УДК 517.53

В. В. Маймескул

Оценки роста сопряженных гармонических полиномов в областях комплексной плоскости

Для произвольной жордановой области G установлена оценка нормы оператора гармонического сопряжения в пространствах гармонических полиномов степени не выше n, $n = 1, 2, \ldots$.

Для довільної жорданової області G встановлено оцінку норми оператора гармонічного спряження у просторах гармонічних поліномів ступеня не вище n, $n = 1, 2, \ldots$.

1. Пусть G $(\ni 0)$ — произвольная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная жордановой кривой Γ, $\mathbf{P}_n$ — класс гармонических полиномов степени не выше n, $n = 1, \ldots$, не превышающих по модулю единицы в G.

Для $Q(z) \in \mathbf{P}_n$ через $\tilde{Q}(z)$ обозначим сопряженный к Q гармонический полином, нормированный условием $\tilde{Q}(0) = 0$, и положим

$$A_n(G) = \max_{Q \in \mathbf{P}_n} \max_{z \in \bar{G}} |\tilde{Q}(z)|.$$

В [1], в частности, показано, что для областей, удовлетворяющих так называемому внутреннему условию (α, h)-сектора, имеет место оценка

$$A_n(G) \leqslant C(\alpha, h) \ln(n+1), \tag{1}$$

которая является точной по порядку даже в случае круга.

В настоящей статье установлена оценка величины $A_n(G)$ для произвольной жордановой области G, позволяющая получать аналоги (1) при различных ограничениях на ее геометрическое строение.

2. Приведем необходимые определения и обозначения. Через $\varphi(z)$ обозначим функцию Римана, конформно и однолистно отображающую G на единичный круг E и нормированную условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$; $\varphi(z)$ может быть естественным образом продолжена до гомеоморфизма между замкнутыми областями, за которым оставим прежнее обозначение. Обратное к $\varphi(z)$ отображение обозначим через $\psi(w)$. Для внутренней линии уровня $\{\zeta \in G : |\varphi(\zeta)| = r\}$, $0 < r < 1$, воспользуемся обозначением Γ_r, $G_r = \operatorname{int} \Gamma_r$, $\Omega_r = \mathbb{C} \setminus \bar{G}_r$, $\Phi_r(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая Ω_r на внешность единичного круга с обычной нормировкой на бесконечности, $L_{r,u} = \{\zeta \in \Omega_r : |\Phi_r(\zeta)| = 1 + u\}$, $u > 0$, — линия уровня функции Φ_r порядка $1 + u$.

Основной характеристикой областей, используемой в статье, является величина

$$\mu_G(\delta) = \sup_{\substack{z \in \Gamma,\ \zeta \in \bar{G} \\ \delta \leqslant |\zeta - z| \leqslant \delta_0}} \mu_0(z, \zeta, G), \tag{2}$$

$0 < \delta \leqslant \delta_0$, $\delta_0 = \operatorname{dist}(0, \Gamma)/2$, $\mu_0(z, \zeta, G)$ — приведенный относительно точки 0 модуль семейства кривых, отделяющих в области точки z и ζ от нуля [2].

Пусть также $\sigma = 1/\varphi'(0)$ — конформная емкость области G.

Теорема 1. *Для произвольной жордановой области G*

$$A_n(G) \leqslant 2\pi e^{2\pi} \inf_{0 < t \leqslant 1} \left\{ \left[\mu_G(t\delta_0) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^9}{\sigma} \right] e^{2n\sqrt{t}} \right\}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbf{P}_n$ — произвольный гармонический полином. Для аналитического полинома $R(z) = Q(z) + i\tilde{Q}(z)$ в силу простого следствия из леммы Шварца (см., например, [3, с. 223]) при всех $z \in G$ имеем

$$R'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial U_z} \frac{Q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

где ∂U_z — окружность с центром в точке z радиуса $\operatorname{dist}(z, \Gamma)$. Следовательно,

$$|R'(z)| = \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\partial U_z} \frac{Q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leqslant \frac{2}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)}.$$

Пусть $l_z \subset G$ — дуга, соединяющая точки 0 и z, которая является образом отрезка $[0, \varphi(z)]$ при отображении $\psi(w)$. Используя соотношение

$$e^{-2\pi} |\psi'(w)| (1 - |w|) \leqslant \operatorname{dist}(\psi(w), \Gamma) \leqslant e^{2\pi} |\psi'(w)| (1 - |w|) \tag{4}$$

(см., например, [4]), при $z \in \Gamma_r$ получаем оценку

$$|R(z)| = \left| \int_{l_z} R'(\zeta)\, d\zeta + Q(0) \right| \leqslant 1 + 2e^{2\pi} \ln \frac{1}{1 - r}, \tag{5}$$

которая по принципу максимума остается справедливой и в $\bar{G}_r$.

Воспользуемся далее локальными оценками искажения расстояний при конформных отображениях [2]. Доказанные для внешней функции Римана, они легко могут быть преобразованы к оценкам для $\varphi(z)$. А именно: для произвольных $z \in \Gamma$, $\zeta \in \overline{G}$ имеет место соотношение

$$\sqrt{\sigma} e^{-\pi\mu_0(z,\zeta,G)} \leqslant \frac{|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|}{\sqrt{|\varphi(\zeta)|}} \leqslant e^{2\pi}\sqrt{\sigma} e^{-\pi\mu_0(z,\zeta,G)}. \tag{6}$$

В соответствии с определением $\mu_G(\delta)$ заключаем, что неравенство

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(z)| \geqslant \sqrt{\sigma|\varphi(\zeta)|}\, e^{-\pi\mu_G(\delta)} \tag{7}$$

справедливо при всех $z \in \Gamma$, $\zeta \in \overline{G}$ таких, что $\delta \leqslant |\zeta - z| \leqslant \delta_0$. В силу (4) $\delta_0 \geqslant e^{-2\pi}\sigma/2$ и, с учетом теоремы Кебе об одной четверти, оценка (7) принимает вид

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(z)| \geqslant \frac{e^{-\pi}\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{2}} e^{-\pi\mu_G(\delta)} = \theta(\delta).$$

Следовательно, для любой точки $z \in \Gamma$ при всех $\varepsilon \in (0, 1)$ существует точка $\xi \in \Gamma_{1-\varepsilon\theta(\delta)}$ такая, что $|z - \xi| < \delta$. Предельный переход при $\varepsilon \to 1$ дает

$$\operatorname{dist}(z, G_{1-\theta(\delta)}) \leqslant \delta. \tag{8}$$

С другой стороны, известные результаты о поведении внешних линий уровня (см., например, [5, с. 181]) позволяют утверждать, что для любой точки $\zeta \in L_{r,u}$ при всех $r \in (0, 1)$ и $u > 0$

$$\operatorname{dist}(\zeta, G_r) \geqslant \frac{\operatorname{diam} G_r}{4} u^2.$$

Сравнивая это неравенство с (8), заключаем, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ $G \subset \subset \operatorname{int} L_{1-\theta(\delta), u(\delta)}$ при

$$u(\delta) = \sqrt{\frac{4\delta}{\operatorname{diam} G_{1-\theta(\delta)}}} \leqslant 2\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}.$$

Применяя лемму Бернштейна (см., например, [6, с. 101]), получаем при всех $\delta \in (0, \delta_0]$ и $z \in \overline{G}$

$$|R(z)| \leqslant 2\pi e^{2\pi}\left[\mu_G(\delta) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sigma} + \frac{9}{2\pi}\right] e^{2n\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}}. \tag{9}$$

Переход в правой части (9) к нижней грани по $\delta \in (0, \delta_0]$ и в левой части к максимуму по $z \in \overline{G}$ завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Для произвольной области G с K-квазиконформной границей справедливо неравенство*

$$A_n(G) \leqslant C(K)\ln(n+1).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно положить в (3) $t = n^{-2}$ и воспользоваться известными оценками для $\mu_0(z, \zeta, G)$ в областях с квазиконформной границей [2].

3. Приведем примеры классов областей, для которых правая часть (3) может быть выражена через определенные геометрические характеристики.

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 0$, $0 < f(x) \leqslant x$ при $x > 0$.

Будем говорить, что область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, если существуют такие $L > 0$ и $a \in G$, что для любой точки $z \in \partial G$ существует спрямляемая дуга l_z длины $l \leqslant L$ с естественной параметризацией $\zeta = \zeta(s)$, $\zeta(0) = z$, $\zeta(l) = a$, для которой при всех $s \in [0, l]$

$$\operatorname{dist}(\zeta(s), \partial G) \geqslant f(s). \tag{10}$$

В частном случае, когда $f(x) = \varepsilon x$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(x)$-условие Джона в смысле данного определения эквивалентно классическому условию Джона [7] (см., например, [8, с. 45]). Условию Джона удовлетворяют в том числе области с внутренним условием (α, h)-сектора, области с квазиконформной [2, 7] и липшицевой [8] границами.

Примером областей с εx^{α}-условием Джона, $\alpha > 1$, могут служить локальные Lip $1/\alpha$-области [9], а также области, граница которых состоит из конечного числа квазиконформных дуг, гладких в окрестностях точек стыка и образующих в них внутренние нулевые углы порядка касания не выше α.

Теорема 2. *Если область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, то*

$$\mu_G(\delta) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sigma} \leqslant 12e^{2\pi}\int\limits_{\delta/4}^{L}\frac{ds}{f(s)}.$$

Доказательство. Пусть $z \in \Gamma$, $\zeta \in \overline{G}$, $\delta \leqslant |z-\zeta| \leqslant \delta_0$ — произвольные точки, $\tau = \varphi(z)$, $w = \varphi(\zeta)$, $r = |\tau - w|$.

Предположим сначала, что $r \leqslant e^{-3\pi}/2$. Граница области $D = \{\nu \in \mathbb{C}: |\nu| < 1,\ r < |\nu - \tau| < e^{3\pi}r\}$ состоит из двух дуг единичной окружности и дуг окружностей с центром в точке τ и радиусов r и $e^{3\pi}r$, которые обозначим соответственно l_r и $\tilde{l}_r$. Пусть $\mathfrak{R}$ — четырехсторонник, определяемый областью D, отмеченными b-сторонами которого являются l_r и $\tilde{l}_r$ [10]. Очевидно, для модуля этого четырехсторонника $m(\mathfrak{R})$ имеет место оценка

$$m(\mathfrak{R}) \geqslant \frac{1}{\pi}\ln\frac{e^{3\pi}r}{r} = 3. \tag{11}$$

На окружности $|\xi - z| = \delta/2$ существует связная дуга γ, разделяющая в G точки z и ζ. Эта дуга разбивает область G на две подобласти. Ту из них, которая не содержит точку 0, обозначим через G_1. (Без ограничения общности считаем, что $a = 0$.)

Предположим, что $\zeta \in \overline{G}_1$. Тогда на окружности $|\xi - z| = 3\delta/4$ существует дуга $\gamma_1 \subset \overline{G}_1$, отделяющая в области G точку ζ от точек z и 0 и разбивающая G на две подобласти. Ту из них, которая не содержит точку 0, обозначим через G_2. Если дуга $\tilde{\gamma} = \psi(\tilde{l}_r)$ не пересекает γ_1, то найдется точка $\xi \in \partial G_2 \setminus \gamma_1$, для которой

$$\operatorname{dist}_G(\xi, \tilde{\gamma}) \geqslant \delta/4. \tag{12}$$

Если же $\tilde{\gamma} \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, то положим $\xi = z$. Отметим, что в этом случае для четырехсторонника $\psi(\mathfrak{R})$ имеет место соотношение $\inf\limits_{l} \operatorname{mes} l \geqslant \delta/4$, где точная нижняя грань берется по всем дугам l, соединяющим его a-стороны. Следовательно, в силу конформной инвариантности модуля неравенства (11) и соотношения (4.7) из [10, с. 25], получим

$$\operatorname{mes} l \geqslant \delta/4 \tag{13}$$

для произвольной дуги l, соединяющей в четырехсторонние $\psi(\mathfrak{R})$ b-стороны.

Пусть $\xi_1 \in l_\xi \cap \tilde{\gamma}$ — произвольная точка, где дуга l_ξ удовлетворяет условию (10), $\tau_1 = \varphi(\xi_1)$. Тогда

$$\mu_0(z, \zeta, G) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sigma} = \mu_0(\tau, w, E) \leqslant 5 - \frac{1}{2\pi}\ln|\tau_1| +$$

$$+ \mu_0(\tau, \tau_1, E) \leqslant 5 + \frac{1}{2\pi}\ln 2 + \frac{1}{\pi}k_E(0, \tau_1),$$

где через $k_E(0, \tau_1)$ обозначено гиперболическое расстояние от точки 0 до τ_1. Поскольку $|\tau_1| \geqslant 1/2$ и $k_E(0, 1/2) = \ln 3$, то последняя оценка приводит к неравенству

$$\mu_0(z, \zeta, G) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} \leqslant 6k_E(0, \tau_1) = 6k_G(0, \xi_1).$$

Из (4), (10) с учетом (12), (13) имеем

$$k_G(0, \xi_1) \leqslant 2 \int\limits_{l_\xi(0, \xi_1)} \frac{|\varphi'(z)\, dz|}{1 - |\varphi(z)|^2} \leqslant 2e^{2\pi} \int\limits_{l_\xi(0, \xi_1)} \frac{|dz|}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \leqslant 2e^{2\pi} \int\limits_{\delta/4}^{L} \frac{ds}{f(s)}.$$

Таким образом,

$$\mu_0(z, \zeta, G) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} \leqslant 12e^{2\pi} \int\limits_{\delta/4}^{L} \frac{ds}{f(s)}. \tag{14}$$

В случае $z \in \overline{G}_1$, взяв в качестве γ_1 дугу окружности $|\xi - z| = \delta/4$, отделяющую в G точку z от ζ и 0, аналогичными рассуждениями снова приходим к оценке (14).

Если $r \geqslant e^{-3\pi}/2$, то в силу (6)

$$\mu_0(z, \zeta, G) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} \leqslant 2 + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|w|}{|\tau - w|} \leqslant 4.$$

С другой стороны, поскольку $L \geqslant 2\delta_0$ и $f(x) \leqslant x$,

$$\int\limits_{\delta/4}^{L} \frac{ds}{f(s)} \geqslant \int\limits_{\delta_0/4}^{2\delta_0} \frac{ds}{s} = \ln 8.$$

Таким образом, и в этом случае (14) имеет место. В силу произвольности точек z и ζ теорема доказана.

Следствие 2. *Если область G удовлетворяет $f(x)$-условию Джона, то*

$$A_n(G) \leqslant C \int\limits_{\delta_0/4n^2}^{L} \frac{dx}{f(x)},$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Следствие 3. *Если область G удовлетворяет εx^{α}-условию Джона, $\alpha > 1$, то*

$$A_n(G) \leqslant \frac{C}{\varepsilon(\alpha - 1)} n^{2(\alpha - 1)},$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Следствие 4. *Если область G удовлетворяет условию Джона, то*

$$A_n(G) \leqslant C \ln(n + 1), \tag{15}$$

где $C = C(G) > 0$ — некоторая постоянная.

Замечание. Области с условием Джона не исчерпывают класс областей, для которых справедлива оценка (15). В этом легко убедиться, рассмотрев область $D = \{z = x + iy : 0 < y < f(x),\ 0 < x < 1/2\}$, где $f(x)$ — функция, определяемая соотношением

$$f(x) = \begin{cases} (1 + 2x_n + 2x_{n+1})\, x - x_{n+1}(1 + x_n)^2, & x_{n+1} < x \leqslant d_n, \\ x_{n+1} - x_n - x, & d_n < x \leqslant x_n, \end{cases}$$

где $x_n = 2^{-2^n}$, $d_n = (x_n + x_{n+1})/2$, $n = 0, 1, \ldots$. Область D не удовлетворяет, очевидно, условию Джона, однако является областью с $cf(x)$-условием Джона при некотором $c > 0$. По следствию 2

$$A_n(D) \leqslant C \int\limits_{1/32n^2}^{1/2} \frac{dx}{f(x)} .$$

Выбирая N таким образом, чтобы $x_{N+1} \leqslant \frac{1}{32n^2} < x_N$, получаем

$$\int\limits_{1/32n^2}^{1/2} \frac{dx}{f(x)} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \left(\int\limits_{x_{k+1}}^{d_k} + \int\limits_{d_k}^{x_k} \right) \frac{dx}{f(x)} \leqslant 2 \sum_{k=0}^{N} \ln \frac{d_k}{x_k x_{k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant -2\ln(4x_{N+2}) \leqslant C_1 \ln(n+1).$$

1. *Гольштейн Е. Г.* Некоторые оценки для производных гармонических многочленов // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.— М. : Физматгиз, 1961.— С. 171—180.
2. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб.— 1977.— **102**, № 3.— С. 331—361.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
4. *Андриевский В. В.* О приближении функций частными суммами ряда по полиномам Фабера на континуумах с ненулевой локальной геометрической характеристикой // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 3—10.
5. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 270 с.
6. *Уолш Дж.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 508 с.
7. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.— 1978—1979.— **4**.— P. 383—401.
8. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М. : Наука, 1983.— 275 с.
9. *Johnston E.* Growth of derivatives and the modulus of continuity of analytic functions // Rocky Mth. J. Math.— 1979.— **9**, N 4.— P. 671—682.
10. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconforme Abbildungen.— Berlin ets.: Springer-Verlag, 1965.— 270 p.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 03.07.89