УДК 517.9

Ю. Л. Майстренко

Сохранение некомпактных итерационных последовательностей при возмущениях некоторых нелинейных операторов

В [1] анонсирована теорема о сохранении и устойчивости асимптотически разрывных решений при регулярных возмущениях одномерных гиперболических систем с нелинейными граничными условиями. Схема доказательства теоремы кратко изложена в [2] (раздел IV).

Методом интегрирования вдоль характеристик рассмотренная задача может быть сведена к исследованию некоторого нелинейного оператора $\mathcal{F}$, который индуцирован одномерным отображением f. Цель настоящей статьи — изучить свойства этого оператора при возмущениях, соответствующих возмущениям исходной гиперболической системы. Несмотря на то, что рассматривается класс операторов, порождаемых в определенном смысле простейшими f, метод доказательства, развитый ниже, может быть распространен и на общий случай, который рассмотрен в [1].

1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — замкнутый ограниченный интервал, $f \in C^1(I, I)$; $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} C^1([0, 1], I)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{F} : \Phi \to \Phi$, действующий по правилу

$$\mathcal{F}[\varphi] = f \circ \varphi, \tag{1}$$

где $f \circ \varphi$ — суперпозиция функций f и φ: $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$, $t \in [0, 1]$. В таком случае будем говорить, что одномерное отображение f индуцирует оператор $\mathcal{F}$ (нелинейный, если f нелинейно), действующий в функциональном пространстве Φ.

Зададим $\varphi \in \Phi$ и рассмотрим итерационную последовательность

$$\varphi_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^n[\varphi] = f^n \circ \varphi, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2}$$

Семейство функций $\{\varphi_n(t)\}$ равномерно ограничено, но при достаточно общих условиях на f и φ может не обладать свойством равностепенной непрерывности. Тогда, чтобы изучить предельные при $n \to \infty$ свойства последовательностей вида (2), действие оператора $\mathcal{F}$ необходимо рассматривать в некотором более общем функциональном пространстве Φ^Δ. Этот вопрос исследован в [1] (раздел 2), где показано, что в качестве Φ^Δ естественно взять пространство $C^\Delta([0, 1], 2^I)$ полунепрерывных сверху функций с топологией, задаваемой расстоянием Хаусдорфа между графиками. Это пространство компактно и (за исключением некоторых в определенном смысле паталогических ситуаций) последовательности φ_n в его топологии асимптотически периодические или асимптотически почти периодические.

Наша цель — выяснить, какие изменения претерпевают предельные свойства последовательностей вида (2) при возмущениях оператора $\mathcal{F}$. Именно, рассмотрим зависящее от малого параметра $\varepsilon \geqslant 0$ семейство возмущенных операторов $\mathcal{F}_\varepsilon : \Phi \to \Phi$ таких, которые, вообще говоря, не индуцированы (в указанном выше смысле) никаким одномерным отображением, но удовлетворяют следующим условиям близости к $\mathcal{F}$: для любого $\varphi \in \Phi$

$$\| \mathcal{F}_\varepsilon[\varphi] - \mathcal{F}[\varphi] \|_{C^0} \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

$$\| \mathcal{F}_\varepsilon[\varphi] - \mathcal{F}[\varphi] \|_{C^1} \leqslant \varepsilon (A_0 + A \| \varphi \|_{C^1} + B \operatorname{Var} \mathcal{F}_\varepsilon[\varphi]), \tag{4}$$

где A_0, A, B — некоторые константы, $\operatorname{Var} \mathcal{F}_\varepsilon[\varphi]$ — вариация функции $\mathcal{F}_\varepsilon[\varphi](t)$ на интервале $[0, 1]$.

В простейшей нетривиальной ситуации докажем, что при условиях (3), (4) нарушение равностепенной непрерывности $\{\varphi_n\}$ влечет аналогичное нарушение равностепенной непрерывности функциональной последовательности $\varphi_n^{(\varepsilon)} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}_\varepsilon^n[\varphi]$, $n = 0, 1, \ldots$, при всех достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, \varphi) > 0$.

2. Предположим, что 1) $f \in C^1(I, I)$; 2) $f(I) \subset \operatorname{int} I$; 3) $\operatorname{Per} f = \operatorname{Fix} f = \{a_1; b; a_2\}$, $a_1 < b < a_2$, причем $|\dot{f}(a_i)| < 1$, $i = 1, 2$, $\dot{f}(b) > 1$; 4) $f^{-1}(b) = b$ ($\operatorname{Per} f$ и $\operatorname{Fix} f$ — множества соответственно периодических и неподвижных точек отображения f; $f^{-1}(b) = \{x \in I: f(x) = b\}$ — полный прообраз точки b под действием f). В сделанных предположениях отображение f имеет две притягивающие неподвижные точки a_1 и a_2, и одну отталкивающую — b. Других периодических (в том числе неподвижных) точек у f нет. Нет также прообразов у отталкивающей неподвижной точки b.

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что множество Жюлиа $J(f)$ отображения f (т. е. замыкание множества неустойчивых по Ляпунову точек $x \in I$ полугруппы $\{f^n\}$) состоит в точности из одной точки: $J(f) = \{b\}$. Заметим, что в более общих ситуациях $J(f)$ может быть устроено намного сложнее, например, может быть счетным или несчетным множеством, может содержать интервалы [2].

На интервале [0, 1] рассмотрим множество $\mathfrak{T} = \varphi^{-1}(b)$ и предположим, что φ удовлетворяет условию трансверсальности:

$$\dot{\varphi}(t) \neq 0, \quad t \in \mathfrak{T}. \tag{5}$$

Тогда в силу гладкости φ множество $\mathfrak{T}$ не более, чем конечное. Для определенности будем считать также, что $\mathfrak{T}$ не содержит граничных точек интервала [0, 1].

Пусть множество $\mathfrak{T}$ непусто. Тогда из свойств отображения f легко заключить, что последовательность φ_n сходится к функции $p: [0, 1] \to 2^I$ вида

$$p(t) = \begin{cases} a_1 & \text{при } \varphi(t) < b, \\ f(I) & \text{при } \varphi(t) = b \text{ (т. е. при } t \in \mathfrak{T}\text{)}. \\ a_2 & \text{при } \varphi(t) > b, \end{cases}$$

в том смысле, что

$$\Delta(\operatorname{gr} \varphi_n, \operatorname{gr} p) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $\rho(E_1, E_2) = \inf_{z_1 \in E_1, z_2 \in E_2} |z_1 - z_2|$ — обычное расстояние между множествами E_1 и E_2; $\Delta(E_1, E_2) = \max\{\sup_{z \in E_1} \rho(z, E_2); \sup_{z \in E_2} \rho(z, E_1)\}$ — расстояние Хаусдорфа между множествами E_1 и E_2; $\operatorname{gr} \psi$ — график функции ψ, $\operatorname{card} E$ — число элементов множества E. Соотношение (6) означает, в частности, что для любого числа $\delta > 0$ можно указать последовательность вложенных друг в друга стягивающихся к $\mathfrak{T}$ окрестностей $\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{T}$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \mathfrak{T}$, для которых $|\varphi_n(t) - p(t)| < \delta$ при $t \in [0, 1] \setminus \Lambda_n$.

Следующая теорема утверждает, что если выполнены условия (3), (4), то аналогичными свойствами обладает также рассматриваемая возмущенная последовательность $\varphi_n^{(\varepsilon)}$.

Теорема. *Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно указать множество $\mathfrak{T}^{(\varepsilon)} \subset [0, 1]$, $\operatorname{card} \mathfrak{T}^{(\varepsilon)} = \operatorname{card} \mathfrak{T}$, $\Delta(\mathfrak{T}^{(\varepsilon)}, \mathfrak{T}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и последовательность вложенных друг в друга стягивающихся к $\mathfrak{T}^{(\varepsilon)}$ окрестностей*

$$\Lambda_0^{(\varepsilon)} \supset \Lambda_1^{(\varepsilon)} \supset \ldots \supset \mathfrak{T}^{(\varepsilon)}, \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(\varepsilon)} = \mathfrak{T}^{(\varepsilon)}, \tag{7}$$

такие что

$$|\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)-p(\sigma^{(\varepsilon)}(t))|<\delta, \quad t\in[0,1]\diagdown\Lambda_n^{(\varepsilon)}, \tag{8}$$

где $\sigma^{(\varepsilon)}$ — *какой-либо из сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов отрезка* $[0, 1]$, *сопрягающий множества* $\mathfrak{T}^{(\varepsilon)}$ *и* $\mathfrak{T}$.

3. Доказательство. Неравенства (3), (4) позволяют заключить, что при всех $\varepsilon\geqslant 0$ равномерно по $t\in[0,1]$ и $n=0,1,\ldots$ справедливы неравенства

$$|\varphi_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)-f(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t))|\leqslant\varepsilon, \tag{3'}$$

$$|\dot\varphi_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)-\dot f(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t))\,\dot\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)|\leqslant\varepsilon\,(1+A\,|\dot\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)|+B\int\limits_0^1|\dot\varphi_{n+1}^{(\varepsilon)}(\tau)|\,d\tau) \tag{4'}$$

(чтобы избежать излишней громоздкости при дальнейшем изложении, мы положили $A_0+A\operatorname{mes}I=1$).

Условия, наложенные на f и φ, гарантируют существование положительных чисел γ и μ таких, что

$$1+\mu<\dot f(x)<1+\mu+\frac{\mu^2}{8}, \quad x\in U_\gamma(b), \tag{9}$$

$$f(I\diagdown U_\gamma(b))\subset I\diagdown U_{(1+\mu)\gamma}(b), \tag{10}$$

$$\inf_{t\in\Lambda}|\dot\varphi(t)|>0,$$

где $U_\gamma(b)$ — γ-окрестность точки b, $\Lambda\overset{\text{def}}{=}\varphi^{-1}(U_\gamma(b))$.

Введем следующие обозначения:

$$L=\sup_{x\in I}|\dot f(x)|, \quad r=\inf_{t\in\Lambda}|\dot\varphi(t)|, \quad q=\sup_{t\in\Lambda}|\dot\varphi(t)|, \quad s=\int\limits_0^1|\dot\varphi(\tau)|\,d\tau. \tag{11}$$

Как легко видеть, все величины, определенные в (11), положительны.

При каждом $\varepsilon>0$ рассмотрим последовательность множеств $\Lambda_n^{(\varepsilon)}=\{t\in[0,1]:\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)\in U_\gamma(b)\}$, $n=0,1,\ldots$, и покажем, что если ε достаточно мало, то $\Lambda_n^{(\varepsilon)}$ удовлетворяют соотношениям (10), (11); тем самым теорема будет доказана.

Лемма 1. *При каждом* $\varepsilon<\varepsilon_1\overset{\text{def}}{=}\gamma\mu$ *множества* $\Lambda_n^{(\varepsilon)}$, $n=0,1,\ldots$, *вложены друг в друга:* $\Lambda_0^{(\varepsilon)}\supset\Lambda_1^{(\varepsilon)}\supset\ldots$.

Доказательство. Пусть $\tilde t\notin\Lambda_n^{(\varepsilon)}$ при каком-то $n\geqslant 0$. Это означает, что $\varphi_n^{(\varepsilon)}(\tilde t)\in I\diagdown U_\gamma(b)$, следовательно, в силу (10) $\rho(f(\varphi_n^{(\varepsilon)}(\tilde t)),U_\gamma(b))\geqslant\gamma\mu$. Но тогда, учитывая (3′), немедленно заключаем, что при всех $\varepsilon<\varepsilon_1$ $\rho(\varphi_{n+1}^{(\varepsilon)}(\tilde t), U_\gamma(b))>0$. Таким образом, $\tilde t\notin\Lambda_{n+1}^{(\varepsilon)}$ и лемма доказана.

Рассмотрим множество притягивающих неподвижных точек $P_+=\{a_1\}\cup\cup\{a_2\}$. Так как $|\dot f(a_i)|<1$, $i=1,2$, то найдется α, $0<\alpha<1$, такое, что если $\delta>0$ — достаточно мало, то

$$|\dot f(x)|<1-\alpha, \quad x\in U_\delta(P_+), \tag{12}$$

откуда, в частности, следует

$$f(U_\delta(P_+))\subset U_{(1-\alpha)\delta}(P_+), \tag{13}$$

причем, если $x\in U_\delta(a_i)$ при каком-то i, то $f(x)\in U_{(1-\alpha)\delta}(a_i)$ при том же i. Зафиксируем $\delta>0$, для которого выполняется (12) и положим $\tilde\Lambda_n^{(\varepsilon)}=\{t\in\in[0,1]:\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)\in U_\delta(P_+)\}$.

Лемма 2. *При каждом* $\varepsilon < \varepsilon_2 \overset{\text{def}}{=} \alpha\delta$ *множества* $\tilde{\Lambda}_n^{(\varepsilon)}$, $n=0, 1, \ldots$, *вложены друг в друга:* $\tilde{\Lambda}_0^{(\varepsilon)} \supset \tilde{\Lambda}_1^{(\varepsilon)} \supset \ldots$.

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in \tilde{\Lambda}_n^{(\varepsilon)}$ при каком-то $n \geqslant 0$, т. е. $\varphi_n^{(\varepsilon)}(\tilde{t}) \in U_\delta(P_+)$. Тогда, как следует из (13), $f(\varphi_n^{(\varepsilon)}(\tilde{t})) \in U_{(1-\alpha)\delta}(P_+)$ и, таким образом, в силу (3′) $\varphi_{n+1}^{(\varepsilon)}(\tilde{t}) \in U_\delta(P_+)$, если только $\varepsilon < \alpha\delta$. Следовательно, $\tilde{t} \in \Lambda_{n+1}^{(\varepsilon)}$ и лемма доказана.

Рассмотрим внешность γ-окрестности точки b — множество $I \setminus U_\gamma(b)$. Существует целое $k > 0$, $k = k(\gamma, \delta)$, такое, что образ этого множества после k итераций попадает в $\delta/2$-окрестность P_+:

$$f^k(I \setminus U_\gamma(b)) \subset U_{\delta/2}(P_+). \tag{14}$$

Рассмотрим разность $\varphi_{n+k}^{(\varepsilon)}(t) - f^k(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t))$. Из (3′) легко заключить, что равномерно по $t \in [0, 1]$ и $n = 0, 1, \ldots$

$$|\varphi_{n+k}^{(\varepsilon)}(t) - f^k(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t))| < \varepsilon(1 + L + \ldots + L^{k-1}) = \varepsilon \frac{L^k - 1}{L - 1}. \tag{15}$$

Следующая лемма является прямым следствием соотношений (14) и (15).

Лемма 3. *При каждом* $\varepsilon < \varepsilon_3 \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\delta(L-1)}{2(L^k-1)}$ *и* $n = 0, 1, \ldots$ *имеют место включения* $[0, 1] \setminus \Lambda_n^{(\varepsilon)} \subset \tilde{\Lambda}_{n+k}^{(\varepsilon)}$.

Таким образом, при $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\}$ ситуация следующая: если для какого-то $n \geqslant 0$ точка $\tilde{t}$ не принадлежит $\Lambda_n^{(\varepsilon)}$, то она не может принадлежать и $\Lambda_{n+i}^{(\varepsilon)}$, $i = 1, 2, \ldots$, однако, заведомо принадлежит всем множествам $\tilde{\Lambda}_{n+k+i}^{(\varepsilon)}$, $i = 0, 1, \ldots$. Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что число компонент связности $\Lambda_n^{(\varepsilon)}$ остается одним и тем же при всех n, а $\operatorname{mes} \Lambda_n^{(\varepsilon)} \to 0$, $n \to \infty$. С этой целью рассмотрим числовую последовательность $r_n^{(\varepsilon)} = \inf\limits_{t \in \Lambda_n^{(\varepsilon)}} |\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(t)|$, $n = 0, 1, \ldots$. Покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $r_n^{(\varepsilon)}$ мажорирует геометрическую прогрессию $(1+\mu/2)^n r$ ($r = r_0^{(\varepsilon)}$, см. (11)):

$$r_n^{(\varepsilon)} \geqslant (1 + \mu/2)^n r, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Отсюда следует, что каждое из множеств $\Lambda_n^{(\varepsilon)}$, $n = 0, 1 \ldots$, состоит из такого же числа подынтервалов, как и Λ, а $\operatorname{mes} \Lambda_n^{(\varepsilon)}$, т. е. суммарная их длина, убывает со скоростью геометрической прогрессии: $\operatorname{mes} \Lambda_n^{(\varepsilon)} \leqslant m \dfrac{2\gamma}{(1 + \mu/2)^n r}$, где $m = \operatorname{card} \mathfrak{T}$. Тогда фигурирующие в формулировке теоремы множество $\mathfrak{T}^{(\varepsilon)} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(\varepsilon)}$ существует и обладает требуемыми свойствами $\operatorname{card} \mathfrak{T}^{(\varepsilon)} = \operatorname{cprd} \mathfrak{T}$, $\Delta(\mathfrak{T}^{(\varepsilon)}, \mathfrak{T}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Докажем неравенство (16). Введем в рассмотрение вспомогательную числовую последовательность $s_n^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^1 |\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(\tau)| \, d\tau$, $n = 0, 1, \ldots$. Оказывается, для доказательства (16) достаточно показать, что $s_n^{(\varepsilon)}$, $n = 0, 1, \ldots$, мажорируется геометрической прогрессией вида $\theta(1 + \mu/2)^n$ с каким-либо $\theta > 0$.

Лемма 4. *Пусть при каком-то* $n \geqslant 0$ *и* $\theta > 0$ $r_n^{(\varepsilon)} \geqslant r(1+\mu/2)^n$, $s_{n+1}^{(\varepsilon)} \leqslant \theta(1+\mu/2)^{n+1}$. *Тогда при каждом*

$$\varepsilon < \varepsilon_4 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mu r}{2(1 + rA + \theta B(1+\mu/2))}$$

выполняется неравенство $r_{n+1}^{(\varepsilon)} \geqslant r(1+\mu/2)^{n+1}$.

Доказательство. Неравенство (4′) перепишем в виде

$$|\dot{\varphi}_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)| \geqslant |\dot{f}(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t))|\,|\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(t)| - \varepsilon(1 + A|\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(t)| + Bs_{n+1}^{(\varepsilon)}),$$

откуда с учетом условий леммы $\forall t \in \Lambda_n^{(\varepsilon)}$ имеем

$$|\dot{\varphi}_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)| \geqslant (1+\mu-\varepsilon A)|\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(t)| - \varepsilon B s_{n+1}^{(\varepsilon)} - \varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant \left[1 + \mu - \varepsilon\left(A + \frac{B\theta(1+\mu/2)}{r}\right)\right](1+\mu/2)^n r - \varepsilon.$$

Но тогда неравенство $|\dot{\varphi}_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)| > (1+\mu/2)^{n+1} r$ выполняется при всех $\varepsilon < \varepsilon_4$, где ε_4 — корень уравнения $\left[1+\mu-\varepsilon_4\left(A + \frac{B\theta(1+\mu/2)}{r}\right)\right]r - \varepsilon_4 = (1+\mu/2)r$, т. е. имеет вид, указанный в формулировке леммы (по существу, ε_4 мы выбрали из условия, чтобы указанное неравенство для $|\dot{\varphi}_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)|$ выполнялось при $n=0$; это, как легко видеть, гарантирует его справедливость при любом $n>0$). В силу произвольности $t \in \Lambda_n^{(\varepsilon)}$ лемма доказана.

Теперь наша задача — доказать неравенство

$$s_n^{(\varepsilon)} \leqslant \theta(1+\mu/2)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

с некоторой константой $\theta > 0$, которая пока не определена. Следующая лемма оценивает скорость роста первых $k+1$ членов $s_n^{(\varepsilon)}$.

Лемма 5. *При каждом* $\varepsilon < \varepsilon_5 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{L}{1/s + A + 2LB}$ *первые* $k+1$ *членов* $s_0^{(\varepsilon)}, \ldots, s_k^{(\varepsilon)}$ *последовательности* $s_n^{(\varepsilon)}$ *удовлетворяют неравенству* (17) *с любым* $\theta \geqslant \theta_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{2L}{1+\mu/2}\right)^k s$.

Доказательство. Неравенство (4′) перепишем в виде

$$|\dot{\varphi}_{n+1}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (\dot{f}(\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)) + \varepsilon A)|\dot{\varphi}_n^{(\varepsilon)}(t)| + \varepsilon B s_{n+1}^{(\varepsilon)} + \varepsilon \tag{18}$$

и проинтегрируем по t от 0 до 1: $s_{n+1}^{(\varepsilon)} \leqslant (L+\varepsilon A)s_n^{(\varepsilon)} + \varepsilon B s_{n+1}^{(\varepsilon)} + \varepsilon$, откуда $s_{n+1}^{(\varepsilon)} \leqslant ((L+\varepsilon A)s_n^{(\varepsilon)} + \varepsilon)/(1-\varepsilon B)$.

Выберем ε_5 из условия, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_5$ для всех $n = 0, 1, \ldots, k$ выполнялось неравенство $s_n^{(\varepsilon)} < (2L)^n s$. Для этого, очевидно, достаточно потребовать, чтобы ε_5 было корнем уравнения $((L+\varepsilon_5 A)s + \varepsilon_5)/(1-\varepsilon_5 B) = 2Ls$. Таким образом, ε_5 имеет вид, представленный в формулировке леммы. Рассмотрим неравенство $(2L)^n s \leqslant (1+\mu/2)^n\theta$. Оно, как легко видеть, выполняется при всех $n = 0, 1, \ldots, k$ тогда и только тогда, когда $\theta \geqslant \theta_1$. Лемма доказана.

Справедливость неравенства (17) при всех $n > k$ докажем по индукции, для чего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть неравенство* (17) *выполняется при всех* $n = 0, \ldots, k+N$ ($\theta > 0$, $N \geqslant 0$ *фиксированы*). *Тогда при каждом* $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_6\}$, *где* $\varepsilon_6 = \min\left\{\frac{q\mu^2}{8(1+Aq+B\theta(1+\mu/2))};\ \frac{Lq}{1/(1+\mu/2)^2 + Aq + B\theta}\right\}$, *имеет место неравенство*

$$\sup_{t\in\Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (1+\mu/2)^{2(N+1)}(2L)^{k-1}q. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $t\in\Lambda_N^{(\varepsilon)}$. В силу леммы 1 $t\in\Lambda_i^{(\varepsilon)}$ при всех $i=0, 1, \ldots, N$, поэтому для $\dot f(\varphi_i^{(\varepsilon)}(t))$ при таких t и i имеем оценку сверху (9). Индукцией по i покажем, что

$$\sup_{t\in\Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot\varphi_i^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (1+\mu/2)^{2i}q, \quad i=0, \ldots, N+1. \tag{20}$$

Для $i=0$ неравенство (20) очевидно. Перейдем от i к $i+1$, для чего (4′) перепишем в виде $|\dot\varphi_{i+1}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (|\dot f(\varphi_i^{(\varepsilon)}(t))| + \varepsilon A)|\dot\varphi_i^{(\varepsilon)}(t)| + \varepsilon B s_{i+1}^{(\varepsilon)} + \varepsilon$, тогда в силу (9) и условий леммы $|\dot\varphi_{i+1}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (1+\mu+\mu^2/8+\varepsilon A)(1+\mu/2)^{2i}q + \varepsilon B\theta(1+\mu/2)^{i+1} + \varepsilon$. Правая часть полученного неравенства не превышает $(1+\mu/2)^{2(i+1)}q$ при всех $\varepsilon<\varepsilon_6'$, где ε_6' определяется из уравнения $(1+\mu+\mu^2/8+\varepsilon_6'A)q + \varepsilon_6'B\theta(1+\mu/2) + \varepsilon_6' = (1+\mu/2)^2q$. Следовательно, $\varepsilon_6' = q\mu^2/(8(1+Aq+B\theta(1+\mu/2)))$. Неравенство (20) доказано.

Аналогично докажем неравенство

$$\sup_{t\in\Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot\varphi_{N+i}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (1+\mu/2)^{2(N+1)}(2L)^{i-1}q, \quad i=1, \ldots, k. \tag{21}$$

Так как при $t\in\Lambda_N^{(\varepsilon)}$ и $i=1, \ldots, k-1$ точка $\varphi_{N+i}^{(\varepsilon)}(t)$ принадлежит, вообще говоря, множеству $I\setminus(U_\gamma(b)\cup U_\delta(P_+))$, то величину $|\dot f(\varphi_{N+i}^{(\varepsilon)}(t))|$ можно оценивать сверху только константой L. Опять же индукцией по i имеем: при $i=1$ неравенство (21) очевидно (следствие (20)); чтобы перейти от i к $i+1$, $1\leqslant i\leqslant k-1$, из (4′), учитывая условие леммы и предположение индукции, получаем неравенство $|\dot\varphi_{N+i+1}^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (|\dot f(\varphi_{N+i}^{(\varepsilon)}(t))| + \varepsilon A)(1+\mu/2)^{2(N+1)}(2L)^{i-1}q + \varepsilon B\theta(1+\mu/2)^{N+i+1} + \varepsilon$, из которого, в свою очередь, полагая $i=1$, $N=0$, заключаем, что (21) выполняется при всех $\varepsilon<\varepsilon_6''$, где ε_6'' — корень уравнения $(L+\varepsilon_6''A)(1+\mu/2)^2q + \varepsilon_6''B\theta(1+\mu/2)^2 + \varepsilon_6'' = 2L(1+\mu/2)^2q$. Следовательно, $\varepsilon_6'' = Lq/(1/(1+\mu/2)^2 + Aq + B\theta)$. Лемма доказана.

Завершает доказательство теоремы следующая лемма. Зафиксируем любое число $\theta>\theta_0=\max\{0_1; \theta_2\}$, где θ_1 определено в формулировке леммы 5, $\theta_2 = \dfrac{m\gamma q(1+\mu/2)^2}{r(\alpha+\mu/2)}\left(\dfrac{2L}{1+\mu/2}\right)^k$. По θ определим значение $\varepsilon_0 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 7}\varepsilon_i$ где ε_i, $1\leqslant i\leqslant 6$, определены в формулировках лемм 1 — 6, а

$$\varepsilon_7 = \frac{(\alpha+\mu/2)\theta - \dfrac{m\gamma q(1+\mu/2)^2}{r}\left(\dfrac{2L}{1+\mu/2}\right)^k}{(A+B(1+\mu/2))\theta + 1/(1+\mu/2)^k}. \tag{22}$$

Лемма 7. *Неравенство* (17) *выполняется при всех* $\varepsilon<\varepsilon_0$.

Доказательство. Допустим, что неравенство (17) справедливо при всех $n=0, \ldots, k+N$, $N\geqslant 0$, и докажем его справедливость при $n=k+N+1$. Рассматривая неравенство (18) при $n=k+N$ и интегрируя его по t от 0 до 1, имеем

$$s_{k+N+1}^{(\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon B}\left[\int_0^1 |\dot f(\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau))|\,|\dot\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau)|\,d\tau + \varepsilon A\theta(1+\mu/2)^{k+N} + \varepsilon\right]. \tag{23}$$

Чтобы оценить интеграл справа в (23), разобьем его на две части: отдельно возьмем интеграл по множеству $\Lambda_N^{(\varepsilon)}$ и $[0, 1] \setminus \Lambda_N^{\varepsilon}$.

Для первого из них в силу неравенства (19) имеем

$$\int\limits_{\Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot{f}(\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau))| \, |\dot{\varphi}_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau)| \, d\tau \leqslant L (2L)^{k-1} (1 + \mu/2)^{2(N+1)} q \operatorname{mes} \Lambda_N^{(\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m\gamma q}{(1 + \mu/2)^N r} (2L)^k (1 + \mu/2)^{2(N+1)} = \frac{m\gamma q (1 + \mu/2)}{r} \times$$

$$\times \left(\frac{2L}{1 + \mu/2} \right)^k (1 + \mu/2)^{k+N+1}.$$

При оценке второго интеграла учтем, что $\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau) \in U_\delta(P_+)$, если только $\tau \in [0, 1] \setminus \Lambda_N^{(\varepsilon)}$, поэтому при таких τ, как следует из (12), $|\dot{f}(\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau))| < 1 - \alpha$. Таким образом,

$$\int\limits_{[0,1] \setminus \Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot{f}(\varphi_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau))| \, |\dot{\varphi}_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau)| \, d\tau \leqslant (1 - \alpha) \int\limits_{[0,1] \setminus \Lambda_N^{(\varepsilon)}} |\dot{\varphi}_{k+N}^{(\varepsilon)}(\tau)| \, d\tau <$$

$$< (1 - \alpha) s_{k+N}^{(\varepsilon)} \leqslant \frac{(1 - \alpha)\theta}{1 + \mu/2} (1 + \mu/2)^{k+N+1}.$$

Подставляя полученные оценки интегралов в (23), получаем

$$s_{k+N+1}^{(\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon B} \left[\frac{m\gamma q (1 + \mu/2)}{r} \left(\frac{2L}{1 + \mu/2} \right)^k (1 + \mu/2)^{k+N+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \alpha)\theta}{1 + \mu/2} (1 + \mu/2)^{k+N+1} + \varepsilon \frac{A\theta}{1 + \mu/2} (1 + \mu/2)^{k+N+1} + \varepsilon \right] =$$

$$= \frac{1}{1 - \varepsilon B} \left[\left(\frac{1 - \alpha + \varepsilon A}{1 + \mu/2} \theta + \frac{m\gamma q (1 + \mu/2)}{r} \left(\frac{2L}{1 + \mu/2} \right)^k \right) \times \right.$$

$$\left. \times (1 + \mu/2)^{k+N+1} + \varepsilon \right],$$

откуда заключаем, что искомое неравенство $s_{k+N+1}^{(\varepsilon)} < \theta (1 + \mu/2)^{k+N+1}$ верно при всех $\varepsilon < \varepsilon_7$, где ε_7 определяется из уравнения

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_7 B} \left[\left(\frac{1 - \alpha + \varepsilon_7 A}{1 + \mu/2} \theta + \frac{m\gamma q (1 + \mu/2)}{r} \left(\frac{2L}{1 + \mu/2} \right)^k \right) \times \right.$$

$$\left. \times (1 + \mu/2)^{k+1} + \varepsilon \right] = \theta (1 + \mu/2)^{k+1}$$

и, таким образом, имеет вид (22). Лемма доказана.

1. *Майстренко Ю. Л., Шарковский А. Н.* Асимптотическое поведение решений нелинейной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 5.— С. 147.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1986.— 280 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.05.87