УДК 518:517.51

И. М. Колодий, И. И. Верба

Разностный аналог теоремы вложения анизотропного пространства Соболева $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n}$

В настоящей работе доказан разностный аналог теоремы вложения анизотропного пространства С. Л. Соболева $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n}(K_r)$ в $L_q(K_r)$, где $K_r = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n : 0 \leqslant x_i \leqslant r,\ i = 1, 2, \ldots n\}$, $p_i \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$, $q =$

$= n\left(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\right)^{-1} > 1$ (см. [1 — 4]). Близкие результаты содержатся в работах [5, 6].

Стороны куба K_r разобьем точками $0,\ r/N,\ 2r/N, \ldots, (N-1)\,r/N,\ r$ на N частей шагом $h = r/N$ и построим сетку с узлами в точках $\{i_1 r/N, i_2 r/N, \ldots, i_n r/N)$, где целые числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ изменяются от 0 до N. Эту сетку обозначим $K_{r,h}$. Будем считать, что функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ задана на сетке. Ее значения в узлах $(i_1 r/N, i_2 r/N, \ldots, i_n r/N)$ сетки обозначим через $u(i_1, \ldots, i_n)$, т. е. положим $u(i_1, \ldots, i_n) = v(i_1 r/N, \ldots, i_n r/N)$. Введем разностную производную

$$u_{x_k}(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n) = (u(i_1, \ldots, i_k + 1, \ldots, i_n) - u(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n))/h.$$

Дадим определение разностных аналогов пространств $L_q(K_r)$ и $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n}(K_r)$, которые обозначим $L_{q,h}(K_{r,h})$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n,h}(K_{r,h})$.

Определение 1. *Функция $u(i_1, \ldots, i_n) \in L_{q,h}(K_{r,h})$, $q \geqslant 1$, если существует не зависящая от h постоянная $M > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{r,h})} = \left(r^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1, \ldots, i_n)|^q h^n\right)^{1/q} \leqslant M.$$

Определение 2. *Функция $u(i_1, \ldots, i_n) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n,h}(K_{r,h})$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, если она обращается в нуль на границе куба K_r и существует не зависящая от h постоянная $M > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n,h}(K_{r,h})} = \sum_{k=1}^{n}\left(r^{-n+p_k} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1, \ldots, i_n)|^{p_k} h^n\right)^{1/p_k} \leqslant M.$$

Теорема. *Пусть $u(i_1, \ldots, i_n) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n,h}(K_{r,h})$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$. Тогда, если*

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} > 1$, *то* $u(i_1, \ldots, i_n) \in L_{q,h}(K_{r,h})$, *где* $q = n\left(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\right)^{-1} > 1$;

2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} \leqslant 1$, *то* $u(i_1, \ldots, i_n) \in L_{q,h}(K_{r,h})$, *при любом* $q \geqslant 1$; *и в любом случае справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{r,h})} \leqslant C\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\ldots,p_n,h}(K_{r,h})} \tag{1}$$

с константой C, не зависящей от u и h, а зависящей лишь от n, $p_1, \ldots, p_n$, q.

Замечание 1. В случае $p_2 = \ldots = p_n = p > 1$, $q > 1$, $1/q = 1/p - 1/n$ получаем известный результат работы [5].

Замечание 2. Через C в разных местах будут обозначаться, вообще говоря, разные «постоянные» зависящие лишь от n, p_1, …, p_n, q. В одной цепочке неравенств разные «постоянные», будут обозначаться через C_1, C_2, …

Доказательство. Теорему достаточно доказать для куба K_1, а затем сделать преобразование подобия. Для функции одной переменной на отрезке $[0, 1]$ такой, что $y(0) = 0$, выполняется очевидное равенство $y(i) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{y(k+1) - y(k)}{h} = \sum_{k=0}^{i-1} y_x(k)\, h$. Тогда

$$|y(i)| \leqslant \sum_{k=0}^{i-1} |y_x(k)|\, h \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |y_x(k)|\, h = \sum_{i=0}^{N-1} |y_x(i)|\, h. \tag{2}$$

Аналогично для функции n переменных, обращающейся в нуль на границе куба K_r, имеем

$$|y(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)| \leqslant \sum_{i_k=0}^{N-1} |y_{x_k}(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)|\, h \tag{3}$$

для любого $k = 1, \ldots, n$, т. е. оценка справедлива по любому направлению $x_1, \ldots, x_n$.

В случае $n = 1$ оценка (1) следует из цепочки неравенств (с учетом неравенства (2)):

$$\left(\sum_{i=0}^{N-1} |u(i)|^q h\right)^{1/q} \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} |u(i)| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} |u_x(i)|\, h \leqslant \left(\sum_{i=0}^{N-1} |u_x(i)|^{p_1} h\right)^{1/p_1}$$

при любом $q \geqslant 1$ и $p_1 \geqslant 1$.

Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 2$. Заметим, что при $n \geqslant 2$ достаточно рассмотреть случай $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$, так как случай $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$ сводится к предыдущему уменьшением одного из показателей, большего единицы, например p_1, на $\varepsilon > 0$ так, чтобы $p_1 - \varepsilon \geqslant 1$. Тогда сумма обратных величин к $p_1 - \varepsilon, p_2, \ldots, p_n$ будет больше единицы и показатель q в этом случае равен $n\left(-1 + \frac{1}{p_1 + \varepsilon} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно брать сколь угодно малым, то показатель q будет сколь угодно большим. Случай $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} < 1$ сводится к случаю $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$ уменьшением показателей $p_i \geqslant 1$ до $p_i' \geqslant 1$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i'} = 1$ с применением оценки (1) и неравенства Гельдера в правой части (1).

Итак, далее в доказательстве теоремы, считаем, что $n \geqslant 2$, а $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$. Установим оценку*

$$|(|u(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)|^{\alpha_k})_{x_k}| \leqslant C(|u(i_1, \ldots, i_k + 1, \ldots, i_n)|^{\alpha_k - 1} + $$
$$+ |u(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)|^{\alpha_k - 1})\, |u_{x_k}(i_1, \ldots, i_k, \ldots i_n)|, \tag{4}$$

где $\alpha_k \geqslant 1$.

Рассмотрим дифференцируемую (в классическом смысле) функцию $\varphi(s)$, $s \in (-\infty, \infty)$. По теореме Лагранжа $\varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(\theta s)\, s$, $0 < \theta < 1$. Положим $\varphi(s) = (s + |u(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)|)^{\alpha_k}$, где $\alpha_k \geqslant 1$, $s + |u(i_1, \ldots, i_n)| \geqslant$

---

* Идея доказательства этой оценки подсказана Ю. М. Мокиным.

$\geqslant 0$. Тогда

$$(s+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha_k}-(|u(i_1,\dots,i_k,\dots i_n)|)^{\alpha_k}=$$
$$=\alpha_k(\theta s+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha_k-1}\cdot s.$$

Полагая в этом равенстве $s=|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots$ $\dots,i_n)|$, получаем

$$|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha_k}-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k}=\alpha_k(\theta|u(i_1,\dots,i_k+$$
$$+1,\dots,i_n)|+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha_k-1}(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-$$
$$-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|).$$

Разделив обе части этого равенства на h и оценив результат по модулю, получим оценку для разностной производной $(|u|^{\alpha_k})_{x_k}$:

$$|(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k})_{x_k}|=\alpha_k(\theta|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+$$
$$+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1}\left|\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-\\-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_k(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha_k-1}\times$$
$$\times\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)-u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\leqslant C(|u(i_1,\dots,i_k+$$
$$+1,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1})|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|.$$

Оценка (4) доказана.

Вместо функции y в (3) подставим $|u|^{\alpha_k}$ и воспользуемся оценкой **(4)**:

$$|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha_k}\leqslant C\sum_{i_k=0}^{N-1}(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1}+$$
$$+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1})|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h.$$

Перемножим эти неравенства и возведем в степень $\dfrac{1}{n-1}$:

$$|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-1}}\leqslant C\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_k=0}^{N-1}(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1}+$$
$$+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1})|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Просуммировав последнее неравенство последовательно по $i_1,\dots,i_n$, применяя на каждом шаге неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-1}}h^n\leqslant C\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}(|u(i_1,\dots,i_k+$$
$$+1,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha_k-1})|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h^n\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень $\frac{n-1}{n}$ и применим неравенство Гельдера:

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-1}} h^n\Big)^{n-1/n} \leqslant C\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}(|u(i_1,\ldots,i_k+$$

$$+1,\ldots,i_n)|^{\alpha_k-1}+|u(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{\alpha_k-1})\,|u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|\,h^n\Big)^{1/n}\leqslant$$

$$\leqslant C\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}(|u(i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n)|^{\alpha_k-1}+|u(i_1,\ldots,i_k,\ldots$$

$$\ldots,i_n)|^{\alpha_k-1})^{\frac{p_k}{p_k-1}}h^n\Big)^{\frac{p_k-1}{p_k}\frac{1}{n}}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k}h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n)|^{\frac{(\alpha_k-1)p_k}{p_k-1}}h^n\Big)^{\frac{p_k-1}{p_k}\frac{1}{n}}+$$

$$+\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{(\alpha_k-1)p_k}{p_k-1}}h^n\Big)^{\frac{p_k-1}{p_k}\frac{1}{n}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k}h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}}.$$

Подберем числа α_k так, чтобы $\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-1}=(\alpha_k-1)\frac{p_k}{p_k-1}$, $\quad k=1,\ldots,n.$ Перепишем систему уравнений на числа α_k в виде $1-\frac{1}{p_k}=(\alpha_k-1)\times\times\frac{n-1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$, $k=1,\ldots,n$. Просуммировав уравнения системы по $k=1,\ldots,n$, получим

$$n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-n\Big)\frac{n-1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k},$$

откуда $\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-1}=n\Big(-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\Big)^{-1}=q.$ $\Big($Заметим, что $n\geqslant 2$ и $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}>1.\Big)$ Учитывая это в последнем неравенстве, имеем

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\ldots,i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant C\prod_{k=1}^{n}\Big(\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\ldots,i_k+1,\ldots$$

$$\ldots, i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{1}{q}\frac{\alpha_k-1}{n}} + \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{1}{q}\frac{\alpha_k-1}{n}}\Big) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k} h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}}.$$

Функция $u(i_1,\ldots,i_n)$ обращается в нуль на границе куба K_1. Следовательно,

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_k+1,\ldots i_n)|^q h^n = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^q h^n.$$

Тогда предыдущее неравенство можно записать так:

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{1}{q}\frac{\alpha_k-1}{n}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k} h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}} = C\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots$$

$$\ldots, i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-n}{n}} \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k} h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}}.$$

Заметив, что $\dfrac{n-1}{n} - \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k - n}{nq} = \dfrac{n-1}{n} - \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{nq} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q}$, получим

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^q h^n\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots$$

$$\ldots, i_n)|^{p_k} h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}\frac{1}{n}} \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{p_k} h^n\Big)^{\frac{1}{p_k}},$$

т. е. оценку (1) в кубе K_1. Теорема доказана.

1. *Лу Вень Туан.* К теореме вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными показателями // Вест. Львов. ун-та.— № 7. — 1961. — С. 23—27.
2. *Кружков С. Н.* Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб.— 1968.— **77**, вып. 3.— С. 299—334.
3. *Кружков С. Н., Колодий И. М.* К теоремам вложения анизотропных пространств Соболева // Успехи мат. наук.— 1983.— **38**, вып. 2.— С. 207—208.
4. *Кружков С. Н., Королев А. Г.* К теории вложения анизотропных пространств // Докл. АН СССР.— 1985.— **285**, № 5.— С. 1054—1057.
5. *Соболев С. Л.* Об оценках некоторых сумм для функций, заданных на сетке // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 1.— С. 5—16.
6. *Мокин Ю. И.* Сеточный аналог теоремы вложения для классов типа W // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1971.— **11**, № 6.— С. 1361—1373.

Львов, ун-т

Получено 08.10.86