УДК 517.98+62

До Конг Хань

О композиции линейных динамических систем

Теорема умножения передаточных функций имеет многочисленные приложения [1—4]. Целью настоящей работы являются обобщение этой теоремы и дальнейшее исследование понятия композиции (последовательное соединение) линейных нестационарных динамических систем.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \quad x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \\ v(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t), \quad v(t) \in V, \end{aligned} \tag{1}$$

где X, U, V — гильбертовы пространства, операторы $A(t) \in [X, X]$, $B(t) \in$

$\in [U, X]$, $C(t) \in [X, V]$, $D(t) \in [U, Y]$ сильно непрерывно зависят от t. Входная и выходная функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ предполагаются элементами соответственно пространств $L_u^2(a, b)$, $L_v^2(a, b)$. Будем обозначать систему (1) через $S = (A(t), B(t), C(t), D(t); X, U, V)$.

Для отрезка $[s, t] \subset [a, b]$ рассмотрим оператор переходов $F^{ts} : X \oplus L_v^2(s, t) \to X$, который переведет пару $\{x, u\}$ начального состояния $x(s)$ в точке s $(x(s) = x)$ и выходной функции $u(\cdot)$, в конечное состояние $x(t)$. Рассмотрим также оператор выходов $G^{ts} : X \oplus L_u^2(s, t) \to L_v^2(s, t)$, который преобразует пару $\{x, u\}$ в выходную функцию $v(\cdot)$. В силу известной формулы для решения системы (1) эти операторы имеют вид

$$F^{ts}(x, u) = \Phi(t, s)\, x + \int_s^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

$$G^{ts}(x, u) = C(\nu) \Phi(\nu, s)\, x + C(\nu) \int_s^\nu \Phi(\nu, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau + D(\nu) u(\nu), \quad s \leqslant \nu \leqslant t, \tag{3}$$

где $\Phi(t, s)$ — эволюционные операторы системы.

Нетрудно видеть, что эта пара двухпараметрических семейств операторов полностью определяет систему (1).

Определение. *Система* $S = (A(t), B(t), C(t), D(t); X, U, V)$ *называется композицией двух систем* $S_k = (A_k(t), B_k(t), C_k(t), D_k(t); X_k, U_k, V_k)$, $k = 1, 2$, *если для любых* s, t, $a \leqslant s < t \leqslant b$, *справедливы следующие соотношения*:

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad U = U_1, \quad V_1 = U_2, \quad V = V_2,$$

$$F^{ts}(x, u) = F_1^{ts}(x_1, u) + F_2^{ts}(x_2, G_1^{ts}(x_1, u)), \tag{4}$$

$$G^{ts}(x, u) = G_2^{ts}(x_2, G^{ts}(x_1, u)), \tag{5}$$

где $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, F_k^{ts}, G_k^{ts} — *соответственно операторы переходов и выходов системы* S_k. *Обозначим композицию через* $S = S_2 \cdot S_1$.

Понятие композиции означает, что выход первой системы соединяется со входом второй системы, а внутренние состояния складываются. Отметим также, что это определение очевидным образом распространяется на другие типы систем (нелинейные или дискретные).

2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы система* $S = (A(t), B(t), C(t), D(t); X, U, V)$ *была композицией двух систем* $S_k = (A_k(t), B_k(t), C_k(t), D_k(t); X_k, U_k, V_k)$, $k = 1, 2$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения*:

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad U = U_1, \quad V_1 = U_2, \quad V = V_2,$$

$$A(t) = A_1(t) P_1 + A_2(t) P_2 + B_2(t) C_1(t) P_1, \tag{6}$$

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t) D_1(t), \tag{7}$$

$$C(t) = D_2(t) C_1(t) P_1 + C_2(t) P_2, \tag{8}$$

$$D(t) = D_2(t) D_1(t), \tag{9}$$

где P_k — *ортопроекторы на* X_k.

Доказательство. Необходимость. Из (4) имеем

$$\Phi(t, s)\, x = \Phi_1(t, s)\, x_1 + \Phi_2(t, s)\, x_2 + \int_s^t \Phi_2(t, \tau) B_2(\tau) C_1(\tau) \Phi_1(\tau, s)\, x_1 d\tau. \tag{10}$$

Дифференцируя обе части равенства (10) по t и обращая внимание на свойства эволюционных операторов, получаем (6) (при $t = s$). Полагая $x = 0$

в (4) и затем дифференцируя обе его части, имеем (7). Для получения соотношений (8), (9) достаточно положить в (5) соответственно $u = 0$ и $x = 0$ (при $s = t$).

Достаточность. Отметим сперва, что если оператор $A(t)$ имеет вид (6), то для соответствующих эволюционных операторов справедливо соотношение (10). Далее с помощью этого соотношения справедливость формул (4), (5) на основании равенств (6)—(9) проверяется непосредственным и несложным вычислением.

Замечание. В таком же плане можно рассматривать композицию билинейных систем и получить аналогичную теорему.

3. Дополним эту теорему в нескольких пунктах привлечением к исследованию композиции понятий управляемости и наблюдаемости. Напомним, что система (1) называется управляемой на отрезке $[s, t]$, если множество состояний $x(t)$, достижимых из нулевого начального состояния $x(s) = 0$ (по формуле (2)) плотно в X. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда множество векторов вида $\{\Phi(t, \tau) B(\tau) u : u \in U, \tau \in (s, t)\}$ плотно в X. Система (1) называется наблюдаемой на $[s, t]$, если множество векторов вида $\{\Phi^*(\tau, s) C^*(\tau) u : u \in U, \tau \in (s, t)\}$ плотно в X.

Теорема 2. *Пусть система S управляема на любом отрезке $[a, t]$ ($\forall t \in (a, b)$). Чтобы она была композицией систем S_1, S_2, достаточно, чтобы соотношения* (4), (5) *были справедливы при* $x = 0$.

Доказательство. Из (4) следует

$$\Phi(t, s) B(s) u = \Phi_1(t, s) B_1(s) u + \Phi_2(t, s) B_2(s) D_1(s) u + \int_s^t \Phi_2(t, \tau) B_2(\tau) C_1(\tau) \Phi_1(\tau, s) B_1(s) u d\tau. \tag{11}$$

Далее, дифференцируя обе части равенства (11), получаем соотношение

$$A(t) \Phi(t, s) B(s) u = A_1(t) \Phi_1(t, s) B_1(s) u + A_2(t) \Phi_2(t, s) B_2(s) D_1(s) u + B_2(t) C_1(t) \Phi_1(t, s) B_1(s) u + \int_s^t A_2(t) \Phi_2(t, \tau) B_2(\tau) C_1(\tau) \Phi_1(\tau, s) B_1(s) u d\tau. \tag{12}$$

Если обозначим $\Phi(t, s) B(s) u$ через x и его проекции на X_1, X_2 соответственно через x_1, x_2, то из (11) и (12) нетрудно видеть, что

$$A(t) x = A_1(t) x_1 + A_2(t) x_2 + B_2(t) C_1(t) x_1. \tag{13}$$

Последнее равенство в силу плотности векторов x означает справедливость соотношения (6). Доказательство соотношений (7)—(9) проводится тем же методом.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть система S наблюдаема на любом отрезке $[s, b]$ ($\forall s \in (a, b)$). Чтобы она была композицией систем S_1, S_2, достаточно лишь выполнения соотношения* (5).

4. Рассмотрим теперь стационарную систему $S = (A, B, C, D; X, U, V)$. Введем операторы

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} B, \quad Q(\lambda) = (\bar{\lambda} I - A^*)^{-1} C^*, \quad S(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1} B.$$

Известно, что если система S является композицией систем S_1, S_2, то справедливы следующие соотношения:

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda) S_1(\lambda), \tag{14}$$

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) S_2^*(\lambda) + Q_2(\lambda), \tag{15}$$

$$S(\lambda) = S_2(\lambda) S_1(\lambda). \tag{16}$$

Для стационарных линейных систем, используя понятия управляемости и наблюдаемости, получаем некоторые результаты, дополняющие известные результаты о композиции. Управляемость стационарной системы означает плотность векторов вида $A^n Bu$, $u \in U$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а наблюдаемость означает плотность векторов вида $(A^*)^n C^* u$, $u \in U$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Теорема 4. *Управляемая система S является композицией систем S_1, S_2 тогда и только тогда, когда выполнены соотношения* (14)—(16).

Доказательство. Нам остается доказать достаточность. Разлагая обе части равенства (14) в ряд и сравнивая соответствующие коэффициенты, получаем $A^n Bu = A_1^n B_1 u + \sum_{k=0}^{n-1} A_2^k B_2 C_1 A_1^{n-k-1} B_1 u + A_2^n B_2 D_1 u$, откуда, обозначая вектор $A^n Bu$ через x и его проекции на X_1 и X_2 соответственно через x_1 и x_2, имеем равенство $Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1$.

Последнее соотношение вместе с плотностью векторов x (так как система управляема) означает справедливость (6). С другой стороны, из (16) следует

$$CR(\lambda) u = D_2 C_1 R_1(\lambda) u + C_2 R_2(\lambda) S_1(\lambda) u. \tag{17}$$

Обозначая $y = R(\lambda) u$ и соответствующие проекции через y_1, y_2, из (14)—(17) имеем $Cy = D_2 C_1 y_1 + C_2 y$, откуда в силу плотности векторов y следует справедливость (8). Соотношения (7) и (9) очевидны.

Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема 5. *Наблюдаемая система S является композицией систем S_1, S_2 тогда и только тогда, когда выполнены соотношения* (15), (16).

Из доказательства теорем 4, 5 видно, что справедлива теорема.

Теорема 6. *Минимальная* (*т. е. управляемая и наблюдаемая*) *система S является композицией систем S_1, S_2 тогда и только тогда, когда выполнены соотношения* (14), (15) *и* $D = D_2 D_1$.

1. *Лившиц М. С.* Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна // Докл. АН СССР.— 1974.— **219**, № **4**.— С. 793—796.
2. *Лившиц М. С.* Операторы, колебание, волны.— М. : Наука, 1966.— 298 с.
3. *До Конг Хань.* Исследование операторов, реализующих некоторые классы мероморфных функций // Изв. АН АрмССР.— 1976.— **11**, № 3.— С. 203—221.
4. *До Конг Хань.* О реализации бесконечных произведений типа Бляшке — Джрбашяна // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1977.— Вып. 28.— С. 10—18.

Вьетнам

Получено 27.08.86