УДК 517.984.48

Г. В. Радзиевский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

МИНИМАЛЬНОСТЬ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В УГЛЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

We study the minimality of the elements $x_{h,j,k}$ of the canonical system of root vectors. These elements correspond to the eigenvalues μ_k of operator functions $L(\lambda)$ analytic in an angle; we assume that operators act in a Hilbert space $\mathfrak{H}$. In particular, we consider the case where $L(\lambda) = I + T(\lambda)C^{\beta} - \lambda C$, $\beta > 0$, I is the identity operator, C is a completely continuous operator, $\|(I - \lambda C)^{-1}\| \le c$ for $|\arg\lambda| \ge \theta$, $0 < \theta < \pi$, the operator function $T(\lambda)$ is analytic, and $\|T(\lambda)\| \le c$ for $|\arg\lambda| < \theta$. It is proved that, in this case, there exists $\rho > 0$ such that the system of vectors $C^{\nu}x_{h,j,k}$, for which $|\mu_k| > \rho$, is minimal in $\mathfrak{H}$ for an arbitrary positive $\nu < 1 + \beta$.

Вивчається мінімальність елементів $x_{h,j,k}$, які входять у канонічні системи кореневих векторів, що відповідають характеристичним числам μ_k аналітичних у куті оператор-функцій $L(\lambda)$, а оператори діють у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Доведено, що коли $L(\lambda) = I + T(\lambda)C^{\beta} - \lambda C$, число $\beta > 0$, I — тотожній, C — цілком неперервний оператори і $\|(I - \lambda C)^{-1}\| \le c$, $|\arg\lambda| \ge \theta$, $0 < \theta < \pi$, оператор-функція $T(\lambda)$ аналітична і $\|T(\lambda)\| \le c$, $|\arg\lambda| < \theta$, тоді існує $\rho > 0$, для якого система векторів $C^{\nu}x_{h,j,k}$, якщо $|\mu_k| > \rho$, мінімальна в $\mathfrak{H}$ при довільному додатному $\nu < 1 + \beta$.

1. Введение. *Обозначения и определения. Формулировка результатов о минимальности.* Через $\mathfrak{H}$ обозначается гильбертово пространство, $\mathfrak{H}^m$ — прямая сумма m экземпляров $\mathfrak{H}$; $[\mathfrak{H}]$, $\mathfrak{S}_{\infty}[\mathfrak{H}]$ — соответственно множество ограниченных и вполне непрерывных операторов. Далее рассматриваются лишь линейные ограниченные операторы, действующие в $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{H}^m$, причем I — тождественный в $\mathfrak{H}$ оператор, а $\mathfrak{R}(A)$ и $\mathfrak{Z}(A)$ — область значений и ядро оператора A. Пусть Ω — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда через $\mathfrak{A}(\Omega; \mathfrak{B})$ обозначается совокупность всех аналитических в Ω и непрерывных по норме в $\overline{\Omega}$ вектор-функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Для числовой функции $\gamma(\lambda) > 0$, $\lambda \in \Omega$, определим $\mathfrak{A}(\Omega; \mathfrak{B}; \gamma(\lambda)) \equiv \{A(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Omega; \mathfrak{B}): \|A(\lambda)\| \le c\gamma(\lambda),\ \lambda \in \Omega\}$. Здесь и далее индекс при постоянной c в неравенствах опускается, если значение этой постоянной не играет роли для последующих рассуждений.

Число $\mu \in \Omega$ называется точкой спектра оператор-функции $L(\lambda)$, если оператор $L(\mu)$ необратим, и *дискретной точкой спектра*, если оператор $L(\lambda)$ обратим при λ, принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки μ, и в этой окрестности

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{h=0}^{p} (\lambda - \mu)^{-h-1} R_{p-h} + W(\lambda),$$

где R_h, $h = \overline{0, p}$, — конечномерные операторы и $R_0 \ne 0$, а $W(\lambda)$ — аналитическая в точке μ оператор-функция. То же самое определение применяется и к оператору A, если считать $L(\lambda) = \lambda I - A$. Через $\mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$ обозначим такое множество оператор-функций $L(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Omega; [\mathfrak{H}])$, что если при $\mu \in \Omega$

---

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований в Государственном комитете Украины по науке и технологиям.

оператор $L(\mu)$ необратим, то μ — дискретная точка спектра $L(\lambda)$. Достаточное условие принадлежности $L(\lambda)$ множеству $\mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$ вытекает из следующего утверждения, принадлежащего М. В. Келдышу [1, с. 17, 18; 2, лемма 5.5].

Утверждение 1. *Пусть на связном открытом множестве* Ω *задана оператор-функция* $L(\lambda)=A(\lambda)+B(\lambda)$, *где* $A(\lambda)$, $A^{-1}(\lambda)\in\mathfrak{A}(\Omega;[\mathfrak{H}])$, $B(\lambda)\in\mathfrak{A}(\Omega;\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}])$, *и оператор* $L(\lambda_0)$ *обратим при некотором* $\lambda_0\in\Omega$. *Тогда* $L(\lambda)\in\mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$.

Для формулировки утверждений о минимальности приведем в удобном виде восходящее к М. В. Келдышу [1] понятие канонической системы корневых векторов. Далее считаем, что $L(\lambda)\in\mathfrak{A}(\Omega;[\mathfrak{H}])$. Элементы $x_0,\dots,x_d$ из $\mathfrak{H}$ называются *цепочкой корневых векторов* оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающей характеристическому числу μ, если собственный вектор $x_0\neq 0$ и

$$\left\| L(\lambda)\sum_{h=0}^{p}(\lambda-\mu)^h x_h\right\| = O(|\lambda-\mu|^{d+1})$$

в окрестности точки μ; элемент x_h — присоединенный (или корневой) вектор порядка h. Каждому собственному вектору $x\in\mathfrak{Z}(L(\mu))$ оператор-функции $L(\lambda)$ поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к x элементов. Число $d+1$ называется *кратностью собственного вектора* x. Если оператор-функция $L(\lambda)\in\mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$, то в области Ω имеется не более счетного числа дискретных точек спектра μ_k, $k=1,2,\dots$, являющихся характеристическими числами $L(\lambda)$, и $\dim\mathfrak{Z}(L(\mu_k))<\infty$, $k=1,2,\dots$ (см., например, [1]). Для каждого характеристического числа μ_k существует *каноническая система корневых векторов*

$$x_{0,j,k},\dots,x_{d_{j,k},j,k},\quad j=\overline{1,\dim\mathfrak{Z}(L(\mu_k))},\tag{1}$$

что означает: 1) при каждом фиксированном k векторы (1) образуют цепочку корневых векторов $L(\lambda)$, отвечающую характеристическому числу μ_k; 2) кратность собственного вектора $x_{0,1,k}$ достигает возможного максимума $d_{1,k}+1$ среди всех собственных векторов $x\in\mathfrak{Z}(L(\mu_k))$; 3) кратность собственного вектора $x_{0,j,k}$ при $1<j\le\dim\mathfrak{Z}(L(\mu_k))$ достигает возможного максимума $d_{j,k}+1$ среди всех собственных векторов $x\in\mathfrak{Z}(L(\mu_k))$, не выражающихся линейно через $x_{0,1,k},\dots,x_{0,j-1,k}$. Множество мультииндексов (h,j,k), нумерующее векторы (1), обозначим символом $\Lambda(L(\lambda);\Omega)$, причем $h=\overline{0,d_{j,k}}$, $j=\overline{1,\dim\mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$, $k=1,2,\dots$. Канонические системы корневых векторов в общем случае определены не однозначно, но если задана нумерация характеристических чисел, то множество мультииндексов $\Lambda(L(\lambda);\Omega)$ определено однозначно. Далее считаем нумерацию характеристических чисел и выбор отвечающих им канонических систем (1) фиксированным.

Введем векторы

$$x_{h,j,k}(\lambda^l)=\sum_{s=0}^{l}C_l^s\mu_k^{l-s}x_{h-s,j,k}\,(\in\mathfrak{H}),$$

причем, если $l > h$, то в этом равенстве векторы с отрицательными индексами полагаем равными нулю. В пространстве $\mathfrak{H}^m$ построим вектор $x_{h,j,k}^m = \{x_{h,j,k}, x_{h,j,k}(\lambda), \ldots, x_{h,j,k}(\lambda^{m-1})\}$, который называется производным по Келдышу вектором размера m. Отметим, что $x_{h,j,k}^1 = x_{h,j,k}$.

По $A_j \in [\mathfrak{H}]$, $j = \overline{1,m}$, определим оператор $\operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_m\} \in [\mathfrak{H}^m]$, оператор-матрица которого является диагональной и равна $\{\delta_{j,l} A_j\}_{j,l=1}^m$, где $\delta_{j,l}$ — символ Кронекера.

Пусть оператор $|A| = (A^* A)^{1/2}$. Для $\alpha > 0$ функция $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha \exp \times \times i\alpha \arg\lambda$, $\lambda \neq 0$, $-\pi < \arg\lambda \leq \pi$. Положим область $\Psi_{\theta,\eta} = \{\lambda : |\lambda| > \eta, |\arg\lambda| < \theta\}$, $0 < \theta < \pi$, $\eta > 0$.

Основные результаты работы относятся к изучению минимальности производных по Келдышу векторов оператор-функции

$$L(\lambda) = p(\lambda H) + S(\lambda) + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s T_s(\lambda) |H|^{\beta+s}, \tag{2}$$

рассмотренной в области $\Psi_{\theta,\eta}$, число $\beta > 0$, оператор-функции $\lambda^\beta S(\lambda)$, $T_0(\lambda), \ldots, T_{n-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}]; 1)$; H — нормальный оператор, $p(\lambda)$ — полином степени n и $p(\lambda H) = c_0 I + c_1 \lambda H + \ldots + c_n \lambda^n H^n$, причем $c_0 c_n \neq 0$ (т. е. $p(0) \neq 0$), а $p(\lambda H) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta+\varepsilon,\eta}; [\mathfrak{H}])$, $0 < \theta - \varepsilon < \theta + \varepsilon < \pi$, и $p(\lambda H)$ обратим, если $|\lambda| \geq \eta$, $\theta - \varepsilon < |\arg\lambda| < \theta + \varepsilon$ и если $|\lambda| = \eta$, $|\arg\lambda| < \theta$.

Через $E = E(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$ обозначим ортопроектор на линейную оболочку собственных векторов оператор-функции $p(\lambda H)$, отвечающих характеристическим числам, принадлежащим области $\Psi_{\theta,\eta}$. Пусть $\lambda_\upsilon(H)$ — дискретные точки спектра оператора H. Тогда $m = m(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$ — число, равное наибольшему количеству корней с учетом кратностей полинома $p(\lambda\lambda_\upsilon(H))$, попавших в область $\Psi_{\theta,\eta}$. Ясно, что E является ортопроектором на подпространство тех собственных векторов оператора H, отвечающих собственным значениям $\lambda_\upsilon(H)$, для которых полином $p(\lambda\lambda_\upsilon(H))$ имеет хотя бы один корень в области $\Psi_{\theta,\eta}$, т. е. $E = 0$ в том и только в том случае, когда $m = 0$. Дальше будет показано существование такого $\rho \geq \eta$, что $L(\lambda) \in \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}])$, а в случае $\dim E < \infty$ — что операторы $L(\lambda)$ и $p(\lambda H)$ обратимы при $\lambda \in \Psi_{\theta,\rho}$. Поэтому в случае $\dim E < \infty$ сформулированные далее результаты становятся очевидными, а значит, не умаляя общности, будем предполагать $\dim E = \infty$. Обозначим нормальный оператор $C = EH$ (в доказательстве теоремы 7 показана вполне непрерывность C).

В принятых обозначениях справедливы теоремы, в которых и далее пустую систему векторов считаем минимальной.

Теорема 1. *Для оператор-функции* (2) *существует такое число* $\rho \geq \eta$, *что для любого положительного* $\nu < 1 + (n - m + 1)\min(\beta, 1)$ *система векторов*

$$\operatorname{diag}\{|C|^\nu, |C|^{\nu+1}, \ldots, |C|^{\nu+m-1}\} x_{h,j,k}^m \quad (h,j,k) \in \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho}), \tag{3}$$

минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^m$.

Теорема 1 учитывает лишь случай $\beta \le 1$, но при дополнительном ограничении на оператор-функцию $L(\lambda)$ из нее в п. 3 выводится следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в* (2) $S(\lambda) \equiv 0$. *Тогда существует такое* $\rho \ge \eta$, *что для любого положительного* $\nu < 1 + \beta + (n-m)\min(\beta, 1)$ *система векторов* (3) *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^m$.

***Следствие* 1.** *Пусть в* (2) *полином* $p(\lambda) = 1 + \lambda^n$, *а* d — *наименьшее целое число, для которого* $n\theta/\pi \le d$. *Тогда существует такое* $\rho \ge \eta$, *что для любого положительного* $\nu < 1 + (n - d + 1)\min(\beta, 1)$, *а в случае* $S(\lambda) \equiv 0$ *для* $\nu < 1 + \beta + (n-d)\min(\beta, 1)$, *система векторов* (3), *если в ней считать* $m = d$, *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}^d$.

Доказательство. Учитывая обратимость оператор-функции $p(\lambda H)$ при $|\lambda| \ge \eta$ и $\theta - \varepsilon < |\arg\lambda| < \theta + \varepsilon$ получаем, что в область $\Psi_{\theta,\eta}$ при фиксированном ν не может попасть более чем d чисел $\lambda_\nu^{-1}(H)\exp(i\pi s/n)$, $s = \overline{1, n}$, поэтому $d \ge m(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$. Но из минимальности системы векторов (3) следует минимальность системы векторов вида (3), если в (3) считать $d \ge m$. Отсюда и из теоремы 1 и 2 вытекает утверждение следствия 1.

***Следствие* 2.** *Пусть в* (2) *полином* $p(\lambda) = 1 + \lambda^n$, *число* $\theta < \pi/n$, *оператор* H^n *самосопряжен, т. е.* $H^n = H_1^n - H_2^n$, *где* H_1 *и* H_2 — *самосопряженные неотрицательные операторы и* $H_1 H_2 = 0$. *Предположим, что оператор* H_2 *вполне непрерывен. Тогда существует такое* $\rho \ge \eta$, *что система векторов* $H_2^n x_{h,j,k}$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho})$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}$. *Если, кроме того,* $S(\lambda) \equiv 0$, *то для любого положительного* $\nu < \beta + n$, *система векторов* $H_2^\nu x_{h,j,k}$ *будет минимальной в пространстве* $\mathfrak{H}$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho})$.

Доказательство. При $\beta \ge 1$ следствие 2 вытекает из следствия 1. Пусть $\beta < 1$. Выберем такое натуральное число r, что $\beta r \ge 1$. Тогда оператор-функция $L_1(\lambda) = L(\lambda^r)$, рассмотренная в области $\Psi_{\theta/r, \eta^{1/r}}$, имеет вид (2), но уже с числом β, равным βr, оператором H, равным $H_1^{1/r} + e^{i\pi/r} H_2^{1/r}$, и полиномом $p(\lambda)$, равным $1 + \lambda^{nr}$. Тем самым $|C| = E H_2^{1/r}$, где E — ортопроектор на линейную оболочку собственных векторов оператора H_2, отвечающих собственным числам $\lambda_\nu(H_2) < \eta$. Обозначим через $y_{h,j,k}$ векторы, входящие в канонические системы корневых векторов оператор-функции $L_1(\lambda)$, отвечающие характеристическим числам $\mu_k^{1/r}$, где μ_k — характеристические числа $L(\lambda)$. Тогда согласно следствию 1 найдется такое $\rho \ge \eta$, что для $\nu_1 = nr$, а в случае $S(\lambda) \equiv 0$ для $\nu_1 < \beta r + nr$ система векторов $|C|^{\nu_1} y_{h,j,k}$ $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda^r); \Psi_{\theta/r, \rho^{1/r}})$, минимальна. Из доказательства леммы 1.9 работы [3] видно, что $\Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho}) = \Lambda(L(\lambda^r); \Psi_{\theta/r,\rho^{1/r}})$, а при фиксированных j и k векторы $y_{h,j,k}$ линейно выражаются через векторы $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$. Отсюда, из леммы 7 работы [4] и равенства $|C|^{\nu_1} = H_2^\nu$ вытекает утверждение следствия 2.

Отметим, что в условиях следствия 2 оператор $p(\lambda H)$ обратим, если $\arg\lambda \ne \pi s/n$, $s = \overline{-n-1, n}$, поэтому соответствующее требование об обратимости $p(\lambda H)$ в определении оператор-функции (2) здесь опускается.

Для оператора C, удовлетворяющего условию

$$\| (I - \lambda C)^{-1} \| \leq c, \quad |\arg \lambda| \geq \theta, \tag{4}$$

определены (см., например, [5, с. 136, 137]) положительные степени.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* $L(\lambda) = I + S(\lambda) + T(\lambda)C^{\beta} - \lambda C$, *где число* $\beta > 0$, *оператор* $C \in \mathfrak{S}_{\infty}[\mathfrak{H}]$ *и удовлетворяет условию* (4), *а* $\lambda^{\beta} S(\lambda)$, $T(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}]; 1)$. *Тогда существует такое* $\rho \geq \eta$, *что* $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}])$ *и при* $\nu = 1$, *а в случае* $S(\lambda) \equiv 0$ *для любого положительного* $\nu < 1 + \beta$ *система векторов* $C^{\nu} x_{h,j,k}$ *при* $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho})$ *минимальна в пространстве* $\mathfrak{H}$.

Доказательство теорем 1 – 3 основано на теореме 5 о факторизации оператор-функции, заданной на двух лучах, которая, в свою очередь, выводится из результатов И. Ц. Гохберга ([6], теоремы 2.1, 2.3), причем приведенная здесь теорема 4, если в ней считать $q = 1$, совпадает с теоремой 2.3 из [6]. Требования на факторизуемую оператор-функцию в теореме 5 можно ослабить, однако в случае теорем 1 – 3 такое уточнение не существенно.

Исследование минимальности корневых векторов, отвечающих характеристическим числам из левой полуплоскости или из угла, в основном для полиномиальных пучков операторов проводилось многими авторами, см., например, работы [7 – 11], где (особенно в [10]) имеется обширная библиография по данному вопросу. Результаты работ [8 – 10] основаны на изучении свойств решений соответствующих дифференциальных уравнений на полуоси, что позволило изучить минимальность части корневых векторов полиномиальных или специального вида аналитических в полуплоскости оператор-функций. Полученные здесь результаты о минимальности не содержат, безусловно, все утверждения такого рода из работ [7 – 11], но в большинстве случаев они существенно дополняют их.

2. Теоремы о факторизации. Пусть область Ω содержит сколь угодно большие по модулю числа, а функции $\gamma_1(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda) > 0$, $\lambda \in \Omega$. Тогда множество вектор-функций

$$\mathfrak{A}(\Omega; \mathfrak{B}; o(\gamma_1(\lambda)) \cap \gamma_2(\lambda)) =$$

$$= \left\{ A(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Omega; \mathfrak{B}; \gamma_2(\lambda)) : \lim_{\zeta \to \infty} \sup_{\lambda \in \Omega : |\lambda| > \zeta} \frac{\|A(\lambda)\|}{\gamma_1(\lambda)} = 0 \right\}.$$

Далее везде $1 \leq q < \infty$, а число $q' = q(q-1)^{-1}$, если $1 < q < \infty$, и $q' = \infty$, если $q = 1$. Как обычно, через $L_q(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, обозначим банахово пространство измеримых по норме в смысле меры Лебега оператор-функций, заданных на отрезке $[a, b]$ (см., например, [12, с. 86, 93, 102, 103]), а через $\| \cdot \|_{L_q(a,b)}$ — норму в $L_q(a, b)$. Пусть $\tilde{L}_q$ — пространство оператор-функций $T(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, представимых в виде

$$T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} X(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

с оператор-функцией $X(\xi) = L_1(-\infty, \infty)$ и $\lim_{t \to \pm\infty} \| X(\xi) \|_{L_q(t,t+1)} = 0$, а значения $X(\xi)$ почти всюду принадлежат $\mathfrak{S}_{\infty}[\mathfrak{H}]$. Через $\tilde{L}_q^{\pm}$ обозначим подпространства пространства $\tilde{L}_q$, для которых в представлении (5) $X(\xi) = 0$ при $\mp\xi > 0$ соответственно. Норму в $\tilde{L}_q$, а значит, и в $\tilde{L}_q^{\pm}$ зададим равенством

$$\|T(\lambda)\|_{\tilde{L}_q} = \|X(\xi)\|_{L_1(-\infty,\infty)} + \sup_{-\infty < t < \infty} \|X(\xi)\|_{L_q(t,t+1)}.$$

Из неравенства Минковского (см., например, [13, с. 179]) заключаем, что $\tilde{L}_q$ и $\tilde{L}_q^{\pm}$ являются банаховыми алгебрами. Простые выкладки показывают справедливость включений

$$\tilde{L}_q^{\pm} \in \mathfrak{A}\Big(\pm \operatorname{Im}\lambda > 0; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; o(1) \cap (1 + |\operatorname{Im}\lambda|)^{-1/q'}\Big). \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть при* $-\infty < \lambda < \infty$ *оператор* $I + T(\lambda)$ *обратим, а оператор-функция* $T(\lambda) \in \tilde{L}_q$. *Тогда найдутся такие операторы* P_j, *для которых* $\dim P_j < \infty$ *при* $j \neq 0$, *а* $P_j P_s = \delta_{j,s} P_j$ *и* $\sum_{j=-\kappa_-}^{\kappa_+} P_j = I$, $\kappa_{\pm} \geq 0$, *что для произвольных чисел* λ_1, λ_2 *с* $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$ *существует факторизация*

$$I + T(\lambda) = [I + M(\lambda)]\, P(\lambda; \lambda_1, \lambda_2)\, [I + N(\lambda)], \tag{7}$$

в которой

$$P(\lambda; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=-\kappa_-}^{\kappa_+} \left(\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2}\right)^j P_j, \tag{8}$$

оператор-функции $M(\lambda)$, $[I + M(\lambda)]^{-1} - I \in \tilde{L}_q^-$, *и* $N(\lambda)$, $[I + N(\lambda)]^{-1} - I \in \tilde{L}_q^+$.

Доказательство этой теоремы в случае $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ полностью повторяет вывод теоремы 2.3 из теоремы 2.1 работы [6], если учесть следующее предположение: *множество всех убывающих на бесконечности дробно-рациональных функций с полюсами, лежащими вне вещественной прямой, принадлежит при каждом фиксированном* q *пространству числовых функций* $\tilde{L}_q$ *и образует в нем всюду плотное множество.* Переход от $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ к произвольным λ_1 и λ_2 осуществляется с помощью тождества $P(\lambda; \lambda_1, \lambda_2) = P(\lambda; \lambda_1, \lambda_3) P(\lambda; \lambda_3, \lambda_4) P(\lambda; \lambda_4, \lambda_2)$, а также просто проверяемого включения $P(\lambda; \lambda_1, \lambda_2) - I \in \tilde{L}_q^{\pm}$, $\pm\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$, $\pm\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, $1 \leq q < \infty$, и того факта, что $\tilde{L}_q^{\pm}$ — банаховы алгебры. Наметим теперь доказательство сформулированного предложения. Принадлежность убывающих на бесконечности дробно-рациональных функций с полюсами, лежащими вне вещественной прямой, пространству $\tilde{L}_q$ вытекает из приведенных ниже леммы 1 и утверждения 2 или из вида (см., например, [14, с. 358, 359]) преобразования Фурье функций $(\lambda - \mu)^{-s}$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Так как $\tilde{L}_q = \tilde{L}_q^+ + \tilde{L}_q^-$, то достаточно установить полноту функций $(\lambda - \mu)^{-1}$, $\operatorname{Im}\mu < 0$, в пространстве $\tilde{L}_q^+$, что равносильно доказательству полноты функций $e^{-i\mu\xi}$, $\operatorname{Im}\mu < 0$, в пространстве J, состоящем из функций $x(\xi) \in L_1(0, \infty)$, для которых $\lim_{t \to +\infty} \|x(\xi)\|_{L_q(t,t+1)} = 0$ и с нормой

$$\|x(\xi)\|_J = \|x(\xi)\|_{L_1(0,\infty)} + \sup_{0 \leq t < \infty} \|x(\xi)\|_{L_q(t,t+1)}.$$

Из общего вида линейного непрерывного функционала в пространстве L_q выводится, что любой линейный непрерывный функционал f^* на пространстве J имеет вид

$$f^*(x) = \int_0^\infty f(\xi)\, x(\xi)\, d\xi,$$

а функция $f(\xi)$ удовлетворяет, по крайней мере, следующему неравенству $\| f(\xi) \|_{L_{q'}(t,t+1)} \le 2 \| f^* \|$, $0 \le t < \infty$. Поэтому если система $e^{-i\mu\xi}$, $\operatorname{Im} \mu < 0$, неполна в J, то найдется такая не равная нулю почти всюду функция $f(\xi)$, для которой $\sup\limits_{0 \le t < \infty} \| f(\xi) \|_{L_q(t,t+1)} < \infty$, а значит,

$$e^{-i\mu\xi} f(\xi) \in L_1(0, \infty), \quad \int_0^\infty e^{-i\mu\xi} f(\xi)\, d\xi \equiv 0, \quad \operatorname{Im} \mu < 0.$$

Отсюда и из теоремы о единственности преобразования Фурье следует, что почти всюду $f(\xi) = 0$. Полученное противоречие доказывает требуемую полноту.

В дальнейшем непрерывность и производные оператор-функций понимаются в смысле операторной нормы. Следующая лемма содержит достаточное условие справедливости включения $T(\xi) \in \tilde{L}_q$.

Лемма 1. *Пусть* $T(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, *— трижды непрерывно дифференцируемая оператор-функция со значениями в* $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, *а* $\| T(\lambda) \| \to 0$, *когда* $\lambda \to \pm\infty$, *и для некоторого* $\beta > 0$

$$\| T^{(1)}(\lambda) \| \le c(1 + |\lambda|)^{-\beta-1}, \ -\infty < \lambda < \infty, \tag{9}$$

а $T^{(2)}(\lambda)$, $T^{(3)}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$. *Тогда* $T(\lambda) \in \tilde{L}_q$, *где* $1 \le q < (1 - \beta)^{-1}$, *если* $\beta < 1$, *и* $1 \le q < \infty$, *если* $\beta \ge 1$.

Доказательство. В силу оценки (9) при вещественных ξ определена и непрерывна оператор-функция

$$Y(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} T^{(1)}(\lambda)\, d\lambda, \ -\infty < \xi < \infty, \tag{10}$$

со значениями в $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$. Так как $\| T(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, то $Y(0) = 0$. Из $T^{(3)}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$ следует $\| T^{(2)}(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, откуда и из оценки (9), интегрируя два раза по частям равенство (10), получаем неравенство

$$\| Y(\xi) \| \le c(1 + |\xi|)^{-2}, \ -\infty < \xi < \infty. \tag{11}$$

В силу непрерывной дифференцируемости оператор-функции $T^{(1)}(\lambda)$ она удовлетворяет условию Липшица; из условия (9) имеем: $T^{(1)}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$, а из оценки (11) вытекает суммируемость преобразования Фурье (10) функции $T^{(1)}(\lambda)$, поэтому (см., например, [14, с. 357])

$$T^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} Y(\xi)\, d\xi, \ -\infty < \lambda < \infty. \tag{12}$$

Учитывая, что $Y(0) = 0$, получаем равенство

$$Y(\xi) = Y(\xi) - Y(0) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi/2} \left(\sin \frac{\lambda\xi}{2} \right) T^{(1)}(\lambda)\, d\lambda,$$

из которого с учетом условия (9) следует, что для произвольного положительного $\beta_1 < \min(\beta, 1)$ справедлива оценка $\| Y(\xi) \| \le c\, |\xi|^{\beta_1}$, $-\infty < \xi < \infty$, т. е. оператор-функция $X(\xi) = (2\pi i \xi)^{-1} Y(\xi) \in L_1(-\infty, \infty) \bigcap L_q(-\infty, \infty)$ для указанных значений q и поэтому $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \| X(\xi) \|_{L_q(t, t+1)} = 0$, а $X(\xi) \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ при всех $\xi \ne 0$. Значит, оператор-функция

$$T_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} X(\xi)\, d\xi \in \tilde{L}_q$$

и для доказательства леммы осталось показать, что $T(\lambda) = T_1(\lambda)$. Согласно оценке (11) оператор-функция $T_1(\lambda)$ дифференцируема и совпадает с оператор-функцией из правой части равенства (12). Следовательно, $T(\lambda) - T_1(\lambda) = C$, $-\infty < \lambda < \infty$, а C — постоянный оператор. Из определения $T_1(\lambda)$ вытекает соотношение: $\| T_1(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, а по условию леммы $\| T(\lambda) \| \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$. Поэтому $T(\lambda) = T_1(\lambda)$.

Лемма 2. *Пусть операторы* $T_0^{(s)}$, $s = \overline{1, m_0}$, $T_1^{(s)}$, $s = \overline{0, m_1}$, *вполне непрерывны, а* $I + T_0^{(0)}$ *и* $I + T_1^{(0)}$ *обратимы. Тогда существует такой операторный полином* $T(t)$ *(степени не выше* $(m_0 + m_1 + 1)(m_0 + m_1 + 2)$*) со значениями в* $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, *для которого* $T^{(s)}(0) = T_0^{(s)}$, $s = \overline{1, m_0}$, $T^{(s)}(1) = T_1^{(s)}$, $s = \overline{1, m_1}$, *а оператор* $I + T(t)$ *обратим при* $0 \le t \le 1$.

Доказательство. Известно (см., например, [15, с. 328 – 330]), что существуют полиномы $p_{0,s}(\lambda)$ и $p_{1,s}(\lambda)$ степени не выше $m_0 + m_1 + 1$, имеющие свойства: $p_{0,s}^{(j)}(0) = \delta_{j,s}$, $j = \overline{0, m_0}$, и $p_{0,s}^{(j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, m_1}$, а $p_{1,s}^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, m_0}$, и $p_{1,s}^{(j)}(1) = \delta_{j,s}$, $j = \overline{0, m_1}$. Определим оператор-функцию

$$G(\lambda) = p_{0,0}(\lambda)\, T_0^{(0)} + \ldots + p_{0,m_0}(\lambda)\, T_0^{(m_0)} + p_{1,0}(\lambda)\, T_1^{(0)} + \ldots + p_{1,m_1}(\lambda)\, T_1^{(m_1)},$$

принимающую значения в $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, для которой

$$G^{(s)}(0) = T_0^{(s)}, \quad s = \overline{0, m_0}, \qquad G^{(s)}(1) = T_1^{(s)}, \quad s = \overline{0, m_1}, \tag{13}$$

а оператор $I + G(\lambda)$ обратим при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Согласно утверждению 1 оператор-функция $I + G(\lambda)$ обратима при всех λ, за исключением, может быть, не более чем счетного числа точек μ_k, имеющих (если их счетное число) предельную точку лишь в бесконечности. Если на отрезок $[0, 1]$ не попало ни одной точки μ_k, то $T(t) = G(t)$ и это есть искомый операторный полином. Пусть на отрезок $[0, 1]$ попали точки $\mu_1, \ldots, \mu_\upsilon$, а все остальные точки $\mu_{\upsilon+1}, \ldots$, если они имеются, лежат вне этого отрезка. Тогда $|t - \mu_k| \ge c > 0$ для всех $0 \le t \le 1$ и $k = \upsilon + 1, \ldots$. Введем функцию $\lambda(t) = t + ict^{m_0+1}(1 - t)^{m_1+1}$, для которой $|\lambda(t) - \mu_k| > c/2$, если $0 \le t \le 1$ и $k = \upsilon + 1, \ldots$. При вещественных t, отличных от 0 и 1, функция $\lambda(t)$ не принимает вещественных значений, а числа $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ вещественны и не равны 0 и 1. Следовательно, $\lambda(t) \neq \mu_k$ ни при каких значениях $0 \leq t \leq 1$ и $k = 1, 2, \ldots$. Кроме того, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$, а $\lambda^{(1)}(0) = 1$, если $m_0 \geq 1$, и $\lambda^{(1)}(1) = 1$, если $m_1 \geq 1$, а также $\lambda^{(s)}(0) = 0$, если $s = \overline{2, m_0}$ и $m_0 \geq 2$, и $\lambda^{(s)}(1) = 0$, если $s = \overline{2, m_1}$ и $m_1 \geq 2$. Отсюда и из равенств (13) заключаем, что оператор-функция $T(t) = G(\lambda(t))$ удовлетворяет необходимым свойствам.

Далее часто используется следующее простое утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $S(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-\beta})$ *и* $\beta > 0$. *Тогда* $S^{(l)}(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta_1,\eta+1}; [\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-\beta-l})$, $l = 1, 2, \ldots$, *для любого* $\theta_1 \in (0, \theta)$. *Найдется такое* $\rho > \eta$, что $[I + S(\lambda)]^{-1} - I \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-\beta})$.

Первое утверждение вытекает из интегральной формулы Коши, а второе — из обратимости оператора $I + S(\lambda)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$ и из равенства $[I + S(\lambda)]^{-1} - I = -[I + S(\lambda)]^{-1} S(\lambda)$.

Теорема 5. *Пусть на объединении двух лучей* $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, *где* $\Gamma_\pm = \{\lambda : |\lambda| \geq \eta_\pm, \arg\lambda = \pm\theta\}$, $\eta_\pm > 0$, $0 < \theta < \pi$, *задана такая трижды непрерывно дифференцируемая оператор-функция* $T(\lambda)$ *со значениями в* $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, *что оператор* $I + T(\lambda)$ *обратим*, $\|T(\lambda)\| \to 0$, *когда* $\lambda \in \Gamma$ *и* $\lambda \to \infty$, *а для некоторого* $\beta > 0$

$$\left\| \frac{dT\left(t e^{\pm i\theta}\right)}{dt} \right\| \leq c(1 + |t|)^{-\beta-1}, \quad t \geq \eta_\pm, \tag{14}$$

$$\frac{dT^2\left(t e^{\pm i\theta}\right)}{dt^2}, \ \frac{dT^3\left(t e^{\pm i\theta}\right)}{dt^3} \in L_1(\eta_\pm, \infty).$$

Тогда для любых положительных $\beta_1 < \min(\beta, 1)$ *и* $\eta \leq \min(\eta_+, \eta_-)$ *справедливо представление*

$$I + T(\lambda) = [I + M(\lambda)][I + N(\lambda)], \quad \lambda \in \Gamma, \tag{15}$$

в котором

$$M(\lambda),\ [I + M(\lambda)]^{-1} - I \in$$

$$\in \mathfrak{A}(|\lambda| > \eta,\ |\arg\lambda| < \theta; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; o(1) \cap (1 + |\lambda|\,|\cos\theta - \cos\arg\lambda|)^{-\beta_1}), \tag{16}$$

$$N(\lambda),\ [I + N(\lambda)]^{-1} - I \in$$

$$\in \mathfrak{A}(|\lambda| > \eta,\ |\arg\lambda| > \theta; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; o(1) \cap (1 + |\lambda|\,|\cos\theta - \cos\arg\lambda|)^{-\beta_1}). \tag{17}$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $\theta < \pi/2$. Согласно условиям теоремы 5 и лемме 2 на прямой $\{\lambda : \lambda = te^{i\theta}, -\infty < t < \infty\}$ определена трижды непрерывно дифференцируемая оператор-функция $T_1(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, равная $T(\lambda)$ при $\lambda \in \Gamma_+$, нулю при $\lambda = te^{i\theta}$, $t \leq 0$, и оператор $I + T_1(\lambda)$ обратим при $\lambda = te^{i\theta}$, $-\infty < t < \infty$. Тем самым на основании леммы 1 $I + T_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 при $q = (1 - \beta_2)^{-1}$, где β_2 — произвольное число, для которого $\beta_1 < \beta_2 < \min(\beta, 1)$. Следовательно,

$$I + T(\lambda) = [I + M_1(\lambda)] P_1(\lambda; \lambda_1, \lambda_2) [I + N_1(\lambda)], \quad \lambda \in \Gamma_+, \tag{18}$$

а с учетом включений (6)

$$M_1(\lambda),\ [I+M_1(\lambda)]^{-1}-I\in$$
$$\in\mathfrak{A}(\operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta}<0;\ \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];o(1)\bigcap(1-\operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta})^{-\beta_2}),\tag{19}$$
$$N_1(\lambda),\ [I+N_1(\lambda)]^{-1}-I\in$$
$$\in\mathfrak{A}(\operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta}>0;\ \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];o(1)\bigcap(1+\operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta})^{-\beta_2}).\tag{20}$$

Определим теперь оператор-функцию

$$T_2(\lambda)=P_1(\lambda;-\eta/2,\eta/2)[I+N_1(\lambda)]-I,\ \lambda=te^{-i\theta},\ t\le-\eta,\tag{21}$$

$$T_2(\lambda)=[I+M_2(\lambda)]^{-1}[I+T(\lambda)]-I,\ \lambda=te^{-i\theta},\ t\ge\eta_-.\tag{22}$$

Согласно включениям (6), (19), (20), условию (14) и утверждению 2 оператор-функция $T_2(te^{-i\theta})$ является трижды непрерывно дифференцируемой по $t\le$ $\le-\eta$ и $t\ge\eta_-$, $\|T_2(te^{-i\theta})\|\to0$ при $t\to\pm\infty$,

$$\|T_2^{(1)}(te^{-i\theta})\|\le c(1+|t|)^{-\beta_2-1},$$
$$T_2^{(2)}(te^{-i\theta}),\ T_2^{(3)}(te^{-i\theta})\in L_1(-\infty,-\eta)\bigcup L_1(\eta_-,\infty),$$

а оператор $I+T_2(te^{-i\theta})$ обратим при $t\le-\eta$ и $t\ge\eta_-$. В силу перечисленных свойств оператор-функции $T_2(\lambda)$, $\lambda=te^{-i\theta}$, $t\le-\eta$ и $t\ge\eta_-$, на основании леммы 2 эта оператор-функция так продолжается на отрезок $\lambda=te^{-i\theta}$, $-\eta<$ $<t<\eta_-$, что на прямой $\lambda=te^{-i\theta}$, $-\infty<t<\infty$, она удовлетворяет условиям леммы 1, а значит, и теоремы 4 при $q=(1-\beta_1)^{-1}$. Делая замену λ на $-\lambda$, заключаем, что факторизация (7) справедлива и для оператор-функций $M(\lambda)$, $[I+M(\lambda)]^{-1}-I\in\tilde{L}_q^+$ и $N(\lambda)$, $[I+N(\lambda)]^{-1}-I\in\tilde{L}_q^-$. Следовательно,

$$I+T_2(\lambda)=[I+M_2(\lambda)]P_2(\lambda;-\eta/2,\eta/2)[I+N(\lambda)],\ \lambda=te^{-i\theta},\ |t|>\eta,\tag{23}$$

а с учетом включений (6)

$$M_2(\lambda),\ [I+M_2(\lambda)]^{-1}-I\in\mathfrak{A}(\operatorname{Im}\lambda e^{i\theta}>0;\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];o(1)\bigcap(1+\operatorname{Im}\lambda e^{i\theta})^{-\beta_1}),\tag{24}$$

$$N(\lambda),\ [I+N(\lambda)]^{-1}-I\in\mathfrak{A}(\operatorname{Im}\lambda e^{i\theta}<0;\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];o(1)\bigcap(1-\operatorname{Im}\lambda e^{i\theta})^{-\beta_1}).\tag{25}$$

Положим

$$I+M(\lambda)=[I+M_1(\lambda)][I+M_2(\lambda)]P_2(\lambda;-\eta/2,\eta/2),\tag{26}$$

а так как $N(\lambda)$ определена в равенстве (23), то покажем, что это и есть искомые факторы в (15). Из соотношений (19), (24) и определений (8), (26) вытекает, что оператор-функция $M(\lambda)$ определена при λ, для которых $|\lambda|\ge\eta$ и $|\arg\lambda|\le\theta$, и для нее справедливо включение (16). Оператор-функция $N(\lambda)$ определена лишь в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda e^{i\theta}<0$, но на луче $\{\lambda:\ \lambda=te^{-i\theta},$

$t \le -\eta\}$, в силу равенств (21) и (23), справедливо тождество

$$I + N(\lambda) = P_2^{-1}(\lambda; -\eta/2, \eta/2)[I + M_2(\lambda)]^{-1} \times$$
$$\times P_1(\lambda; -\eta/2, \eta/2)[I + N_1(\lambda)], \quad \lambda = te^{-i\theta},\ t \le -\eta. \tag{27}$$

Согласно (20), (27) правая часть этого тождества является аналитической оператор-функцией при $|\lambda| \ge \eta$ и $\theta < |\arg\lambda| < \pi - \theta$ и для нее

$$N(\lambda),\ [I + N(\lambda)]^{-1} - I \in$$
$$\in \mathfrak{A}(|\lambda| > \eta, \theta < |\arg\lambda| < \pi - \theta; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; o(1) \cap (1 + \operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta})^{-\beta_1}). \tag{28}$$

Тем самым равенство (27) задает аналитическое продолжение $N(\lambda)$ в область $\{\lambda:\ |\lambda| > \eta,\ \theta < \arg\lambda < \pi - \theta\}$, для которого справедливо включение (28). Из включений (25), (28) и из теоремы Фрагмена – Линделефа (см., например, [16, с. 360]) вытекает (17). Для таким образом определенных оператор-функций $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$ представление (15) при $\lambda \in \Gamma_+$ следует из равенств (18), (26), (27), если заметить, что именно правая часть (27) определяет $I + N(\lambda)$ на прямой Γ_+, а при $\lambda \in \Gamma_-$ это представление следует из равенств (22), (23), (24) и (27).

В случае $\pi/2 < \theta < \pi$ доказательство теоремы полностью повторяет предыдущее, а в случае $\theta = \pi/2$ упрощается. Действительно, если $\theta = \pi/2$, то согласно лемме 2 оператор-функция $T(\lambda)$ продолжается на отрезок $\lambda = it$, $-\eta_- < t < \eta_+$ таким образом, что она удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда и из теоремы 4 так продолженная на прямую $-\infty < \lambda < \infty$ оператор-функция $I + T(i\lambda)$ допускает факторизацию (7), из которой вытекает факторизация (15), если в (7) заменить λ на $-i\lambda$ и обозначить после замены первые два фактора через $I + M(\lambda)$.

Отметим, что теоремы 4 и 5, как и теорема 2.3 из работы [6], справедливы и в случае операторов, действующих в банаховом пространстве, но тогда кольцо $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ заменяется на нормированное кольцо $\mathfrak{S}$, имеющее свойства а) – г) из [6, с. 1060, 1061]. В частности, в случае гильбертова пространства кольцо $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ в теоремах 4 и 5 можно заменить на произвольный симметрично-нормированный идеал (см., например, [17, с. 94]).

Теорема 6. *Пусть* $H(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n$, *операторы* $L_0 - I$, $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, *оператор-функции* $B(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; |\lambda|^n)$, $S(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-\beta})$ *при некотором* $\beta > 0$, *а оператор* $H(\lambda)$ *обратим, когда* $|\lambda| \ge \eta$, $\theta - \varepsilon \le |\arg\lambda| \le \theta$ *при некотором* $\varepsilon \in (0, \theta)$, *и для этих значений* λ *справедливы неравенства* $\|H^{-1}(\lambda)\| \le c$, $\|B(\lambda)H^{-1}(\lambda)\| \le \le c|\lambda|^{-\beta}$. *Тогда существует такое* $\rho \ge \eta$, *что оператор-функция* $L(\lambda) = H(\lambda) + B(\lambda) + S(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}])$ *и*

$$L(\lambda) = [I + M(\lambda)][I + N(\lambda)]H(\lambda), \quad \lambda \in \Psi_{\theta,\rho}, \tag{29}$$

$$[1 + N(\lambda)]H(\lambda) = H(\lambda) + F_0 + \lambda F_1 + \ldots + \lambda^{n-1}F_{n-1} + W(\lambda), \tag{30}$$

где $F_s \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, $s = \overline{0, n-1}$, $W(\lambda) \in \mathfrak{A}(|\lambda| > \rho; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-1})$, *а для произвольного положительного* $\beta_1 < \min(\beta, 1)$ *справедливы включения*

$$M(\lambda),\ [I+M(\lambda)]^{-1}-I\in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\rho};[\mathfrak{H}];|\lambda|^{-\beta_1}), \tag{31}$$

$$N(\lambda),\ [I+N(\lambda)]^{-1}-I\in \mathfrak{A}(|\lambda|>\rho,|\arg\lambda|>\theta;\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];\ |\lambda|^{-\beta_1}). \tag{32}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы найдется такое $\rho_1>\eta$, что оператор $I+S(\lambda)$ обратим при $\lambda\in\Psi_{\theta,\rho_1}$, поэтому определена оператор-функция

$$T(\lambda)=[I+S(\lambda)]^{-1}L(\lambda)H^{-1}(\lambda)-I,\ |\lambda|\geq\rho_1\geq\eta,\ \ \theta-\varepsilon\leq|\arg\lambda|\leq\theta, \tag{33}$$

и для указанных значений λ справедливо представление

$$T(\lambda)=\{[I+S(\lambda)]^{-1}-I\}[I-H^{-1}(\lambda)]+[I+S(\lambda)]^{-1}B(\lambda)H^{-1}(\lambda),$$

из которого с учетом условий теоремы и утверждения 2 вытекает включение

$$T(\lambda)\in\ \mathfrak{A}(|\lambda|>\rho_1,\ \theta-\varepsilon\ <|\arg\lambda|<\theta;\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];|\lambda|^{-\beta}). \tag{34}$$

Отсюда и из утверждения 2 заключаем: существует такое $\rho\geq\rho_1$, что оператор $I+T(\lambda)$ обратим, когда $|\lambda|\geq\rho,\ \theta-\varepsilon\leq|\arg\lambda|<\theta$, и $\|T^{(l)}(\lambda)\|\leq$ $\leq c_l|\lambda|^{-\beta-l}$, $l=1,2,\dots$, при $|\lambda|\geq\rho$ и $|\arg\lambda|=\theta-(\varepsilon/2)$. Поэтому согласно теореме 5 справедлива факторизация $I+T(\lambda)=[I+M_1(\lambda)][I+N(\lambda)]$ при $|\lambda|\geq\rho,\ |\arg\lambda|=\theta-(\varepsilon/2)$, а оператор-функции $M_1(\lambda)$ и $N(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям (16) и (17) соответственно, но уже при θ, равном $\theta-$ $-(\varepsilon/2)$. Тем самым для оператор-функции $N(\lambda)$ выполнено соотношение (32). Посредством равенства $I+M_1(\lambda)=[I+T(\lambda)][I+N(\lambda)]^{-1}$ оператор-функция $M_1(\lambda)$ аналитически продолжается в область $|\lambda|>\rho,\ \theta-\varepsilon<$ $<|\arg\lambda|<\theta$, а учитывая включение (34), отмеченные свойства $M_1(\lambda)$ и $N(\lambda)$, а также теорему Фрагмена – Линделефа (см., например, [16, с. 360]), имеем $M_1(\lambda),\ [I++M_1(\lambda)]^{-1}-I\in\mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta};\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}];|\lambda|^{-\beta_1})$. Отсюда и из равенства (33), полагая $I+M(\lambda)=[I+S(\lambda)][I+M_1(\lambda)]$, приходим к равенству (29) и включению (31). Аналитическое продолжение оператор-функции $[I+N(\lambda)]H(\lambda)$ в область $\Psi_{\theta,\rho}$ осуществляется на основании равенства (29), из которого с учетом включений (31), (32) получаем оценку $\|[I+N(\lambda)]H(\lambda)\|\leq c|\lambda|^n$, $|\lambda|\geq\rho$. Из этой оценки и соотношения $\|\lambda^{-n}[I+N(\lambda)]H(\lambda)-L_n\|\to 0$, когда $\lambda\to-\infty$, вытекает представление (30). По условию теоремы $H(\lambda)-I\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}$, а согласно включению (32) $N(\lambda)\in\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, $|\lambda|\geq\rho,\ |\arg\lambda|\geq\theta$, поэтому аналитическая при $|\lambda|>\rho$ и непрерывная при $|\lambda|\geq\rho$ оператор-функция $[I+N(\lambda)]H(\lambda)-I$ принимает значения в $\mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ при $|\lambda|\geq\rho$. Отсюда вытекает вполне непрерывность операторов F_s, $s=\overline{0,n-1}$, и $W(\lambda)$ при $|\lambda|\geq\rho$ из представления (30). Замечая, что оператор $[I++N(\lambda)]H(\lambda)$ обратим при $|\lambda|\geq\rho$, $\arg\lambda==\theta$, из утверждения 1 получаем включение $[I+N(\lambda)]H(\lambda)\in\mathfrak{F}_0(|\lambda|>$ $>\rho:[\mathfrak{H}])$, а из обратимости оператора $I+M(\lambda)$ при $\lambda\in\Psi_{\theta,\eta}$ и равенства (29) — включение $L(\lambda)\in\ \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho};[\mathfrak{H}])$, что и завершает доказательство теоремы.

Для доказательства следующей теоремы понадобится такая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha(t)$, $t \ge 0$, *— непрерывная функция, оператор* $H \in \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ *и* $H \ge 0$, *а для некоторого* $\nu > 0$ *справедлива оценка*

$$\| Lf \| \le c t^{-\nu} \| \alpha(t, H) f \|, \quad t \ge 1, \ f \in \mathfrak{H}. \tag{35}$$

Тогда для любого положительного $\nu_1 < \nu$, *найдется такой оператор* T, *что оператор* $L = T H^{\nu_1}$.

Доказательство. Если вектор $f \in \mathfrak{Z}(H)$, то из оценки (35) имеем $\| Lf \| \le \le c \,|\alpha(0)|\, t^{-\nu} \| f \|$. Устремляя t к бесконечности, получаем $Lf = 0$, а значит, $\mathfrak{Z}(H) \subseteq \mathfrak{Z}(L)$, т. е. оператор H далее можно считать полным. Поэтому $H = = \sum_v \lambda_v(\cdot, x_v) x_v$, где x_v, $v = 1, 2, \ldots$, — базис пространства $\mathfrak{H}$, а пронумерованные в порядке невозрастания числа $\lambda_v > 0$. Введем функцию $\chi(t)$, равную 1, когда $\lambda_1 \le t \le \lambda_1 + 1$, и равную 0, когда $t < \lambda_1$ или $t > \lambda_1 + 1$. Из оценки (35) следует неравенство

$$t^{\nu_1} |(\chi(tH) Hf, L^* g)| = c t^{\nu_1 - \nu} \| \alpha(tH) \chi(tH) H \| \, \| f \| \, \| g \|. \tag{36}$$

Так как $t \| \alpha(tH) \chi(tH) H \| \le \sup\limits_v (t\lambda_v |\alpha(t\lambda_v)| \chi(t\lambda_v)) < \infty$, а число $\nu_1 < \nu$, то

$$\int_1^\infty t^{\nu_1 - \nu} \| \alpha(tH) \chi(tH) H \| \, dt = c < \infty. \tag{37}$$

Пусть последовательность $\{c_v\}_{v=1}^\infty \in l_2$ и $c_v \ge 0$, а вектор

$$f = \sum_v c_v \{ \exp(-i \arg(x_v, L^* g)) \} x_v.$$

Тогда из соотношений (36) и (37)

$$\int_1^\infty t^{\nu_1} |(\chi(tH) Hf, L^* g)| \, dt = \left(\int_1^\infty t^{\nu_1} \chi(t) \, dt \right) \left(\sum_v c_v \lambda_v^{-\nu_1} |(x_v, L^* g)| \right) \le$$

$$\le c \left(\sum_v c_v^2 \right)^{1/2} \| g \|.$$

В силу произвольности последовательности $\{c_v\} \in l_2$ имеем (см., например, [13, с. 40])

$$\sum_v \lambda_v^{-2\nu_1} |(x_v, L^* g)|^2 \le c \| g \|^2,$$

а значит, $\| H^{-\nu_1} L^* g \| \le c \| g \|$, т. е. оператор $H^{-\nu_1} L^*$ ограничен.

Следующая теорема относится к случаю специального вида главной части оператор-функции $L(\lambda)$, что обобщает случай главной части $p(\lambda H)$. Именно к такому случаю далее будет сведено изучение оператор-функции (2). Для формулировки соответствующей теоремы введем такие обозначения.

Пусть x_v, $v = 1, 2, \ldots$, — ортонормированная система пространства $\mathfrak{H}$, положительные числа $\lambda_v \to 0$, когда $v \to \infty$, а $\alpha_{v,u}$ такие, что $\alpha_{v,0} = 1$ и $0 < < c_1 \le |\alpha_{v,u}| \le c_2$, $v = 1, 2, \ldots$, $u = \overline{1, n}$. Введем коммутирующие вполне непрерывные операторы

$$H_u = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v,u} \lambda_v(\cdot, x_v) x_v, \ u = \overline{0,n}. \tag{38}$$

Считая натуральное число $m \le n$, подчиняем $\alpha_{v,u}$ и λ_v следующим требованиям, связанным с областью $\Psi_{\theta,\eta}$, предполагая при этом $\eta > 0$, $0 < \theta - \varepsilon < < \theta + \varepsilon < \pi$: 1) числа $\alpha_{v,u}^{-1}\lambda_v^{-1}$, $v = 1, 2, \dots$, $u = \overline{1,n}$, не принадлежат множеству $\{\lambda: |\lambda| > \eta,\ \theta - \varepsilon < |\arg\lambda| < \theta + \varepsilon\}$; 2) в случае $m < n$ числа $\alpha_{v,u}^{-1}\lambda_v^{-1} \notin \notin \Psi_{\theta,\eta}$, $v = 1, 2, \dots$, $u = \overline{m+1,n}$. Эти требования означают обратимость операторов $I - \lambda H_u$, $u = \overline{1,n}$, в соответствующих областях и справедливость оценки

$$|\lambda|^{\alpha} \|H_0^{\alpha}(I - \lambda H_u)^{-1}\| \le c,$$
$$0 \le \alpha \le 1, \quad |\lambda| > \eta + 1, \quad \theta - \frac{\varepsilon}{2} \le |\arg\lambda| \le \theta, \quad u = \overline{1,n}, \tag{39}$$

а в случае $m < n$

$$|\lambda|^{\alpha} \|H_0^{\alpha}(I - \lambda H_u)^{-1}\| \le c,$$
$$0 \le \alpha \le 1, \quad \lambda \in \Psi_{\theta,\eta+1}, \quad u = \overline{m+1,n}, \tag{40}$$

Теорема 7. *Пусть оператор-функция*

$$L(\lambda) = \prod_{u=1}^{n} (I - \lambda H_u) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s [B_s(\lambda) + T_s(\lambda) H_0^{\beta}] H_0^s + \lambda^n B_n(\lambda) H_0^n + S(\lambda), \tag{41}$$

где $\beta > 0$, *оператор-функции* $\lambda^{\beta} B_s(\lambda)$, $s = \overline{0,n}$, $T_s(\lambda)$, $s = \overline{0,n-1}$, *и* $\lambda^{\beta} S(\lambda)$ *принадлежат множеству* $\mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}]; 1)$. *Тогда существует такое* $\rho \ge \eta$, *что оператор-функция* $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}])$ *и*

$$L(\lambda) = [I + M(\lambda)] F(\lambda) \prod_{u=m+1}^{n} (I - \lambda H_u), \ \lambda \in \Psi_{\theta,\rho}, \tag{42}$$

причем для оператор-функции $M(\lambda)$ *справедливы включения* (31); *а для произвольного положительного* $\beta_1 < \min(\beta, 1)$ *найдутся такие операторы* T_s, $s = \overline{0,m-1}$, *что*

$$F(\lambda) = \prod_{u=1}^{m} (I - \lambda H_u) + \sum_{s=0}^{m-1} \lambda^s T_s H_0^{\beta_1 + s} + W(\lambda) \tag{43}$$

и $W(\lambda) \in \mathfrak{A}(|\lambda| > \rho; \mathfrak{S}_{\infty}[\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-1})$. *В случае* $m = n$ *третьего сомножителя в правой части равенства* (42) *нет.*

Доказательство проведем в случае $m < n$, так как при $m = n$ оно упрощается. Из обратимости операторов $I - \lambda H_u$, $u = \overline{m+1,n}$, $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta+1}$, следует аналитичность оператор-функции

$$B(\lambda) = \Big\{ T_0(\lambda) H_0^{\beta} + \sum_{s=1}^{n-1} \lambda^s [B_s(\lambda) +$$

$$+ T_s(\lambda) H_0^{\beta}] H_0^s + \lambda^n B_n(\lambda) H_0^n \Big\} \prod_{u=m+1}^{n} (I - \lambda H_u)^{-1} \tag{44}$$

(в случае $n = 1$ второго слагаемого в фигурных скобках, естественно, нет) и

$$S_1(\lambda) = [S(\lambda) + B_0(\lambda) H_0^0] \prod_{u=m+1}^{n} (I - \lambda H_u)^{-1}$$

в области $\Psi_{\theta, \eta+1}$, откуда с учетом вполне непрерывности оператора H_0 и оценки (40) заключаем, что $B(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta+1}; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; |\lambda|^m)$, а $S_1(\lambda) \in \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\eta+1}; [\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-\beta})$. Полагая

$$H(\lambda) = \prod_{u=1}^{m} (I - \lambda H_u), \tag{45}$$

из оценки (39), условий теоремы и вида (44) оператор-функции $B(\lambda)$ имеем $\| H^{-1}(\lambda) \| \le c$, $\| B(\lambda) H^{-1}(\lambda) \| \le c |\lambda|^{-\min(\beta, 1)}$, когда $|\lambda| \ge \eta + 1$ и $\theta - (\varepsilon/2) \le |\arg \lambda| \le \theta$. Тем самым оператор-функция

$$L_1(\lambda) = L(\lambda) \prod_{u=m+1}^{n} (I - \lambda H_u)^{-1}$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 6, в которой число n считаем равным m. Поэтому для доказательства теоремы осталось показать справедливость представления (43) для оператор-функции $F(\lambda) = [I + N(\lambda)] H(\lambda)$, где $H(\lambda)$ задана равенством (45), а для $N(\lambda)$ справедливо включение (32). Но так определенная оператор-функция $F(\lambda)$ совпадает с оператор-функцией из правой части равенства (30) при $n = m$, т. е. справедливо тождество

$$F_0 + \lambda F_1 + \ldots + \lambda^{m-1} F_{m-1} = N(\lambda) H(\lambda) - W(\lambda), \ |\lambda| > \rho, \ |\arg \lambda| > \theta, \tag{46}$$

и для доказательства теоремы необходимо установить, что для любого положительного $\beta_1 < \min(\beta, 1)$ найдутся такие операторы T_s, для которых операторы F_s в тождестве (46) имеют вид

$$F_s = T_s H_0^{\beta_1 + s}, \ \ s = \overline{0, m-1}. \tag{47}$$

Покажем это. Исходя из включения (32) и утверждения 2

$$\| N^{(l)}(\lambda) \| \le c_l |\lambda|^{-\beta_1 - l}, \ \ \| W^{(l)}(\lambda) \| \le c_l |\lambda|^{-1-l}, \ \ l = 0, 1, \ldots; \ \ \lambda < -\rho - 1,$$

а согласно определениям (38) и (45) операторов H_u и оператор-функции $H(\lambda)$ имеем

$$\| H(\lambda) f \| \le c \left(\| f \| + \sum_{j=1}^{m} |\lambda|^j \| H_0^j f \| \right),$$

$$\left\| \frac{d^l}{d\lambda^l} H(\lambda) f \right\| \le c \sum_{j=0}^{m-l} |\lambda|^j \| H_0^{j+l} f \|, \ \ l = \overline{1, m},$$

$$\left\| \frac{d^l}{d\lambda^l} H(\lambda) f \right\| \equiv 0, \ \ l = m+1, m+2, \ldots, \ f \in \mathfrak{H}.$$

Отсюда и из неравенства

$$\max\{\|f\|, |\lambda|\,\|H_0 f\|, \ldots, |\lambda|^m \|H_0^m f\|\} \le \left\| \left(I + \sum_{j=1}^{m} |\lambda|^j H_0^j\right) f \right\|,$$

имеем

$$\left\| \frac{d^l}{d\lambda^l}[N(\lambda)H(\lambda) - W(\lambda)]f \right\| \le$$

$$\le c_l |\lambda|^{-\beta_1 - l} \left\| \left(I + \sum_{j=1}^{m} |\lambda|^j H_0^j\right) f \right\|, \quad \lambda < -\rho - 1. \tag{48}$$

Предположив справедливость представления (47) при всех $s > l$, где $l \le m-1$, покажем справедливость (47) и при $s = l$. Если считать оператор $F_m = 0$, то представление (47), очевидно, справедливо для $s > m-1$. Дифференцируя тождество (46) l раз и учитывая сделанные предположения, получаем равенство

$$F_l = -\sum_{j=l+1}^{m} \lambda^{s-l} C_s^l T_s H_0^{\beta_1 + s} + \frac{d^l}{d\lambda^l}[N(\lambda)H(\lambda) - W(\lambda)],$$

из которого с учетом оценки (48) выводим неравенство

$$\|F_l f\| \le c\,|\lambda|^{-\beta_1 - l} \left\| \left[I + \sum_{j=1}^{m} \left(|\lambda|^j H_0^j + |\lambda|^{-\beta_1 + j} H_0^{\beta_1 + j} \right) \right] f \right\|,$$

$$\lambda < -\rho - 1, \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Отсюда и из леммы 3 вытекает, что для любого положительного $\beta_2 < \beta_1$ найдется оператор T_l, для которого $F_l = T_l H^{\beta_2 + l}$. Но β_1 — произвольное положительное число, меньшее чем $\min(\beta, 1)$, а значит, и β_2 — произвольное положительное число, меньшее чем $\min(\beta, 1)$. Тем самым установлено представление (47), что и завершает доказательство теоремы 7.

3. Доказательство утверждений о минимальности. Пусть оператор-функции $F(\lambda)$ и $L(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega; [\mathfrak{H}])$. Тогда для оператора A соотношение $\{A\}\Lambda(L(\lambda); \Omega) \sim \Lambda(F(\lambda); \Omega)$ означает, что: 1) $\dim \mathfrak{Z}(F(\lambda)) = \dim \mathfrak{Z}(L(\lambda))$, $\lambda \in \Omega$, а значит, характеристические числа у оператор-функций $F(\lambda)$ и $L(\lambda)$ совпадают; 2) кратности собственных векторов, входящих в канонические системы, отвечающие одним и тем же характеристическим числам оператор-функций $F(\lambda)$ и $L(\lambda)$ совпадают, а значит, можно считать, что $\Lambda(F(\lambda); \Omega) = \Lambda(L(\lambda); \Omega)$; 3) для каждой канонической системы $x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$, корневых векторов оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающей характеристическому числу μ_k, найдется такая каноническая система $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(F(\mu_k))}$, корневых векторов оператор-функции $F(\lambda)$, отвечающая характеристическому числу μ_k, что $A x_{h,j,k} = y_{h,j,k}$, $(h, j, k) \in \Lambda(L(\lambda); \Omega)$.

***Замечания.* 1.** Из определения канонических систем следует, что условие 3 в приведенном определении равносильно следующему требованию: для каждой канонической системы $y_{0,j,k}, \ldots, y_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(F(\mu_k))}$, корневых векторов оператор-функции $F(\lambda)$, отвечающей характеристическому числу μ_k, найдется такая каноническая система $x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \dim \mathfrak{Z}(L(\mu_k))}$, корневых векторов оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающая характеристическому числу μ_k, что $A x_{h,j,k} = y_{h,j,k}$, $(h,j,k) \in \Lambda(F(\lambda);\Omega)$.

2. Пусть $\{A\}\Lambda(L(\lambda);\Omega) \sim \Lambda(F(\lambda);\Omega)$ и $\{B\}\Lambda(F(\lambda);\Omega_1) \sim \Lambda(G(\lambda);\Omega_1)$. Тогда $\{AB\}\Lambda(L(\lambda);\Omega\bigcap\Omega_1) \sim \Lambda(G(\lambda);\Omega\bigcap\Omega_1)$.

Утверждение 3. *Пусть в области* Ω *задана оператор-функция* $L(\lambda) = A(\lambda)F(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$, *где* $A(\lambda), A^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Omega;[\mathfrak{H}])$. *Тогда* $\{I\}\Lambda(L(\lambda);\Omega) \sim \Lambda(F(\lambda);\Omega)$.

Доказательство вытекает из определения корневых векторов.

Лемма 4. *Пусть на связном открытом множестве* Ω *задана оператор-функция* $L(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)C \in \mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$, *где* $A(\lambda), A^{-1}(\lambda)$ и $B(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Omega;[\mathfrak{H}])$, *а* P *— проектор на подпространство, содержащее область значений оператора* C. *Введем оператор-функцию* $F(\lambda) = I + CA^{-1}(\lambda)B(\lambda)P$. *Тогда если* $CA^{-1}(\lambda)B(\lambda)P \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ *при* $\lambda \in \Omega$, *то* $F(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$. *Если же* $F(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(\Omega;[\mathfrak{H}])$, *то* $\{C\}\Lambda(L(\lambda);\Omega) \sim \Lambda(F(\lambda);\Omega)$.

Доказательство. Из определения P имеем $PC = C$, а из обратимости оператора $A(\lambda)$ следует, что если x_0 — собственный вектор $L(\lambda)$, то $Cx_0 \neq 0$ и

$$\left\| F(\lambda) \sum_{h=0}^{d} (\lambda-\mu)^h C x_h \right\| \leq \|C\| \, \|A^{-1}(\lambda)\| \left\| L(\lambda) \sum_{h=0}^{d} (\lambda-\mu)^h x_h \right\|.$$

Поэтому если элементы $x_0, \ldots, x_d$ образуют цепочку корневых векторов оператор-функции $L(\lambda)$, то элементы $Cx_0, \ldots, Cx_d$ образуют цепочку корневых векторов оператор-функции $F(\lambda)$, отвечающую тому же самому характеристическому числу.

Пусть теперь $y_0, \ldots, y_d$ — цепочка корневых векторов оператор-функции $F(\lambda)$, отвечающая характеристическому числу μ. Введем элементы

$$x_h = -\sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \frac{d^s A^{-1}(\lambda)B(\lambda)}{d\lambda^s}\bigg|_{\lambda=\mu} P y_{h-s}, \quad h = \overline{0, d}, \tag{49}$$

откуда и из определения цепочек корневых векторов вытекают равенства $y_h = Cx_h$, $h = \overline{0, d}$. Подставляя эти равенства в (49) и используя определение цепочек корневых векторов получаем: элементы $x_0, \ldots, x_d$ образуют цепочку корневых векторов оператор-функции $I + A^{-1}(\lambda)B(\lambda)C$, а значит, и $A(\lambda) + B(\lambda)C$, отвечающую характеристическому числу μ. Тем самым равенствами $y_h = Cx_h$ и (49) установлено взаимно однозначное соответствие между корневыми векторами оператор-функций $L(\lambda)$ и $F(\lambda)$. Отсюда следует второе утверждение леммы. Первое утверждение леммы выводится из утверждения *1*, так как в силу вполне непрерывности операторов $CA^{-1}(\lambda)B(\lambda)P$ все точки спектра $F(\lambda)$ состоят из характеристических чисел, являющихся по доказанному выше характеристическими числами $L(\lambda)$. Поэтому имеется такая точка λ_0, в кототрой оператор $F(\lambda_0)$ обратим.

Из леммы 4 и теоремы 7 выведем утверждение, позволяющее свести исследование свойств канонических систем корневых векторов оператор-функции (41) к исследованию тех же свойств канонических систем корневых векторов оператор-функции вида (41), но уже при n, равном $n-1$.

Лемма 5. *Пусть операторы* H_u, $u = \overline{1,n}$, *и числа* η *и* m *те же, что и в теореме* 7. *Через* $L_l(\lambda, \beta_l)$, $l = \overline{m,n}$, *обозначим оператор-функцию*

$$L_l(\lambda, \beta_l) = \prod_{u=1}^{l} (I - \lambda H_u) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^s [B_{l,s}(\lambda) + T_{l,s}(\lambda) H_0^{\beta_l}] H_0^s + \lambda^l B_{l,l}(\lambda) H_0^l, \tag{50}$$

рассмотренную в области Ψ_{θ,ρ_l}, $0 < \theta < \pi$, $\rho_l \geq \eta + 1$, *где параметр* $\beta_l > 0$, *оператор-функции* $\lambda^{\beta_l} B_{l,s}(\lambda)$, $s = \overline{0,l}$, $T_{l,s}(\lambda)$, $s = \overline{0,l-1}$, *принадлежат множеству* $\mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\rho_l}; [\mathfrak{H}]; 1)$. *Тогда в случае* $m < l \leq n$ *существует такое* $\rho_{l-1} \geq \rho_l$ *и такая оператор-функция* $L_{l-1}(\lambda, \beta_{l-1})$ *заданная в области* $\Psi_{\theta,\rho_{l-1}}$ *равенством* (50), *но уже при* l, *равном* $l-1$, *и произвольном положительном* $\beta_{l-1} < \min(\beta_l, 1)$, *что*

$$\left\{ H_0^{\beta_{l-1}} \right\} \Lambda(L_l(\lambda, \beta_l); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}}) \sim \Lambda(L_{l-1}(\lambda, \beta_{l-1}); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}}).$$

Доказательство. Оператор-функция (50) представима в виде (41) при числе $n = l$ и удовлетворяет требованиям теоремы 7, согласно которой в области $\Psi_{\theta,\rho_{l-1}}$, $\rho_{l-1} \geq \rho_l$, справедлива факторизация

$$L_l(\lambda, \beta_l) = [I + M(\lambda)] F(\lambda) \prod_{u=m+1}^{l} (I - \lambda H_u).$$

Не умаляя общности, будем предполагать обратимость оператора $I + W(\lambda)$, входящего в определение (43) оператор-функции $F(\lambda)$ при $|\lambda| \geq \rho_{l-1}$ (этого всегда можно достичь за счет увеличения ρ_{l-1}). Поэтому $[I + W(\lambda)]^{-1} = I + W_1(\lambda)$, а $\|W_1(\lambda)\| \leq c|\lambda|^{-1}$, $|\lambda| \geq \rho_{l-1}$. Отсюда и из равенства (43) заключаем, что оператор-функция

$$X_l(\lambda) \equiv [I + W(\lambda)]^{-1} F(\lambda) \prod_{u=m+1}^{l} (I - \lambda H_u) =$$

$$= \prod_{u=1}^{l} (I - \lambda H_u) + \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^s Y_{l,s}(\lambda) H_0^{\beta_{l-1}+s}, \tag{51}$$

где β_{l-1} — произвольное положительное число, меньшее чем $\min(\beta_l, 1)$, а оператор-функции $Y_{l,s}(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\rho_{l-1}}; [\mathfrak{H}]; 1)$, $s = \overline{0,l-1}$. Кроме того, из утверждения 3 имеем $\{I\} \Lambda(L_l(\lambda, \beta_l); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}}) \sim \Lambda(X_l(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}})$. Введем оператор-функцию

$$Z_l(\lambda) = \prod_{u=1}^{l} (I - \lambda H_u) + \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^s H_0^{\beta_{l-1}} Y_{l,s}(\lambda) H_0^s. \tag{52}$$

Так как по условию $l > m$, то оператор $I - \lambda H_l$ обратим, когда $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta+1}$ и для него справедлива оценка (40) при $u = l$. Значит, оператор-функции $B_{l-1,s}(\lambda) \equiv (I - \lambda H_l)^{-1} H_0^{\beta_{l-1}} Y_{l,s}(\lambda) \in \mathfrak{A}(\Psi_{\theta,\rho_{l-1}}; [\mathfrak{H}] : |\lambda|^{-\beta_{l-1}})$, $s = \overline{0, l-1}$, а следовательно, оператор-функция $L_{l-1}(\lambda, \beta_{l-1}) = (I - \lambda H_l)^{-1} Z_l(\lambda)$ представима в виде (50), но уже при l, равном $l - 1$, и с оператор-функциями $T_{l-1,s}(\lambda) \equiv 0$. Согласно теореме 7 $L_{l-1}(\lambda, \beta_{l-1}) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\rho}; [\mathfrak{H}])$ при некотором $\rho \geq \rho_{l-1}$, которое, за счет увеличения ρ_{l-1}, будем считать равным ρ_{l-1}. Отсюда, из равенств (51), (52), утверждения 3 и леммы 4 получаем $\left\{H_0^{\beta_{l-1}}\right\} \Lambda(X_l(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}}) \sim \Lambda(L_{l-1}(\lambda, \beta_{l-1}); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}})$. Но, как показано выше, $\{I\} \Lambda(L_l(\lambda, \beta_l); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}}) \sim \Lambda(X_l(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{l-1}})$. Из этих соотношений и из замечания 2 вытекает утверждение леммы 5.

***Доказательство теоремы* 1.** Вначале приведем оператор-функцию (2) к виду (50) при $l = n$. Пусть ω_s, $s = \overline{1, n}$, — корни полинома $p(\lambda)$, пронумерованные с учетом кратностей. Из условий $p(\lambda H) \in \mathfrak{F}_0(\Psi_{\theta,\eta}; [\mathfrak{H}])$, обратимости оператора $p(\lambda H)$ при $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$ и предположения $\dim E(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta}) = \infty$ вытекает стремление характеристических чисел $\mu_k \in \Psi_{\theta,\eta}$ оператор-функции $p(\lambda H)$ к бесконечности при $k \to \infty$. Из теоремы об отображении спектра (или из ее доказательства, см., например, [18, с. 189]) следует, что $E = E(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$ является также ортопроектором на линейную оболочку собственных векторов x_v оператора H, отвечающих тем его не равным нулю собственным числам $\lambda_v(H)$, для которых $\lambda_v^{-1}(H)\omega_s \in \Psi_{\theta,\eta}$ при некотором $s = \overline{1, n}$, причем $\mu_k = \lambda_v^{-1}(H)\omega_s$ для каждого v и некоторых k и s; а так как $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то оператор

$$C = EH = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(H)(\cdot, x_v)x_v \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}].$$

Представим множество мультииндексов (v, s), $v = 1, 2, \ldots$, $s = \overline{1, n}$, в виде объединения таких непересекающихся множеств Λ_u, $u = \overline{1, n}$, что: 1) в каждом множестве Λ_u первый индекс v в мультииндексе (v, s) принимает все натуральные значения, а значит, второй индекс принимает лишь одно значение при фиксированном v; 2) $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ содержит все мультииндексы (v, s), для которых $\lambda_v^{-1}(H)\omega_s \in \Psi_{\theta,\eta}$, а значит, в силу определения числа $m = = m(H; p(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$ множество $\Lambda_{m+1} \cup \ldots \cup \Lambda_n$, если $m < n$, не содержит ни одного мультииндекса (v, s), для которого $\lambda_v^{-1}(H)\omega_s \in \Psi_{\theta,\eta}$. Введем вполне непрерывные операторы

$$H_u = \sum_{(v,s) \in \Lambda_u} \lambda_v(H)\, \omega_s^{-1}(\cdot, x_v)x_v, \quad v = \overline{1, n},$$

$$H_0 = \sum_{v=1}^{\infty} |\lambda_v(H)|(\cdot, x_v)x_v = |C|,$$

представимые в виде (38) и удовлетворяющие условиям, наложенным на операторы (38). В силу сделанных построений $p(\lambda C) = p(0)(I - \lambda H_1) \dots (I - \lambda H_n)$, а $p(\lambda H) = p(\lambda D) + p(\lambda C) - p(0)I$, где нормальный оператор $D = H - C$ и $DC = CD = 0$. Поэтому, определив оператор-функцию

$$J(\lambda) = p(\lambda D) + S(\lambda) + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s T_s(\lambda) |D|^{\beta+s},$$

запишем оператор-функцию (2) в виде

$$L(\lambda) = J(\lambda) + p(0) \prod_{u=1}^{n} (I - \lambda H_u) - p(0)I + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s T_s(\lambda)\, H_0^{\beta+s}. \quad (53)$$

Оператор $p(\lambda D)$ обратим, когда $\lambda \in \Psi_{\theta+\varepsilon,\eta}$, откуда с учетом теоремы об отображении спектра заключаем, что $p(\lambda z) \neq 0$, если $\lambda \in \Psi_{\theta+\varepsilon,\eta}$, а $z \in \sigma(D)$, где $\sigma(D)$ — спектр оператора D. Из этих свойств при $0 \le \alpha \le n$ следует оценка $|\lambda z|^\alpha |p(\lambda z)|^{-1} \le c$, если $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$ и $z \in \sigma(D)$, из которой с учетом спектральной теоремы для нормального оператора (см., например, [18, с. 215]) имеем $\| |D|^\alpha p^{-1}(\lambda D) \| \le c |\lambda|^{-\alpha}$, $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$. Тем самым для оператор-функции

$$U(\lambda) = S(\lambda) p^{-1}(\lambda D) + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s T_s(\lambda) |D|^{\beta+s} p^{-1}(\lambda D)$$

справедлива оценка $\| U(\lambda) \| \le c |\lambda|^{-\min(\beta, 1)}$, $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$. Поэтому найдется такое $\rho_n \ge \eta$, для которого оператор $J(\lambda) = [I + U(\lambda)] p(\lambda D)$ обратим при $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$. Отсюда и из равенства (53) видно, что оператор-функция $L_n(\lambda, \beta_n) = J^{-1}(\lambda) L(\lambda)$ представима в виде (50) при $l = n$ и $\beta_n = \min(\beta, 1)$, а согласно утверждению 3 $\{ I \}\, \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_n}) \sim \Lambda(L_n(\lambda, \beta_n); \Psi_{\theta,\rho_n})$. Применяя $n - m$ раз лемму 5 и учитывая замечание 2, имеем

$$\{ H_0^{\nu_1} \}\, \Lambda(L_n(\lambda, \beta_n); \Psi_{\theta,\rho_m}) \sim \Lambda(L_m(\lambda, \beta_m); \Psi_{\theta,\rho_m})$$

с числом $\nu_1 = \beta_{n-1} + \dots + \beta_m$, причем β_l, $l = \overline{m, n-1}$, — произвольное положительное число, меньшее чем $\min(\beta_{l+1}, 1)$, а $\beta_n = \min(\beta, 1)$. Тем самым ν_1 — произвольное положительное число, меньшее чем $(n - m) \min(\beta, 1)$. Согласно теореме 7 и утверждению 3 $\{ I \}\, \Lambda(L_m(\lambda, \beta_m); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}}) \sim \Lambda(F(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}})$, где оператор-функция $F(\lambda)$ задана равенством (43), число $\rho_{m-1} \ge \rho_m$, а β_1 в (43) — произвольное положительное число, меньшее чем β_m, а значит, и $\min(\beta, 1)$. Считая, как и раньше, оператор $I + W(\lambda)$ обратимым при $|\lambda| \ge \rho_{m-1}$ (что всегда можно достичь за счет увеличения ρ_{m-1} и свойств $W(\lambda)$), введем оператор-функции

$$G(\lambda) \equiv [I + W(\lambda)]^{-1} F(\lambda) =$$

$$= \prod_{u=1}^{m} (I - \lambda H_u) + W_1(\lambda)\, H_0^{\beta_1} + \sum_{s=0}^{m-1} \lambda^s T_{1,s}\, H_0^{\beta_1+s},$$

$$G_1(\lambda) = \prod_{u=1}^{m}(I - \lambda H_u) + H_0^{\beta_1} W_1(\lambda) + \sum_{s=0}^{m-1} \lambda^s H_0^{\beta_1} T_{1,s} H_0^s. \tag{54}$$

Так как $G_1(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$ при $|\lambda| \geq \rho_{m-1}$, то согласно первому утверждению леммы 4 $G_1(\lambda) \in \mathfrak{F}_0(|\lambda| > \rho_{m-1}; [\mathfrak{H}])$. Воспользовавшись утверждением 3 и леммой 4, получаем соотношение

$$\{H_0^{\beta_1}\} \Lambda(F(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}}) \sim \Lambda(G_1(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}}),$$

а значит,

$$\{H_0^{\beta_1+\nu_1}\} \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}}) \sim \Lambda(G_1(\lambda); \Psi_{\theta,\rho_{m-1}}),$$

причем $\beta_1 + \nu_1$ — произвольное положительное число, меньшее чем $(n - m + 1)\min(\beta, 1)$. Оператор-функция $G_1(\lambda)$, заданная равенством (54), удовлетворяет условиям теоремы 1 и замечанию 2 работы [19] (см. также теорему 1.4 работы [20]), на основании которой существует такое $\rho \geq \rho_{m-1}$, что система векторов $\operatorname{diag}\{H_0, H_0^2, \ldots, H_0^m\} x_{h,j,k}^m$ при мультииндексах $(h, j, k) \in \Lambda(G_1(\lambda); \Psi_{\theta,\eta})$ минимальна в пространстве $\mathfrak{H}^m$. Отсюда, учитывая отмеченную связь между каноническими системами корневых векторов оператор-функций $L(\lambda)$ и $G_1(\lambda)$ и равенство $H_0 = |C|$, получаем утверждение теоремы 1.

***Доказательство теоремы* 2.** При $\beta \leq 1$ утверждение теоремы 2 совпадает с утверждением теоремы 1, поэтому считаем $\beta > 1$. Поскольку в теореме 2 $S(\lambda) \equiv 0$, из леммы 4 имеем $\{|H|^{\beta-1}\} \Lambda(L(\lambda); \Psi_{\theta,\rho}) \sim \Lambda(L_1(\lambda); \Psi_{\theta,\rho})$ при некотором $\rho \geq \eta$, а оператор-функция

$$L_1(\lambda) = p(\lambda H) + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s |H|^{\beta-1} T_s(\lambda) |H|^{1+s}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 с числом β, равным 1, на основании которой, с учетом равенства $|H|^\alpha |C|^\nu = |C|^{\alpha+\nu}$, $\alpha \geq 0$, $\nu \geq 0$, получаем утверждение теоремы 2.

***Доказательство теоремы* 3** проведем вначале в случае $S(\lambda) \neq 0$, т. е. когда величина β не содержится в утверждении теоремы 3, поэтому считаем $\beta < 1$. Из условия (4) следует (см., например, [5, с. 135]) существование такого $\varepsilon \in (0, \theta)$, что $\|(I - \lambda C)^{-1}\| \leq c$ при $|\arg\lambda| \geq \theta - \varepsilon$. Согласно неравенству моментов (см., например, [5, с. 142]) $\|C^\beta x\| \leq c\|x\|^{1-\beta}\|Cx\|^\beta$ для всех $x \in \mathfrak{H}$, поэтому $\|C^\beta(I - \lambda C)^{-1}\| \leq c|\lambda|^{-\beta}$ при $|\lambda| > 1$ и $|\arg\lambda| \geq \theta - \varepsilon$. Отсюда, полагая в теореме 6 оператор-функцию $H(\lambda) = I - \lambda C$, а $B(\lambda) = T(\lambda)C^\beta$, заключаем, что она удовлетворяет условиям теоремы 6, на основании которой справедлива факторизация (29) с фактором $[I + N(\lambda)]H(\lambda) = I + F_0 - \lambda C + W(\lambda)$, где оператор $F_0 \in \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]$, а оператор-функция $W(\lambda) \in \mathfrak{A}(|\lambda| > \rho_1; \mathfrak{S}_\infty[\mathfrak{H}]; |\lambda|^{-1})$. Воспользовавшись теперь теоремой 1 работы [19] (или теоремой 1.4 работы [20]) и утверждением 3, получаем утверждение теоремы 3 в случае, когда $S(\lambda) \neq 0$. Пусть теперь $S(\lambda) \equiv 0$. Так как оператор C удовлетворяет оценке (4), то (см. лемму 3.1 работы [21]) подпространства $\overline{\mathfrak{R}(C)}$ и $\mathfrak{Z}(C)$ образуют прямую сумму, которая совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}$, поэтому существует ограниченный проектор P на $\overline{\mathfrak{R}(C)}$ параллельно $\mathfrak{Z}(C)$. Считая положительное число $\beta_1 < \min(\beta, 1+\beta-\nu)$, где ν взято из второго утверждения теоремы, и учитывая равенство нулю оператор-функции $S(\lambda)$ и определение проектора P, из леммы 4 заключаем, что для оператор-функции $F(\lambda) = I + C^{\beta-\beta_1}T(\lambda)C^{\beta_1}$ справедливо соотношение

$$\{C^{\beta-\beta_1}\}\,\Lambda(L(\lambda);\Psi_{\theta,\rho}) \sim \Lambda(F(\lambda);\Psi_{\theta,\rho}).$$

Отсюда, применяя к оператор-функции $F(\lambda)$ утверждение теоремы 3 в случае $S(\lambda) \neq 0$, получаем минимальность системы векторов $C^{1+\beta-\beta_1}x_{h,j,k}$, $(h,j,k) \in$ $\in \Lambda(L(\lambda);\Psi_{\theta,\rho})$ при некотором $\rho \geq \eta$, а в силу неравенства $\nu < 1+\beta-\beta_1$ — и системы векторов из утверждения теоремы 3.

1. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, № 4. – С. 15 – 41.
2. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Там же. – 1982. – **37**, № 2. – С. 81 – 145.
3. *Радзиевский Г. В.* О базисности производных цепочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 5. – С. 1182 – 1218.
4. *Радзиевский Г. В.* Минимальность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 195 – 205.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
6 *Гохберг И. Ц.* Задача факторизации оператор-функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 5. – С. 1055 – 1082.
7. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Труды международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. – М.: Наука, 1965. – С. 283 – 321.
8. *Образов М. Б.* О полноте системы элементарных решений для некоторых операторно-дифференциальных уравнений на полуоси и на отрезке // Докл. АН СССР. – 1979. – **245**, № 4. – С. 788 – 792.
9. *Власов В. В.* О кратной минимальности части системы корневых векторов некоторых оператор-функций // Там же. – 1990. – **310**, № 2. – С. 276 – 280.
10. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 140 – 224.
11. *Радзиевский Г. В.* Эквивалентность части корневых векторов полиномиальных пучков операторов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 7. – С. 956 – 978.
12. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
13. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 436 с.
15. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – Т. 3, ч. 2. – 676 с.
16. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
17. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
18. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 570 с.
19. *Радзиевский Г. В.* Кратная минимальность корневых векторов полиномиального пучка операторов, возмущенного аналитической вне круга оператор-функцией $S(\lambda)$ с $S(\infty) = 0$ // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 599 – 610.
20 *Радзиевский Г. В.* Линейная независимость, эквивалентность и минимальность корневых векторов для некоторых нелинейных спектральных задач // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 3. – С. 147 – 166.
21. *Маркус А. С.* Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве // Мат. сб. – 1966. – **70**, № 4. – С. 526 – 561.

Получено 29. 12. 92