УДК 517.982

Л. Д. Меніхес, А. М. Плічко

До теорії регуляризовності в топологічних векторних просторах

Устанавливается эквивалентность двух известных определений регуляризуемости для топологических векторных пространств. Рассматривается регуляризуемость по Тихонову в рефлексивных линейных метрических пространствах. В частности, приводится пример линейного непрерывного инъективного оператора на рефлексивном пространстве Фреше, обратный к которому не регуляризуем. Последнее показывает резкое отличие регуляризуемости в пространствах Фреше от банаховского случая.

Установлюється еквівалентність двох відомих означень регуляризовності для топологічних векторних просторів. Розглядається регуляризовність за Тихоновим у рефлексивних лінійних метричних просторах. Зокрема, наводиться приклад лінійного неперервного ін'єктивного оператора на рефлексивному просторі Фреше, обернений до якого не регуляризовний. Останнє показує відміну регуляризовності у просторах Фреше від банахівського випадку.

У той час, як регуляризовність лінійних обернених задач у банахових просторах широко досліджувалась (див. [1, 2] і бібліографію), умови регуляризовності в топологічних векторних просторах (ТВП) і навіть у просторах Фреше майже не вивчались. У даній статті покажемо еквівалентність двох означень регуляризовності з [3, 4] і розглянемо регуляризовність в рефлексивних лінійних метричних просторах. Зокрема, наведемо приклад лінійного ущільнення (неперервного ін'єктивного оператора) на рефлексивному просторі Фреше, обернене до якого не регуляризовне. Останнє показує різку відмінність регуляризовності у просторах Фреше від банахівського випадку.

Нехай X, Y — ТВП, $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{T}(Y)$ — їх топології, $\mathcal{U}$ — база фільтру околів нуля в X, $f: X \to Y$ — відображення з областю означення $D(f)$ і S — система підмножин X.

Означення 1 [3]. *Відображення $R: S \to 2^Y$ називається A-регуляризатором f за системою S, якщо виконані умови*

1) $\forall A \in S,\ A \cap D(f) \neq 0 : R(A) \neq \varnothing$;

2) $\forall x \in D(f),\ \forall G \subset \mathcal{T}(Y),\ G \ni f(x),\ \exists V \in \mathcal{T}(X),\ V \ni x,\ \forall A \in S,$ $V \supset A \ni x : R(A) \subset G$.

Відображення f називається A-регуляризовним за системою S, якщо існує A-регуляризатор f за системою S.

Означення 2 [4]. *Сім'я відображень $R_U: X \to Y$, $U \in \mathcal{U}$, називається T-регуляризатором відображення f за базою $\mathcal{U}$, якщо $\forall x \in D(f),\ \forall G \in \mathcal{T}(Y),\ f(x) \in G,\ \exists U_0 \in \mathcal{U},\ \forall U \in \mathcal{U},\ U \subset U_0 : R_U(x+U) \subset G$.*

Відображення f називається T-регуляризовним за базою $\mathcal{U}$, якщо існує T-регуляризатор f за базою $\mathcal{U}$.

Припустимо, що база $\mathcal{U}$ складається з урівноважених множин, які задовольняють умові $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U + U \in \mathcal{U}$.

Теорема 1. *A-регуляризовність відображення f за системою $S = \{x + U,\ x \in X,\ U \in \mathcal{U}\}$ еквівалентна T-регуляризовності f за базою $\mathcal{U}$.*

Доведення. Нехай R — A-регуляризатор відображення f; $R_U: X \to Y$ — довільне відображення з $R_U(x) \in R(x+U)$ для будь-яких $x \in D(f)$ і $U \in \mathcal{U}$. Оскільки R — A-регуляризатор, то $\forall x \in D(f),\ \forall G \in \mathcal{T}(Y),\ G \ni f(x)$, $\exists U_1 \in \mathcal{U},\ \forall A \in S,\ x + U_1 \supset A \ni x : R(A) \subset G$. Візьмемо такий $U_0 \in \mathcal{U}$, що $U_0 + U_0 \subset U_1$. Тоді $\forall U \subset U_0$, $U \in \mathcal{U}$, взявши в означенні A-регуляризатора $A = v + U$, одержимо

$$R_U(x+U) = \bigcup_{v \in x+U} R_U(v) \subset \bigcup_{v \in x+U} R(v+U) \subset G,$$

оскільки $v + U \subset x + U + U \subset x + U_1$ і, внаслідок урівноваженості U, $v + U \ni x$. Отже, $\{R_U\}$ — T-регуляризатор.

Нехай $\{R_U\}$ — T-регуляризатор для f. Означимо відображення $R: S \to 2^Y$ співвідношенням $R(x+U) = R_{U+U}(x+U)$. Оскільки $\{R_U\}$ — T-регуляризатор, то $\forall x \in D(f),\ \forall G \in \mathcal{T}(Y),\ G \ni f(x),\ \exists U_0 \in \mathcal{U},\ \forall U \in \mathcal{U},\ U \subset U_0 : R_U(x+U) \subset G$. Візьмемо $W \in \mathcal{U}$ так, щоб

$$W + W + W + W \subset U_0, \tag{1}$$

і хай $V = x + W$. Якщо $A = v + U \ni x$, $A \subset V$, то з урівноваженості U випливає

$$v \in x + U. \tag{2}$$

Із $v + U \subset x + W$ випливає $v - x \in W$, тому, оскільки всякий елемент $u \in U$ має вигляд $u = x - v + w$, $w \in W$, маємо $U \subset W + W$, а, враховуючи (1),

$$U + U \subset U_0. \tag{3}$$

Таким чином,

$$R(A) = R(v+U) = R_{U+U}(v+U) \subset (2) \subset R_{U+U}(x+U+U) \subset (3) \subset G.$$

Отже, R — A-регуляризатор.

Будемо вважати, що відображення f лінійно (скінченновимірно лінійно) регуляризовне, якщо існує T-регуляризатор $\{R_U\}$, де всі R_U — лінійні (скінченновимірні) неперервні відображення.

О з н а ч е н н я 3. *Відображення* f *з областю означення* $D(f) \subset X$ *і множиною значень в* Y *має властивість СК за базою* $\mathcal{U}$ *околів нуля в* Y, *якщо для будь-якого* $U \in \mathcal{U}$ *існує такий скінченновимірний лінійний неперервний оператор* $B_U : X \to Y$, *що сіть* $B_U x$ *збігається до* $f(x)$ *для всякого* $x \in D(f)$. *Впорядкування у множині індексів сіті* $\{B_U x\}$ *вводиться співвідношенням* $U_1 \geqslant U_2 \Leftrightarrow U_1 \subset U_2$.

О з н а ч е н н я 4. *ТВП* X *називається простором із властивістю обмеженої апроксимації за базою* $\mathcal{U}$, *якщо існує сім'я лінійних неперервних скінченновимірних операторів* $\{B_U : U \in \mathcal{U}\}$, $B_U : X \to X$ *така, що сіть* $B_U x$ *збігається до* x *для будь-якого* $x \in X$.

Т е о р е м а 2. *Нехай* X — *напіврефлексивний простір із властивістю обмеженої апроксимації за базою* $\mathcal{U}$, Y — *локально опуклий простір (ЛОП). Тоді для будь-якого лінійного ущільнення* $T : X \to Y$ *відображення* $T^{-1}|_{T(P)}$ *має властивість СК за базою* $\mathcal{U}$ *для будь-якої обмеженої множини* $P \subset X$.

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що образ T^*Y^* щільний в X^* у сильній топології X^*. Справді, оскільки T — ін'єктивний оператор, то $T^*Y^* \subset \subset X^*$ — тотальний підпростір, тобто для будь-якого $x \neq 0$ існує $f \in T^*Y^*$ з $f(x) \neq 0$. Тепер, згідно напіврефлексивності X, будь-який функціонал з X^{**} визначається деяким $x \in X$, отже, для будь-якого $\varphi \in X^{**}$ існує такий $f \in T^*Y^*$, що $\varphi(f) \neq 0$. Але звідси і випливає щільність T^*Y^* в X^*, бо в противному разі T^*Y^* містився б у деякій замкненій гіперплощині і, отже, існував би такий функціонал $\varphi \in X^{**}$, що $\varphi(f) = 0$ для будь-якого $f \in T^*Y^*$.

Тепер, внаслідок того, що X має властивість обмеженої апроксимації для будь-якого $U \in \mathcal{U}$ існують елементи $x_U^1, x_U^2, \ldots, x_U^{n_U}$ з X і $f_U^1, f_U^2, \ldots$ $\ldots, f_U^{n_U}$ з X^* такі, що для будь-якого $x \in X$ сіть $\left\{\sum_{i=1}^{n_U} f_U^i(x) x_U^i\right\}$ збігається до x.

Далі, оскільки T^*Y^* щільний в X^*, для будь-якої обмеженої множини $P \subset X$ можна вибрати $g_U^1, g_U^2, \ldots, g_U^{n_U}$ з T^*Y^* так, що для всякого $x \in P$

$$\sum_{i=1}^{n_U} (f_U^i(x) - g_U^i(x)) x_U^i \in U.$$

Справді, для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує такий $V \in \mathcal{U}$, що $\underbrace{V + V + \ldots + V}_{n_U} \subset U$; тепер існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого ε, $|\varepsilon| < \delta$, виконується $\varepsilon x_U^i \in \in V$. Далі, $g_U^i \in T^*Y^*$ вибираємо так, щоб $|f_U^i(x) - g_U^i(x)| < \varepsilon$ при всіх $x \in P$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n_U} (f_U^i(x) - g_U^i(x)) x_U^i \in U.$$

Покладемо $B_U y = \sum_{i=1}^{n_U} h_U^i(y) x_U^i$, де $y \in Y$, $h_U^i \in (T^*)^{-1} g_U^i$. Тоді $B_U y \to \to T^{-1} y$ для будь-якого $y \in T(P)$. Справді, якщо $y = Tx$, $x \in P$, то

$$B_U y = \sum_{i=1}^{n_U} h_U^i(Tx) x_U^i = \sum_{i=1}^{n_U} g_U^i(x) x_U^i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n_U} f_U^i(x) x_U^i + \sum_{i=1}^{n_U} (g_U^i(x) - f_U^i(x)) x_U^i \to x,$$

бо перший доданок збігається до x, а другий — до нуля.

О з н а ч е н н я 5. *Відображення* T^{-1} *назвемо обмежено (лінійно або скінченновимірно) регуляризовним, якщо на образі* $T(P)$ *кожної обмеженої* *множини $P \subset X$ існує свій регуляризатор, тобто існує така сім'я $\{R_U\}$, що $\forall x \in P$, $\forall V \in \mathcal{T}(X)$, $x \in V$, $\exists U_0 \in \mathcal{U}$, $\forall U \in \mathcal{U}$, $U \subset U_0 : R_U (Ax + U) \subset V$.*

З теореми 2 і результатів [4] отримуємо теорему.

Теорема 3. *Нехай X — метризовний напіврефлексивний простір із властивістю обмеженої апроксимації за базою $\mathcal{U}$, Y — метризовний ЛОП з базою $\overline{\mathcal{U}}$. Тоді для всякого лінійного ущільнення $T : X \to Y$ відображення T^{-1} обмежено скінченновимірно лінійно регуляризовне за базою $\overline{\mathcal{U}}$.*

Зауваження. У випадку метризовних просторів можна не говорити про базу $\mathcal{U}$, бо в [4] показано, що тоді регуляризовність не залежить від бази. Звідти також випливає, що для лінійних метричних просторів приведене означення регуляризовності, еквівалентне класичному означенню регуляризовності в метричних просторах [1, с. 178].

Наслідок. *Усяке лінійне ущільнення $T : \mathcal{E} \to Y$ $(T : \mathcal{L} \to Y)$, де $\mathcal{E}$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій на дійсній осі, а $\mathcal{L}$ — простір нескінченно диференційовних швидко спадних функцій, Y — метризовний ЛОП, має обмежено скінченновимірно лінійно регуляризовний обернений T^{-1}.*

Цей наслідок випливає з того, що простори $\mathcal{E}$ і $\mathcal{L}$ мають базиси і рефлексивні [5, 6].

Перед наведенням прикладу рефлексивного простору Фреше, на якому існує лінійне ущільнення з нерегуляризовним оберненим, сформулюємо узагальнення відомого результату для банахових просторів.

Твердження 1. *Нехай X — простір Фреше, топологія якого визначається зліченним набором норм $\| \ \|_k$, $k = \overline{1, \infty}$, а $B_k = \{x \in X : \| x \|_k < 1\}$. Нехай $T : X \to Y$ — лінійне ущільнення, Y — нормований простір. Введемо на просторі X норму $\| x \|_0 = \| Tx \|_Y$. Якщо для кожного $k > 0$ замикання $\overline{B}_k$ кулі B_k за нормою $\| \ \|_0$ є $\| \ \|_1$-необмеженою множиною, то оператор T^{-1} нерегуляризовний.*

Доведення. Справді, якби оператор T^{-1} був регуляризовний, то він був би відображенням 1-го класу Бореля [1, с. 184], тобто куля B_1 повинна б бути об'єднанням зліченного числа $\| \ \|_0$-замкнених множин V_i, $i = \overline{1, \infty}$. Але за умовою ні одна множина V_i не може містити ніяких зсувів гомотетичних образів B_k. За теоремою Бера про категорії множини B_1 — не окіл нуля. Суперечність.

Нехай X — «простір Словіковського» (простір Монтеля, отже, сепарабельний і рефлексивний, який не є простором Шварца) [7, с. 258]. Він складається з подвійних послідовностей $x = (x_{mn})_{m,n=1}^{\infty}$, для яких $\| x \|_{kl} = \sup_{m,n} a_{klmn} | x_{mn} | < \infty$, $k, l = \overline{1, \infty}$, де $a_{klmn} = m^k \max(1, n^{l-m})$ з набором норм $\| \ \|_{kl}$. Одиничні орти утворюють базис цього простору. Він природним чином неперервно вкладається в банахів простір $Z = c_0 (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Для фіксованого m_0 позначимо через Z_{m_0} підпростір Z, який складається з послідовностей $x = (x_{mn} : x_{mn} = 0$ при $m \neq m_0)$. Простір Z_{m_0} (ізометричний c_0) неквазірефлексивний. Тому на ньому можна ввести слабкішу норму $\| \ \|_{m_0}$ так, щоб замикання одиничної кулі простору Z_{m_0} за нормою $\| \ \|_{m_0}$ було необмеженим у вихідній нормі [1, с. 80]. На просторі Z введемо норму $\| x \|_0 = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \| x_m \|_m$, де x_m — природна проекція елемента x на підпростір Z_m. Зафіксуємо k та l. Тоді при $m = l$ норма $\| \ \|_{kl}$ на підпросторі $X \cap Z_m$ еквівалентна (навіть пропорціональна) нормі простору Z і $X \cap Z_m$ щільний у Z_m. Тому $\| \ \|_0$-замикання кулі $B_{kl} = \{x \in X : \|x\|_{kl} \leqslant 1\}$ необмежене за нормою Z.

Щоб завершити побудову прикладу, візьмемо за Y простір Z з нормою $\| \ \|_0$, а за T — тотожне вкладення X в Y. Тоді за твердженням 1 (де роль норм $\| \ \|_k$, $k > 1$, грають норми $\| \ \|_{kl}$, пронумеровані натуральними числами в довільному порядку, а роль $\| \ \|_1$ — звуження норми простору Z на X) обернений оператор T^{-1} буде нерегуляризовним.

Відзначимо одну просту достатню умову регуляризовності в просторах Фреше.

Т в е р д ж е н н я 2. *Нехай $T : X \to Y$ — лінійний неперервний ін'єктивний оператор, X, Y — сепарабельні простори Фреше, топологія в X визначається послідовністю норм $\| \ \|_n$, $n = 1, \infty$, причому для кожного n відображення T^{-1} регуляризовне з Y в $(X, \| \ \|_n)$. Тоді T^{-1} регуляризовне з Y в X.*

Д о в е д е н н я. Досить довести, що для будь-якого n куля $B_n = \{x \mid \| x \|_n < 1\}$ є об'єднанням зліченного числа множин, замкнених у топології прообразів відкритих множин Y при відображенні T [1, с. 182]. Але, оскільки $T^{-1} : Y \to (X, \| \ \|_n)$ регуляризовний, то це виконується [1, с. 184].

Н а с л і д о к. *Нехай D — відкритий круг скінченного або нескінченного радіуса з центром у нулі в комплексній площині, $A(D)$ — простір аналітичних всередині D функцій з топологією, що визначається набором норм $\| x \|_n = \max\limits_{z \in D_n} | x(z) |$, де $D_n \subset D$ — замкнений круг з центром в нулі, $\bigcup_n D_n = D$. Нехай Γ — компактна підмножина D, яка складається з нескінченного числа точок. Тоді оператор $T : A(D) \to C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — простір неперервних на Γ функцій з максимум-нормою), який ставить у відповідність функції $x(z) \in A(D)$ її звуження на Γ, лінійний, неперервний та ін'єктивний, а оператор T^{-1} регуляризовний.*

Д о в е д е н н я. Починаючи з деякого n_0, $\Gamma \subset D_n$. Тоді при $n > n_0$ оператор T^{-1} регуляризовний з $C(\Gamma)$ в $(A(D), \| \ \|_n)$ [1, с. 200]. За твердженням 2 він регуляризовний з $C(\Gamma)$ в $A(D)$.

1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
2. *Доманский Е. Н.* Об эквивалентности сходимости регуляризующего алгоритма существованию решения некорректной задачи // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, вып. 5.— С. 101—118.
3. *Винокуров В. А.* Регуляризуемые функции в топологических пространствах // Докл. АН СССР.— 1979.— **246**, № 5.— С. 1033—1077.
4. *Менихес Л. Д.* Регуляризуемость в топологических пространствах // Прикладные задачи мат. анализа.— Челябинск: Челябин. политехн. ин-т, 1986.— С. 83—87.
5. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.— М. : Мир, 1967.— 266 с.
6. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.— 1961.— **16**, вып. 4.— С. 63—132.
7. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. Dordrecht e. a.— Warszawa: Reidel Publ. Co — PWN, 1985.— 459 p.

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики
АН УРСР, Львів

Одержано 06.03.89