УДК 512.552.12

*Б. В. Забавский*

# О некоммутативных кольцах с элементарными делителями

Исследуются максимально неглавные идеалы колец конечно порожденных главных идеалов. Описан новый класс колец элементарных делителей.

Досліджуються максимально неголовні ідеали кілець скінченно-породжених головних ідеалів. Описано новий клас кілець елементарних дільників.

Понятие кольца с элементарными делителями впервые введено в [1]. Ассоциативное кольцо $R$ с единицей называется кольцом с элементарными делителями, если любая матрица над $R$ обладает диагональной редукцией, т. е. если для любой матрицы $A$ над $R$ найдутся такие обратимые матрицы $P$, $Q$ соответствующих размеров, что $PAQ = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$—диагональная матрица, причем $R\varepsilon_{i+1} R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, r-1$. Кольца элементарных делителей изучались многими авторами [2]. Однако строение некоммутативных колец с элементарными делителями изучено мало. Настоящая статья является продолжением [3].

Приведем необходимые определения и факты. Под кольцом понимаем ассоциативное кольцо с единицей. Через $U(R)$, $J(R)$ обозначаем соответственно группу единиц и радикал Джекобсона кольца $R$. Напомним, что элемент кольца $R$ называется атомом, если он необратим и не представляется в виде произведения двух необратимых элементов. Представление элемента в виде произведения некоторых элементов называется его атомным разложением, если все сомножители этого произведения являются атомами. Назовем два атомных разложения элемента $a \in R$ в произведение регулярных элементов $a = b_1 \ldots b_k$, $a = c_1 \ldots c_n$ изоморфными, если $k = n$ и существует подстановка $i \to i'$ индексов $1, 2, \ldots, n$ такая, что $R/b_iR \cong R/c_{i'}R$ как правые $R$-модули. Назовем ненулевой регулярный элемент кольца $R$ факториальным, если он обладает атомным разложением, причем любые два его атомных разложения изоморфны. Длиной факториального элемента назовем число его атомных делителей. Назовем элемент $a \in R$ дуо-элементом, если $aR = Ra$. Регулярный дуо-элемент кольца $R$ называется инвариантным элементом кольца. Множество регулярных элементов кольца $R$ обозначим через $r(R)$.

Определение 1. *Правый (левый) идеал кольца $R$, являющийся максимальным в множестве правых (левых) неглавных идеалов кольца $R$ относительно порядка включения правых (левых) идеалов, назовем максимально неглавным правым (левым) идеалом.*

В [3] установлено существование этих идеалов.

Определение 2. *Двусторонний идеал кольца $R$, являющийся максимально неглавным как правым, так и левым идеалом, назовем максимально неглавным идеалом.*

Под кольцом с единственным максимально неглавным идеалом будем понимать кольцо, в котором существует единственный максимально неглавный идеал и не существует других максимально неглавных односторонних идеалов. Под кольцом конечно порожденных главных правых (левых) идеалов подразумеваем кольцо, в котором любой конечно порожденный правый (левый) идеал является главным правым (левым) идеалом. Кольцо конечно порожденных главных идеалов — это кольцо конечно порожденных главных правых и левых идеалов.

Теорема 1. *Пусть $R$ — кольцо конечно порожденных главных идеалов, все делители нуля которого лежат в радикале Джекобсона $J(R)$. Предположим, что $J(R)$ — единственный максимально неглавный идеал кольца $R$. Тогда* 1) *любой необратимый элемент $a \in R$, который не содержится в $J(R)$, является факториальным;* 2) *любой факториальный элемент не содержится в $J(R)$.*

Доказательство. Если $a \notin J(R)$ и $a \notin U(R)$, то $a$ — регулярный необратимый элемент $R$. Докажем, что $R$-модули $R/aR$ и $R/Ra$ являются нетеровыми справа и слева соответственно. Очевидно, $R$-модуль $R/aR$ ненулевой, и каждый его подмодуль — циклический подмодуль, а значит, конечно порожден. Аналогично, $R/Ra$ нетеров слева. Проверим, что $R$-модуль $R/aR$ является также и артиновым справа. Пусть $m_1R \supseteq \supseteq m_2R \supseteq \ldots \supseteq m_nR \supseteq \ldots$ — произвольная убывающая цепь подмодулей модуля $R/aR$.

По второй теореме Эми Нетер об изоморфизме этой цепи соответствует цепь правых идеалов $R \supseteq a_1R \supseteq a_2R \supseteq \ldots \supseteq a_nR \supseteq$, где $a_iR \supseteq aR$ и $a_iR/a_{i+1}R \cong R/m_iR$ при любом $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Учитывая это, видим, что $a = a_ib_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $a_{i+1}b_{i+1} = a_ib_i$ и $a_{i+1} = a_ic_i$, где $c_i \in R$, то $a_i(c_ib_{i+1} - b_i) = 0$. Так как $a = a_ib_i \notin J(R)$, то $a_i$ — регулярный элемент $R$ (в противном случае $a_i \in J(R)$, а тогда $a \in J(R)$. В итоге получим $b_i = c_ib_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, построена возрастающая цепь левых идеалов $Rb_1 \subseteq Rb_2 \subseteq \ldots \subseteq Rb_n \subseteq \ldots$, причем каждый элемент цепи содержит элемент $a$. Поэтому имеем возрастающую цепь подмодулей модуля $R/aR : Rb_1/Ra \subseteq Rb_2/Ra \subseteq \ldots \subseteq Rb_n/Ra \subseteq \ldots$. Она обрывается на некотором конечном шаге $k$. Поэтому $Rb_k = Rb_{k+1} = \ldots$. Так как все делители нуля лежат в радикале Джекобсона, то стандартными рассуждениями показываем, что элементы $b_k$, $b_{k+1}$, $\ldots$ ассоциированы слева и, тем более, $c_{k+1} \in U(R)$, $c_{k+1} \in U(R)$ и т. д. Поскольку $a = a_ib_i$, $a_{i+1} = =a_ic_i$, то $a_{k+1}R = a_{k+2}R = \ldots$. Отсюда следует, что $m_{k+1}R = m_{k+2}R = = \ldots$. Таким образом, $R/aR$ артинов справа. Значит $R$-модуль $R/aR$ обладает композиционным рядом. Следовательно, элемент $a$ является факториальным. В силу теоремы 1 [3] идеал $J(R)$ вполне прост. Отсюда следует, что любой факториальный элемент не принадлежит $J(R)$, ибо в противном случае идеалу $J(R)$ принадлежал бы некоторый атом $a \in R$. Докажем, что если $a$ — атом кольца $R$, то $aR$ — максимальный правый идеал кольца $R$. В самом деле, если это не так, то в $R$ существует максимальный правый идеал $M$, содержащий $aR$ собственным образом. Тем самым существует такой элемент $m \in M$, что $m \notin aR$. Так как $R$ — кольцо конечно порожденных главных правых идеалов, то $mR + aR = cR$. Поскольку $a$ — атом и $m \notin aR$, то $c \in U(R)$. Но это невозможно. Полученное противоречие доказывает, что для атома $a$ правый идеал $aR$ — максимальный правый идеал. В итоге получим, что $J(R) = aR$, а это противоречит выбору идеала $J(R)$. Аналогично рассматривается случай левых идеалов. Теорема доказана.

Напомним, что элемент $a \in R$ называется полным делителем элемента $b \neq 0$, если $RbR \subseteq aR \cap Ra$.

Теорема 2. *Пусть $R$ — кольцо конечно порожденных главных идеалов, все делители нуля которого лежат в радикале Джекобсона $J(R)$. Предположим, что $J(R)$ — единственный максимально неглавный идеал $R$. Если в матрице $A = (a_{ij})$ над кольцом $R$ хотя бы один из ее элементов является факториальным, то найдутся такие обратимые матрицы $P$, $Q$ над $R$ соответствующих размеров, что*

$$PAQ = \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

*где $f$ — факториальный элемент, который является полным делителем всех элементов матрицы $B$.*

Доказательство теоремы в силу теоремы 3.1 из [1] аналогично доказательству теоремы 6 из [3].

Лемма 1. *Пусть $a$ — дуо-элемент кольца $R$ конечно порожденных главных идеалов, все делители нуля которого лежат в радикале Джекобсона и $P$ — любая обратимая матрица над $R$. Тогда существует такая обратимая матрица $Q$ над $R$, что* $\operatorname{diag}(a, \dots, a)\,P = Q \operatorname{diag}(a, \dots, a)$.

Доказательство. Так как $a$ — дуо-элемент кольца $R$, то для любого элемента $b \in R$ найдется такой $b' \in R$, что $ab = b'a$. Если $P = (p_{ij})$, то $\operatorname{diag}(a, \dots, a)\,P = Q \operatorname{diag}(a, \dots, a)$, где $Q = (p'_{ij})$. Легко убедиться, что матрица $Q$ обратима.

Основными результатами данной статьи являются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $R$ — кольцо конечно порожденных главных идеалов, все делители нуля которого лежат в радикале Джекобсона $J(R)$, причем $J(R)$ — единственный максимально неглавный идеал $R$, и в $R$ для любого конечного множества нефакториальных элементов $a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, существует такой дуо-элемент $a$, что $a_i = af_i$, где $f_i$ — факториальный элемент $R$. Тогда $R$ — кольцо с элементарными делителями.*

Доказательство. Отметим, что если $a_i$ — нефакториальный элемент, то $a_i \in J(R)$. Так как $a_i = af_i$, где $f_i$ — факториальный элемент, то в силу теоремы 1 $f_i \notin J(R)$ и $f_i$ — регулярный элемент. Учитывая теорему 2, достаточно провести доказательство для случая, когда все элементы исходной матрицы $A$ нефакториальны. Пусть $A = (a_{ij})$. В силу предположений в $R$ существует дуо-элемент $a \in J(R)$ такой, что $a_{ij} = af_{ij}$, где $f_{ij}$ — факториальный элемент $R$. Учитывая это, представляем матрицу $A$ в виде $A = B \cdot C$, где $B = \operatorname{diag}(a, \dots, a)$, $C = (f_{ij})$. Применяя индукцию по размеру матрицы $C$, на основании теоремы 2 устанавливаем, что матрица $C$ обладает диагональной редукцией. В силу леммы 1 матрица $A$ обладает диагональной редукцией. Теорема доказана.

Напомним, что область конечно порожденных главных идеалов называется областью Безу [3].

Теорема 4. *Пусть $R$ — область Безу с единственным максимально неглавным идеалом. Если для любого элемента $a \in R$ существует инвариантный элемент $b \in R$ такой, что $RaR = bR = Rb$, то $R$ — область с элементарными делителями.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.1 [1] и теоремы 2 для доказательства теоремы достаточно ограничиться треугольными матрицами, все элементы которых принадлежат максимально неглавному идеалу $N$ области $R$. Пусть $A = (a_{ij})$ — верхняя треугольная матрица над $R$, где $a_{ij} \in N$. Рассмотрим правый идеал $I$, порожденный всеми элементами матрицы $A$. В силу предположений на область $R$ имеем $I = dR$. Тогда $a_{ij} = db_{ij}$ для любых $i$, $j$, и правый идеал, порожденный всеми элементами $b_{ij}$, совпадает с кольцом $R$. В силу условий теоремы, наложенных на область $R$, имеем, что по крайней мере один из элементов $b_{ij}$ является факториальным. Пусть это будет элемент $b_{kl}$.

Рассмотрим $Ra_{ij}R = c_{ij}R = Rc_{ij}$, $RdR = sR = Rs$. Поскольку $a_{kl}R \subseteq \subseteq dR$, то $a_{kl} = st$, $t \in R$. Учитывая, что $a_{kl} = db_{kl}$, где $b_{kl}$ — факториальный элемент, из равенства $RdR = sR = Rs$ имеем $d = sr$, где $RrR = R$, т. е. $r$ — факториальный элемент. Отсюда имеем, что $t = rb_{kl}$ — факториальный элемент. Поскольку $a_{ij}R \subseteq dR$, имеем $a_{ij} = sx_{ij}$, где $x_{ij} \in R$ и $x_{kl} = t$. Поэтому матрицу $A$ можно представить в виде $A = D \cdot B$, где $D = \mathrm{diag}\,(s, \ldots, s)$, $B = (x_{ij})$. Применяя индукцию по размеру матрицы $B$, в силу теоремы 2 получаем, что матрица $B$, а значит, и матрица $A$ обладают диагональной редукцией. Теорема доказана.


1. *Kaplansky J*. Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— **66**.— P. 464—491.
2. *Shores T*. Bezout rings and their modules //Ring Theory Proc. Oklf. Conf.— New York : Acad. press, 1974.— P. 63—73.
3. *Забавский Б. В*. О некоммутативных кольцах элементарных делителей // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 440—444.


Львов. ун-т

Получено 20.02.89