A/L — абелева $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группа. Такой процесс замены через определенное число шагов приведет к появлению f-центрального в D главного фактора вида $D^{\mathfrak{F}}/R$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что каждый D-главный фактор группы $D^{\mathfrak{F}}$ должен быть абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — формация всех разрешимых $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-групп. Если $G_{\mathfrak{H}} = 1$, то $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C^f_G(H/K)$, где H/K пробегает все главные f^+-факторы группы G.*

Следствие 4.2. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Тогда для любой группы G выполняется равенство $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap \tilde{C}^f_G(H/K)$, где H/K пробегает все главные факторы группы G.*

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная композиционная формация. Тогда $\mathfrak{F}$-радикал группы $C_G(G_{\mathfrak{F}})G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ является единичной группой.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(G_{\mathfrak{F}})$. Нам необходимо доказать, что группа $CG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ имеет единичный $\mathfrak{F}$-радикал. Предположим, что это не так. Пусть $T/G_{\mathfrak{F}}$ — неединичный $\mathfrak{F}$-радикал группы $CG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $T = (C \cap T)G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим главный ряд группы T:

$$T \supset \ldots \supset G_{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset 1. \tag{1}$$

Очевидно, $T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. По теореме 3 справедливо равенство

$$T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C^f_T(H/K), \tag{2}$$

где H/K пробегает все главные факторы ряда (1). Заметим теперь, что ввиду $T/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ при $K \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ справедливо $C^f_T(H/K) = T$. Если же $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то $(C \cap T) \subseteq C^f_T(H/K)$, а поскольку из (2) вытекает $G_{\mathfrak{F}} \subseteq C^f_T(H/K)$, то получаем следующее: $(C \cap T)G_{\mathfrak{F}} = T \subseteq C^f_T(H/K)$. Следовательно, $C^f_T(H/K) = T$ для любого главного фактора H/K группы T. Отсюда и из (2) получаем $T = T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим конкретные примеры. Первый из них связан с формацией $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп, где π — фиксированное множество простых чисел. Прямое приложение теоремы 4 и леммы 7 приводит к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть D — пересечение централизаторов всех главных π-факторов и неабелевых главных факторов группы G. Тогда D совпадает с $\mathfrak{F}$-радикалом группы G, где $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых π-нильпотентных групп.*

Напомним, что группа называется π-нильпотентной, если она p-нильпотентна для любого $p \in \pi$.

Отметим два особых случая теоремы 6. При $\pi = \varnothing$ из теоремы 6 вытекает такое утверждение.

Следствие 6.1. *Разрешимый радикал неразрешимой группы G совпадает с пересечением централизаторов всех неабелевых главных факторов группы G.*

Следствие 6.2. *Пусть $\pi = \pi(F(G))$. Тогда $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных π-факторов и неабелевых главных факторов группы G.*

В качестве еще одного примера рассмотрим формацию $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп. Группа M называется квазинильпотентной [4, с. 124], если $C_M(H/K)H = M$ для любого главного фактора H/K группы M. Через $F^*(G)$ обозначен $\mathfrak{N}^*$-радикал группы G. Нетрудно заметить, что если S — простая группа, то form S состоит из прямых произведений групп, изоморфных S. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{N}^*$ имеет такой радикальный композиционный экран f, что $f(S) = \text{form } S$ для любой неабелевой простой группы S. Ясно также, что если H/K — главный фактор группы G, то $C_G^f(H/K)$ совпадает с наибольшей нормальной подгруппой, индуцирующей на H/K лишь внутренние автоморфизмы. Таким образом, из теоремы 5 в качестве следствия получается следующий результат [4, с. 127]: $C_G(F^*(G)) \subseteq \subseteq F(G)$.

1. *Шеметков Л. А.* О $\mathfrak{F}$-радикалах конечных групп // Докл. АН БССР.— 1981.— **25**, № 10.— С. 869—872.
2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М. : Наука, 1978.— 272 с.
3. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций // Докл. АН БССР.— 1984.— **28**, № 2.— С. 101—103.
4. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups III.— Berlin etc. : Springer, 1982.— 454 S.

Гомел. ун-т

Получено 02.12.87