УДК 512.546

А. Г. Пискунов

Восстанавливаемость топологии Вьеториса по компактам в пространстве замкнутых подгрупп

Доказано, что пространство замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной σ-компактной группы G является k-пространством тогда и только тогда, когда каждая некомпактная подгруппа из G представима в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

Доведено, що простір замкнених підгруп $\mathfrak{L}(G)$ локально компактної σ-компактної групи G є k-простором тоді і тільки тоді, коли кожна некомпактна підгрупа із G може бути представлена у вигляді перетину зліченної кількості відкритих множин.

В [1, 2] доказано, что пространство замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G)$ с топологией Вьеториса локально компактной группы G счетного веса является k-пространством. Это решение вопроса 9.46 из сборника [3]. В данной статье этот результат усилен: пространство $\mathfrak{L}(G)$ σ-компактной локально-компактной группы G является k-пространством тогда и только тогда, когда любая некомпактная подгруппа из G представима в виде счетного пересечения открытых множеств, т. е. является множеством типа G_δ.

В качестве следствия получено описание строения группы G, для которой пространство $\mathfrak{L}(G)$ с топологией Вьеториса удовлетворяет различным условиям счетности (теорема 3, 4). Группы рассматриваются локально компактные, подгруппы — замкнутые, $\overline{X}$ — замыкание множества X, ω_1 — первый несчетный ординал, G — группа, $\langle \overline{X} \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством X, $X \subset G$, $n\mathfrak{K}(G)$ — множество всех некомпактных, $\mathfrak{K}(G)$—компактных, $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$ — σ-компактных подгрупп группы G, $\mathfrak{K}\aleph_0(G) \cap n\mathfrak{K}(G) = \aleph_0(G)$. Все подмножества из $\mathfrak{L}(G)$ рассматриваются с топологией Вьеториса [1], открытую предбазу этой топологии образуют множества $D_1(U) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \subset U\}$, $D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \cap V \neq \varnothing\}$, где U и V пробегают все открытые подмножества G.

Напомним некоторые определения. Хаусдорфово пространство X называется k-пространством тогда и только тогда, когда в X замкнуто каждое подмножество, имеющее замкнутое в X пересечение с любым компактом. Точка $x \in X$ называется точкой счетной тесноты, если в каждом множестве, замыкание которого содержит x, найдется счетное подмножество, замыкание которого содержит x. Если X имеет счетную базу топологии, то X — пространство счетного веса; если каждая точка $x \in X$ имеет счетную локальную базу ($\chi(x, X) \leqslant \aleph_0$), то X счетного характера; если каждая точка $x \in X$ типа G_δ ($\Psi(x, X) \leqslant \aleph_0$), то X счетного псевдохарактера. Пространство X называется секвенциальным, если каждое подмножество X замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы; пространством Фреше — Урысона, если для любой точки $x \in X$ из каждого множества, замыкание которого содержит x, можно извлечь сходящуюся к x последовательность; пространством счетной тесноты, если каждая его точка является точкой счетной тесноты. Классы рассмотренных пространств вкладываются друг в друга в следующем порядке: счетного характера, Фреше — Урысона, секвенциальное, k-пространство; кроме того, секвенциальное пространство имеет счетную тесноту.

Теорема 1. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ счетного псевдохарактера тогда и только тогда, когда группа G счетного веса.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 1 [4] если точка $H \in \mathfrak{L}(G)$ счетного псевдохарактера, то подгруппа $H \subset G$ σ-компактна и типа G_δ в G. Тогда G σ-компактна, а единица $e = \overline{\langle e \rangle}$ типа G_δ в G. Это влечет счетность характера и метризуемость G [5, с. 144]. Тогда в силу [6, 4.1.16] группа G счетного веса.

Достаточность. Если группа G счетного веса, то любая подгруппа H типа G_δ. Далее, по определению топологии Вьеториса получаем счетность псевдохарактера точки H в $\mathfrak{L}(G)$.

Лемма 1. *Для произвольной группы G характер точки G в $\mathfrak{L}(G)$ совпадает с ее псевдохарактером.*

Доказательство. Для доказательства леммы понадобится понятие топологии Шаботи на множестве $\mathfrak{L}(G)$. Ее открытая предбаза имеет вид [7] $D_1(G\setminus K) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \cap K = \varnothing\}$, $D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G),\ H \cap V \neq \neq \varnothing\}$, где K пробегает все компактные, а V — открытые подмножества из G. Пусть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G)$ — множество $\mathfrak{L}(G)$, рассматриваемое с топологией Шаботи (в локально компактном случае она совпадает с $\mathfrak{S}$-топологией [7]) а $\mathfrak{L}_{\mathscr{E}}(G)$ — с топологией Вьеториса (ε-топологией). Из определения топологий следует, что $\mathfrak{U}$ — открытая окрестность G из указанной в определении предбазы ε-топологии тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}$ — открытая окрестность G из указанной предбазы $\mathfrak{S}$-топологии.

Тогда получаем равенства $\Psi(G, \mathfrak{L}_{\mathscr{E}}(G)) = \Psi(G, \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G))$, $\mathrm{X}(G, \mathfrak{L}_{\mathscr{E}}(G)) = \mathrm{X}(G, \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G))$. Далее, по 1.9 и 2.2 [7] $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G)$ — компакт. Тогда совпадение в компакте характера и псевдохарактера точки G [5, с. 144] влечет $\Psi(G, \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G)) = = \mathrm{X}(G, \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G))$, и поэтому $\Psi(G, \mathfrak{L}_{\mathscr{E}}(G)) = \mathrm{X}(G, \mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}(G))$.

Идея доказательства леммы 1 с использованием $\mathfrak{S}$-топологии принадлежит И. В. Протасову.

Замечание 1. *Для любой подгруппы $H \subset G$ пространства $\mathfrak{L}(H)$ и $D_1(H)$ гомеоморфны* (*лемма* 5, [8]).

Лемма 2. *Если некомпактная подгруппа $H \subset G$ — точка счетного псевдохарактера в $n\mathfrak{K}(G)$, то она — точка счетного характера в $n\mathfrak{K}(G)$.*

Доказательство. По лемме 1 точка H имеет счетный характер в $\mathfrak{L}(H)$. Тогда пусть $\{\mathscr{W}_i, i \geqslant 1\}$ — такие открытые окрестности точки H в $n\mathfrak{K}(G)$, что $\{\mathscr{W}_i \cap D_1(H)_1, i \geqslant 1\}$ — локальная база H в $D_1(H) \cap n\mathfrak{K}(G)$. Значит, для произвольной окрестности точки H $\mathscr{V} \subset n\mathfrak{K}(G)$ найдется $\mathscr{W}_n$ такая, что $\mathscr{V} \cap D_1(H) \supset \mathscr{W}_n \cap D_1(H)$. Но так как по теореме 1 [4] подгруппа H типа G_δ в G и $\boldsymbol{\delta}$ — компактна, то по теореме 2 [4] $D_1(H) \cap n\mathfrak{K}(G)$ — окрестность точки H из собственных подгрупп в $n\mathfrak{K}(G)$. Тогда $\mathscr{W}_n \cap \cap D_1(H)$ — окрестность точки H в $n\mathfrak{K}(G)$. Поэтому $\{\mathscr{W}_i \cap D_1(H), i \geqslant 1\}$ — локальная база H в $n\mathfrak{K}(G)$.

Лемма 3. *Если псевдохарактер пространства $n\mathfrak{K}(G)$ группы G счетен, то характер $n\mathfrak{K}(G)$ счетен.*

Доказательство следует из леммы 2.

Лемма 4. *Пусть X и K — компактные подмножества группы G, $\mathfrak{F}$ — замкнутое множество $\mathfrak{K}(G)$. Если $D_1(X \cup K) \cap F = \varnothing$, то найдется такая компактная окрестность U единицы e, что $D_1(XU \cup K) \cap \cap F = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть V — любая компактная окрестность $e \in G$; $\{\mathscr{W}_i, i \in I\}$ — определяющая система замкнутых окрестностей множества $X \cup K$ в компакте $(X \cup K)V$. По определению множеств типа D_1 имеем $\bigcap\limits_{i\in I} D_1(\mathscr{W}_i) = D_1\left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{W}_i\right) = D_1(X \cup K)$. Тогда в силу компактности $D_1((X \cup \cup K), V)$ [9, с. 52] найдется конечное подмножество окрестностей $\{\mathscr{W}_i, i \in \lambda\}$ с пустым пересечением $\bigcap\limits_{i\in\lambda} D_1(\mathscr{W}_i) \cap \mathfrak{F}\, \varnothing$. По 4.10 [10] найдется U — компактная окрестность e такая, что $XU \subset \bigcap\limits_{i\in\lambda} \mathscr{W}_i$. Вследствие $D_1(XU \cup K) \subset \subset \bigcap\limits_{i\in\lambda} D_1(\mathscr{W}_i)$ окрестность U искомая.

Лемма 5. *Пусть $H \subset G$ представима в виде объединения возрастающей цепи компактных открытых в H подгрупп $H = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$. Тогда найдется такая окрестность H, что если для некоторого $i \geqslant 1$ произвольная подгруппа $L \not\subset H$ и $L \not\subset V$, то $L \not\subset H \cup V$, где V — открытое множество и $H_i \subset V \subset H_iU$.*

Доказательство. Из дискретности фактор-пространства H/H_1 следует существование в G такой окрестности $U \ni e$, что для различных классов смежности hH_1 и gH_1 выполняется $\varnothing = hH_1U \cap gH_1U$, где h,

$g \in H$. Пусть подгруппа $L \not\subset H$ и $L \prec V$ для некоторого $i \geqslant 1$. Возьмем $h \in L \setminus V$ и $v \in L \setminus H$. Если $h, v \in H \cup V$, то по выбору $h \in H \setminus H_i$ и $v \in V$. Тогда $v = gu$, где $g \in H_i$ и $u \in U$. Но для hgu элемента подгруппы L выполняется следующее: 1) $hgu \notin H$, так как $hg \in H$, а $u \notin H$; 2) $hgu \notin V$, так как $hg \notin H_i$ и, по выбору U, $hg\, U \cap V \subset hgU \cap H_iU = \varnothing$. Поэтому $L \not\subset \not\subset H \cup V$.

Лемма 6. *Пусть H — некомпактная σ-компактная подгруппа группы G; $\mathfrak{F}$ — замкнутое в $\mathfrak{K}(G)$ подмножество, $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) = \mathfrak{F}$. Если $D_1(H) \cap \cap \mathfrak{F} = \varnothing$, то существует открытая окрестность $\mathcal{V} \subset \mathfrak{L}(G)$ точки H со свойством $\mathcal{V} \supset \mathfrak{F} = \varnothing$.*

Доказательство. Если H неиндуктивно компактная группа, то [2] $H \notin \overline{\mathfrak{K}(G)}$ и искомая окрестность существует. Если H индуктивно компактна, то H можно представить в виде объединения возрастающей цепи компактных открытых в H подгрупп H_i, $i \geqslant 1$, $H = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$, $H_i \subset H_{i+1}$. Тогда пусть U — окрестность e, выбранная по лемме 5. По лемме 4 существует V_1 — открытая окрестность e, $\overline{V}_1 \subset U$, такая, что $D_1(H_1\overline{V}_1) \cap \cap \mathfrak{F} = \varnothing$. Пусть для произвольного натурального n выбраны окрестности $V_n \subset \overline{V}_n \subset V_{n+1} \subset \overline{V}_{n+1} \subset \ldots \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U$, для которых $D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i\overline{V}_i\right) \cap \cap \mathfrak{F} = \varnothing$. По выбору окрестностей имеем $D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i\overline{V}_i\right) \subset D_1(H_nU)$. Тогда из $D_1(H_{n+1}) \cap \mathfrak{F} = \varnothing$ по лемме 5 следует $D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i\overline{V}_i \cup H_{n+1}\right) \cap \mathfrak{F} = \varnothing$. По лемме 4 найдется $V_{n+1} \subset \overline{V}_{n+1} \subset V_n$ такая, что $D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} H_i\overline{V}_i\right) \cap \cap \mathfrak{F} = \varnothing$ и т.д. Рассмотрим открытую окрестность $\mathcal{V} = D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_iV_i\right) \ni \ni H$. Так как любая компактная подгруппа $K \in \mathcal{V}$ содержится в конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_iV_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i\overline{V}_i$, то $\mathcal{V} \cap \mathfrak{F} = \varnothing$.

Лемма 7. *Пусть H—некомпактная σ-компактная подгруппа группы G, $\mathfrak{F}$ — подмножество $\mathfrak{K}(G)$. Если существует окрестность $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{L}(G)$, отделяющая точку H от собственных компактных подгрупп $D_1(H) \cap \overline{\mathfrak{F}} \cap \cap \mathfrak{K}(G)$, то существует окрестность $\mathcal{W} \subset \mathfrak{L}(G)$, отделяющая H от $\overline{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U} \ni H$ и $D_1(H) \cap \overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) \cap \mathfrak{U} = \varnothing$. В силу регулярности пространства $\mathfrak{L}(G)$ считаем, что $\mathfrak{U}$ — замкнутая окрестность. Тогда по лемме 6 в $\mathfrak{L}(G)$ найдется $\mathcal{V}$ — такая открытая окрестность точки H, что $\varnothing = \mathcal{V} \cap (\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) \cap \mathfrak{U}) = \mathcal{V} \cap \mathfrak{U} \cap \overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G)$. По условию выполняется $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) \supset \mathfrak{F}$. Поэтому имеем $\mathcal{V} \cap \mathfrak{U} \cap \mathfrak{F} = \varnothing$. Но тогда $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap (\operatorname{int} \mathfrak{U})$ — искомая окрестность точки H, где $\operatorname{int} \mathfrak{U}$ — точки, которые содержатся в $\mathfrak{U}$ с некоторой окрестностью.

Следствие 1. *Пусть H — некомпактная σ-компактная индуктивно-компактная подгруппа группы G. Если точка H в $\mathfrak{L}(G)$ является пределом последовательности подгрупп $\{H_i, i \geqslant 1\}$, то почти все подгруппы последовательности за исключением конечного числа содержатся в $D_1(H)$.*

Доказательство. По теореме 2 [4] точка H в $n\ \mathfrak{K}(G)$ обладает окрестностью из собственных подгрупп. Значит, только конечное число некомпактных подгрупп из последовательности $\{H_i, i \geqslant 1\}$ не содержится в $D_1(H)$. Далее, любая бесконечная подпоследовательность $\mathfrak{Z}$ компактных подгрупп из $\{H_i, i \geqslant 1\}$ сходится к H, и поэтому $\mathfrak{Z}$ замкнута в $\mathfrak{K}(G)$. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{Z}$ имеет с $D_1(H)$ непустое пересечение. В силу произвольности выбора $\mathscr{Z}$ получаем, что только конечное число компактных подгрупп из $\{H_i,\ i \geqslant 1\}$ не содержится в $D_1(H)$.

Теорема 2. *Множество $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$ (k—пространство) — секвенциальное пространство тогда и только тогда, когда (пространство $\aleph_0(G)$ счетного характера) группа G метризуема.*

Доказательство. Заметим, что если G метризуема, то по теореме 1 $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$ счетного псевдохарактера (каждая σ-компактная подгруппа группы G содержится в открытой σ-компактной подгруппе). Тогда счетность характера $\mathfrak{K}(G)$ следует из его локальной компактности [9, с. 52], а счетность характера $\aleph_0(G)$ следует из леммы 3.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{K}\aleph_0(G)$ и (пересечение $\mathfrak{F}$ с любым компактом из $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$ замкнуто) $\mathfrak{F}$ содержит пределы всех сходящихся последовательностей. Тогда из счетности характера (с использованием 3.3.20 [6]) следует, что $\mathfrak{F} \cap \aleph_0(G)$ замкнуто в $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$. Из (локальной компактности) счетности характера $\mathfrak{K}(G)$ следует, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)$ замкнуто в $\mathfrak{K}(G)$. Если $\mathfrak{R}$ не замкнуто и $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$, то любая $F \in (\mathfrak{K}\aleph_0(G) \cap \overline{\mathfrak{R}}) \setminus \mathfrak{R}$-некомпактна. По лемме 7 F принадлежит замыканию собственнх компактных подгрупп из $\overline{\mathfrak{R}}$. Но по условию $\overline{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{K}(G) = \mathfrak{R}$. Поэтому F принадлежит замыканию собственных подгрупп из $\mathfrak{R}$. В силу счетности характера точки F в $D_1(F)$ (лемма 1) из $D_1(F) \cap \mathfrak{R}$ можно выбрать сходящуюся к F последовательность компактных подгрупп $\{R_i, i \geqslant 1\} \subset D_1(F) \cap \mathfrak{R}$. Множество $\{F, \mathfrak{R}_i, i \geqslant 1\}$ компактно и замкнуто. Следовательно, $F \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ замкнуто в $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$.

Достаточность. Пусть $F \in \aleph_0(G)$ — точка несчетного характера. Тогда по лемме 5 [4] $\aleph_0(G)$ содержит $\mathscr{Z}$ — упорядоченную по убыванию замкнутую цепь подгрупп с единственной неизолированной точкой Z (последняя в $\mathscr{Z}$ подгруппа). По теореме 1 [1] любое компактное множество $F \subset \mathscr{Z}$ конечно. Тогда $\mathscr{Z} \setminus \{Z\}$ незамкнутое множество, имеющее со всеми компактами из $\mathscr{Z}$ замкнутое пересечение. Следовательно, $\mathscr{Z}$ — не k-пространство. Тогда по 3.3.25 [6] $\mathfrak{K}\aleph_0(G)$ — не k-пространство, а значит (3.3.20 [6]), оно — несеквенциальное пространство.

Следствие 2. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ секвенциально тогда и только тогда, когда группа G счетного веса.*

Следствие 3. *Для σ-компактной группы G множество $\mathfrak{L}(G)$ — k-пространство тогда и только тогда, когда п $\mathfrak{K}(G)$ счетного характера.*

Лемма 8. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ счетной тесноты, то группа G счетного веса.*

Доказательство. От противного. Предположим, что G несчетного веса. Тогда (4.1.16 [6]) G либо не σ-компактна, либо неметризуема. Покажем, что в обоих случаях $\mathfrak{L}(G)$ содержит несчетную цепь.

Рассмотрим случай, когда G не σ-компактна. По 5.7 [10] в G найдется открытая σ-компактная подгруппа H_1. Предположим, что для некоторого счетного трансфинитного числа $\alpha < \omega_1$ построено множество σ-компактных подгрупп $\{H_\beta, H_\gamma \subset H_\beta,\ \gamma < \beta < \alpha\}$. Тогда, если α — предельное число, то положим $H_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta$, а если α не предельное, то $H_\alpha = <$ $< \overline{H_{\alpha-1}, h_\alpha} >$, где $h_\alpha \in G \setminus H_{\alpha-1}$.

Итак, получили несчетную возрастающую цепь подгрупп $\mathscr{Z} = \{H_\alpha, \alpha \leqslant$ $\leqslant \omega_1\}$, где $H_{\omega_1} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} H_\alpha$.

Пусть G — неметризуемая группа. Возьмем по 8.7 [10] в произвольной окрестности e компактную подгруппу H_1 типа G_δ. Предположим, что для некоторого счетного трансфинитного числа $\alpha < \omega_1$ построено множество компактных подгрупп типа G_δ: $\{H_\beta, H_\gamma \supset H_\beta,\ \gamma < \beta < \alpha\}$. Тогда, если α — предельное число, то положим $H_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} H_\beta$, в противном случае возьмем в $H_{\alpha-1}$ подгруппу $H_\alpha \neq H_{\alpha-1}$. Пусть $H_{\omega_1} = \bigcap\limits_{\alpha<\omega_1} H_\alpha$. Получаем несчетную убывающую цепь $\mathfrak{Z} = \{H_\alpha, \alpha \leqslant \omega_1\}$.

В обоих случаях по определению топологии Вьеториса имеем $H_{\omega_1} \in \in \overline{\mathfrak{Z} \setminus \{H_{\omega_1}\}}$. Но в силу вполне упорядоченности цепи $\mathfrak{Z}$ замыкание любого счетного ее подмножества не будет содержать H_{ω_1}, т. е. точка H_{ω_1} несчетной тесноты.

Т е о р е м а 3. *Следующие условия равносильны: а) вес группы G счетен; б) псевдохарактер $\mathfrak{L}(G)$ счетен; в) теснота $\mathfrak{L}(G)$ счетна; г) $\mathfrak{L}(G)$ — секвенциальное пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совпадение условий а) и б) доказано в теореме 1. Совпадение условий а) и г) — в следствии 2. Рассмотрим условия а) и в). Если вес G счетен, то по следствию 2 пространство $\mathfrak{L}(G)$ секвенциально, и по 1.7.13. (с) [6] $\mathfrak{L}(G)$ счетной тесноты. Обратно, если $\mathfrak{L}(G)$ счетной тесноты, то по лемме 8 G счетного веса.

Т е о р е м а 4. *Пусть G — нульмерная группа. Множество $\mathfrak{L}(G)$ является пространством Фреше — Урысона (счетного характера) тогда и только тогда, когда каждая некомпактная индуктивно компактная подгруппа H из G открыта и G счетного веса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Если $\mathfrak{L}(G)$ — пространство Фреше — Урысона, то по теореме 3 группа G счетного веса. Пусть H—произвольная некомпактная индуктивно компактная подгруппа. По следствию 1 множество $D_1(H)$ — окрестность точки H в $\mathfrak{L}(G)$. Тогда характер H в $\mathfrak{L}(G)$ равен характеру H в $D_1(H)$, который по лемме 1 и теореме 3 счетен. По теореме 2 [1] подгруппа H открыта.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если точка счетного псевдохарактера F является компактной подгруппой G, то из открытости и локальной компактности подпространства $\mathfrak{K}(G)$ [9, с. 52] следует, что F — точка счетного характера $\mathfrak{L}(G)$.

Если F — некомпактная индуктивно компактная подгруппа, то F — точка счетного характера по лемме 1 (F открыта).

Осталось рассмотреть случай, когда F — некомпактная неиндуктивно компактная подгруппа G. По [2] множество $\mathfrak{JK}(G)$ индуктивно компактных подгрупп группы G замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}(G) \setminus \mathfrak{JK}(G)$ — окрестность точки F из некомпактных подгрупп, $\mathfrak{U} \subset n\,\mathfrak{K}(G)$. По теореме 1 [4] и теореме 2 [4] точка F обладает окрестностью $\mathcal{W}$ из собственных подгрупп в $n\,\mathfrak{K}(G)$. Тогда $\mathcal{W} \cap \mathfrak{U} \subset D_1(F)$ — окрестность из собственных подгрупп F в $\mathfrak{L}(G)$. Но по лемме 1 F является точкой счетного характера в $D_1(F)$, а значит, и в $\mathfrak{L}(G)$. Тогда $\mathfrak{L}(G)$ — пространство счетного характера, а следовательно, и Фреше — Урысона.

Л е м м а 9. *Пусть некомпактная индуктивно компактная подгруппа $H \in \mathfrak{L}(G)$ — точка счетного псевдохарактера; $\mathfrak{F}$ — произвольное подмножество $\mathfrak{L}(G)$. Если $H \in \overline{\mathfrak{F}}$, то H принадлежит замыканию некоторого счетного подмножества $\mathfrak{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 точка H имеет счетный характер в $D_1(H)$. Тогда можно считать (8.7, [10]), что H обладает следующей счетной локальной базой: $\{D_1(H) \cap \mathfrak{B}_i,\ \mathfrak{B}_i = D_2(x_1V_i) \cap \ldots \cap D_2(x_iV_i),\ i \geqslant 1\}$, где V_i — компактные окрестности e такие, что $V_i \supset V_{i+1}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i = P$, а P — инвариантная подгруппа H (окрестности V_i так можно выбрать потому, что H — множество типа G_δ в пространстве G). Если в $\mathfrak{F}$ найдется подмножество, состоящее из некомпактных подгрупп, то, используя наличие у H в $n\,\mathfrak{K}(G)$ окрестности из собственных подгрупп (теорема 2 [4]) и счетность характера H в $n\,\mathfrak{K}(G)$, получаем существование искомого счетного подмножества в $\mathfrak{F}$. Значит, можно считать, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{K}(G)$. Тогда по лемме 7 в $\mathfrak{L}(G)$ не существует окрестности, определяющей точку H от собственных некомпактных подгрупп из $\overline{\mathfrak{F}}$. Поэтому из каждого множества $(D_1(H) \cap \mathfrak{B}_i) \cap \overline{\mathfrak{F}} \setminus \{H\} \cap \mathfrak{K}(G)$ можно выбрать некоторую компактную подгруппу B_i, $i \geqslant 1$. Если бесконечное число точек из $\{B_i, i \geqslant 1\}$ принадлежит $\mathfrak{F}$, то они образуют искомое счетное подмножество из $\mathfrak{F}$. Можно считать, что каждая подгруппа B_i — предельная точка для множества $\mathfrak{F}$.

Тогда множество $D_1(B_iV_j) \cap \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$ не пусто для всех $i, j \geqslant 1$. Выберем $F_{ij} \in D_1(B_iV_j) \cap \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$, $i, j \geqslant 1$. Зафиксируем индекс i. По выбору V_j окрестности $D_1(B_iV_j) \cap \mathfrak{B}_i$ вложенные. По свойствам окрестностей типа D_1 имеем $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_1(B_iV_j) \cap \mathfrak{B}_i = D_1\left(B_i \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j\right) \cap \mathfrak{B}_i = D_1(B_iP) \cap \mathfrak{B}_i = \mathfrak{X}_i \subset \subset D_1(H) \cap \mathfrak{B}_i$. Кроме того, $\mathfrak{X}_i$ и $D_1(B_iV_j) \cap \mathfrak{B}_i$ — компакты. Отсюда с применением леммы Шуры-Буры получаем, что предельные точки у последовательности $\{F_{ij}, j \geqslant 1\}$ есть, и все они лежат во множестве $\mathfrak{X}_i \subset \subset D_1(H) \cap \mathfrak{B}_i$ для каждого $i \geqslant 1$. Но тогда замыкание счетного множества $\{F_{ij}, i, j \geqslant 1\}$ должно содержать точку H.

Теорема 5. *Если произвольная подгруппа $H \in \mathfrak{L}(G)$ — точка счетного псевдохарактера, то она — точка счетной тесноты.*

Доказательство. В доказательстве достаточности теоремы 4 получено, что если H — не индуктивно компактная подгруппа, то H — точка счетного характера, и значит, счетной тесноты. Случай, когда H — индуктивно компактная подгруппа, доказан в лемме 9.

1. *Протасов И. В.* Компакты в пространстве подгрупп топологической группы // Укр. мат. журн. — 1986.— **38**, № 5.— С. 600—605.
2. *Протасов И. В.* Пределы компактных подгрупп в топологических группах // Докл. АН УССР.— 1986.— № 10.— С. 64—66.
3. *Коуровская* тетрадь / Ред. В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин: 9-е изд.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982.— 144 с.
4. *Пискунов А. Г.* Мощность открытых σ-компактных множеств в пространстве некомпактных подгрупп топологической группы // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 6.— С. 815—819.
5. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1980.— 42 с.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М. : Мир, 1986.— 752 с.
7. *Протасов И. В.* Локальные теоремы для топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— **43**, № 6.— С. 1430—1440.
8. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 378—385.
9. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т.— М. : Мир, 1969.— Т. 2.— 624 с.
10. *Хьюит Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 655 с.

Киев ун-т

Получено 28.02.89