УДК 519.21

А. И. Черняк

Сходимость процессов ступенчатых сумм на процессах с перемешиванием

Доказана предельная теорема о сходимости неоднородных центрированных процессов ступенчатых сумм, построенных на случайных последовательностях с перемешиванием, к процессу с независимыми приращениями. Доказана также теорема типа принципа инвариантности для схем суммирования функционалов на случайных последовательностях с перемешиванием.

Доведено граничну теорему про збіжність неоднорідних центрованих процесів ступінчастих сум, побудованих на випадкових послідовностях з перемішуванням, до процесу з незалежними приростами. Доведено також теорему типу принципу інваріантності для схем сумування функціоналів на випадкових послідовностях з перемішуванням.

Пусть $x_n(k)$, $k \geqslant 1$,— случайная последовательность со значениями в измеримом пространстве (X, B_X). Введем функцию сильного перемешивания для этой последовательности

$$\alpha_n(m) = \sup\{|P(A\cap B) - P(A)P(B)|: A\in\sigma(x_n(i): 1\leqslant i\leqslant k),$$
$$B\in\sigma(x_n(i): i\geqslant m+k), \quad k\geqslant 1\},$$

где $\sigma(x_n(i): r\leqslant i\leqslant k)$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{x_n(i),\ r\leqslant i\leqslant k\}$. Пусть $f_n(k, x)$, $k\geqslant 1$, $x\in X$,— последовательность действительных B_X-измеримых неслучайных функций. Обозначим

$$S_n(m) = \sum_{k=1}^{m}(f_n(k, x_n(k)) - m_n(k)), \quad m_n(k) = Mf_n(k, x_n(k)),$$

$$d_n(k, \delta) = M|f_n(k, x_n(k)) - m_n(k)|^{4+\delta}, \quad \delta>0, \quad k\geqslant 1,$$

$$\xi_n(t) = n^{-1/2}S_n([nt]), \quad t\in[0, T], \quad S_n = S_n([nT]).$$

В работе символ $\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}$ обозначает слабую сходимость конечномерных распределений случайных процессов, а символ $\xrightarrow{\mathscr{D}}$ — сходимость случайных процессов в пространстве функций без разрывов второго рода $D_{[0,T]}$ с топологией Скорохода.

Теорема 1. *Если для некоторого* $\delta>0$ *и для всех* n

$$\max_{1\leqslant k\leqslant[nT]} d_n(k, \delta) < C_1, \tag{1}$$

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k\geqslant N}(k+1)(\alpha_n(k))^{\delta/(4+\delta)} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} D\xi_n(t) = \sigma^2 t, \quad t\in[0, T], \quad \sigma^2>0, \tag{3}$$

то

$$\xi_n(t)\xrightarrow{\mathscr{D}} W(t), \quad t\in[0, T], \tag{4}$$

где $W(t)$ — *винеровский процесс с коэффициентом переноса* 0 *и диффузии* σ^2.

Доказательство. Учитывая условие (3) и то, что $M\xi_n(t) = 0$, согласно теореме 19.2 [1] для доказательства утверждения (4) достаточно проверить следующие условия:

А:. процесс $\xi_n(t)$ имеет асимптотически независимые приращения;

Б: при каждом $t\in[0, T]$ последовательность $\xi_n^2(t)$, $n\geqslant 1$, равномерно интегрируема;

В: $\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{|t_1-t_2|<h}|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon>0$.

Из определения сильного перемешивания, применяя индукцию по k, имеем

$$|P\{\xi_n(t_i)-\xi_n(s_i)\in H_i, \quad i=\overline{1, k}\} -$$
$$-\prod_{i=1}^{k}P\{\xi_n(t_i)-\xi_n(s_i)\in H_i\}|\leqslant(k-1)\alpha_n([n\varepsilon])$$

для любых $0\leqslant s_1\leqslant t_1<s_2\leqslant t_2<\ldots<s_k\leqslant t_k\leqslant T$ и любых борелевских множеств $H_1, \ldots, H_k$, где ε — наименьшая разность среди $s_i - t_{i-1}$, $i=\overline{2, k}$. Поскольку $\varepsilon>0$ и выполняется (2), то $\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n([n\varepsilon]) = 0$. Следовательно, условие A выполнено.

Для проверки условия Б воспользуемся моментным неравенством для сумм случайных величин с перемешиванием [2, 3] и условиями (1), (2). Тогда

$$MS_n^4\leqslant C\sum_{k=1}^{[nT]}\alpha_n^{\frac{\delta}{4+\delta}}(k)(k+1)n^2T^2 = K_n n^2,$$

где C — некоторая константа, не зависящая от n. Из условия (2) следует $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} K_n < \infty$. Далее

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} M\left\{\frac{S_n^2}{n}\chi\left(\frac{S_n^2}{n} > N\right)\right\} \leqslant \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} N^{-1} M\frac{S_n^4}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{K_n}{N} = 0. \qquad (5)$$

Поскольку $\xi_n^2(t) \leqslant T S_n^2([nt])/([nt])$, то из (5) следует равномерная интегрируемость последовательности $\xi_n^2(t)$, $n \geqslant 1$.

Для проверки условия плотности (слабой компактности) в равномерной топологии B введем непрерывные процессы $\tilde{\xi}_n(t)$, $t\in[0, T]$, построенные по ломаным, соединяющим точки $(k/n, \xi_n(k/n))$, $k = \overline{0, [nT]}$. Поскольку

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\tilde{\xi}_n(t) - \xi_n(t)| > \varepsilon\} \leqslant P\{\max_{1\leqslant k\leqslant [nT]} |f_n(k, x_n(k)) -$$

$$- m_n(k)| > \varepsilon\sqrt{n}\} \leqslant \sum_{k=1}^{[nT]} P\{|f_n(k, x_n(k)) - m_n(k)| > \varepsilon\sqrt{n}\} \leqslant$$

$$\leqslant T\max_{1\leqslant k\leqslant [nT]} d_n(k, \delta)\,\varepsilon^{-4-\delta} n^{-1-\delta/2} \to 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, то достаточно проверить плотность $\xi_n(\cdot)$ в $D_{[0,T]}$. Для этого покажем, что для всех $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и всех n

$$M\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)|^2\ |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)|^2\} \leqslant C_2(t_2 - t_1)^2. \qquad (6)$$

Используя условия (1), (2), имеем

$$M\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)|^2\ |\xi_n(t_2) - \xi_n(t)|^2\} \leqslant (M|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)|)^{1/2} M|\xi_n(t_2) -$$

$$- \xi_n(t)|^4)^{1/2} \leqslant K_n\left\{\frac{[nt_2] - [nt_1]}{n}\right\}^2. \qquad (7)$$

Если $t_2 - t_1 \geqslant 1/n$, то (6) следует из (7). Если $t_2 - t_1 < 1/n$, то либо t_1 и t, либо t и t_2 лежат в одном и том же интервале $[k/n, (k+1)/n)$ и, следовательно, левая часть неравенства (6) обращается в 0. Неравенство (6) доказано. Согласно теореме 15.6 [1] $\xi_n(\cdot)$ плотна в $D_{[0,T]}$. Отсюда следует плотность $\tilde{\xi}_n(\cdot)$ $D_{[0,T]}$. Поскольку непрерывные процессы не могут сходится в $D_{[0,T]}$ к разрывному процессу, то любой слабый предел $\xi_n(\cdot)$ будет непрерывным процессом.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $x_n(k)$, $k \geqslant 1$,— стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, выполняется условие* (3), *для всех n*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant [nT]}\sup_{x\in X} |f_n(k, x) - m_n(k)| < C_3$$

и $\lim\limits_{N\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_{k\geqslant N}(k+1)\alpha_n(k) = 0$, *то справедливо утверждение* (4) *теоремы* 1.

Здесь при проверке условий Б, В следует воспользоваться теоремой 2 [4].

Рассмотрим более общую схему суммирования. Пусть при каждом n $\{\xi_n(k, x), x\in X\}$, $k \geqslant 1$,— независимые от $x_n(\cdot)$ и в совокупности семейства случайных величин, характеристические функции которых B_X-измеримы. Обозначим

$$f_n(k, x) = M\xi_n(k, x),\ x\in X, \quad m_n(k) = Mf_n(k, x_n(k)), \quad k \geqslant 1.$$

Предположим, что

$$\psi_n(k, \lambda, x) = \ln M \exp\{i\lambda\beta_n(\xi_n(k, x) - m_n(k))\} =$$
$$= i\lambda\beta_n(f_n(k, x) - m_n(k)) + \gamma_n c_n(\lambda, k, x), \tag{8}$$

где β_n, γ_n — некоторые нормирующие множители такие, что $\beta_n \to 0$, $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$,

$$a_n(\lambda, k) = Mc_n(\lambda, k, x_n(k)), \quad b_n(\lambda, k) = c_n(\lambda, k, x_n(k)) -$$
$$- a_n(\lambda, k), \quad \lambda \in R^1, \quad x \in X.$$

Введем следующие случайные процессы:

$$\xi_n(t) = \beta_n \sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} (f_n(k, x_n(k)) - m_n(k)),$$

$$\zeta_n(t) = \beta_n \sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} (\xi_n(k, x_n(k)) - m_n(k)),$$

$$A_n(\lambda, t) = \gamma_n \sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} a_n(\lambda, k), \quad \lambda \in R^1, \quad t \in [0, T].$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

$$\|\xi\|_p = \{M|\xi|^p\}^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

$$q_n(\lambda, \delta) = \sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}T]} \|b_n(\lambda, k)\|_2^2 + 48 \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant [\gamma_n^{-1}T]} \{\alpha_n(j-k)\}^{\frac{\delta}{2+\delta}} \times$$
$$\times \|b_n(\lambda, k)\|_{2+\delta} \|b_n(\lambda, j)\|_{2+\delta}, \quad \delta > 0, \quad \lambda \in R^1.$$

Схемы суммирования на случайных процессах исследовались многими авторами. Довольно полный обзор результатов по этой тематике содержится в [5]. В данной работе при исследовании поведения случайного процесса $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, используется методика работ [5—7], где изучались подобные схемы суммирования на стационарных последовательностях, цепях Маркова, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (1), (2) *теоремы* 1, *где* $f_n(k, x) = M\xi_n(k, x)$, $x \in X$, $k \geqslant 1$, *условие* (8),

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n D\Big(\sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} (f_n(k, x_n(k)) - m_n(k))\Big) = \sigma^2 t, \quad t \in [0, T], \quad \sigma^2 > 0,$$

для любого $\lambda \in R^1$ *и некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\gamma_n^2 q_n(\lambda, \varepsilon) \to 0, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\lambda, t) = A(\lambda, t), \quad t \in [0, T],$$

где $A(\pm 0, t) = 0$, $t \in [0, T]$, *то* $\zeta_n(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \zeta_0(t)$, $t \in [0, T]$, *при* $n \to \infty$, *где* $\zeta_0(t)$ — *процесс с независимыми приращениями такой, что*

$$M\exp\{i\lambda\zeta_0(t)\} = \begin{cases} \exp\{A(\lambda, t), & \text{если } \beta_n^2 = o(\gamma_n), \\ \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 t + A(\lambda, t)\right\}, & \text{если } \beta_n^2 = \gamma_n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как величины $\xi_n(k, x_n(k))$ на фиксированной траектории $x(\cdot)$ условно независимы, то имеет место представление

$$Me^{i\lambda\zeta_n(t)} = M\exp\Big\{\sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} \psi_n(k, \lambda, x_n(k))\Big\} =$$

$$= M\exp\{i\lambda\xi_n(t) + A_n(\lambda, t) + \theta_n(\lambda, t)\},$$

где $\theta_n(\lambda, t) = \gamma_n \sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]} b_n(\lambda, k)$.

Докажем, что $\theta_n(\lambda, t) \xrightarrow{P} 0$, $n\to\infty$. Воспользуемся неравенством, доказанным в работе [8, лемма 2.1]. Если ξ и η соответственно измеримы относительно σ-алгебр $\sigma(x_n(i): 1\leqslant i\leqslant k)$ и $\sigma(x_n(i): i\geqslant k+m)$, $M|\xi|^p < \infty$ и $M|\eta|^q<\infty$ при $p>1$, $q>1$, $p^{-1}+q^{-1}<1$, то

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 12\,\|\xi\|_p\,\|\eta\|_q\,\{\alpha_n(m)\}^{1-p^{-1}-q^{-1}}$$

(для комплекснозначных случайных величин добавится сомножитель 2). Тогда согласно (9) при $p=q=2+\varepsilon$ $M|\theta_n(\lambda, t)|^2\leqslant q_n(\lambda, \varepsilon)\gamma_n^2\to 0$.

В силу теоремы 1 $\xi_n(t)\xrightarrow{\mathscr{D}} W(t)$ при $\beta_n^2=\gamma_n$ и $\xi_n(t)\xrightarrow{P} 0$ при $\beta_n^2 = 0(\gamma_n)$, $t\in[0, T]$. Поскольку $\operatorname{Re}\ \psi_n(k, \lambda, x)\leqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]}\psi_n(k, \lambda, x_n(k)) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} i\lambda W(t) + A(\lambda, t)$ при $\beta_n^2=\gamma_n$, $\sum_{k=1}^{[\gamma_n^{-1}t]}\psi_n(k, \lambda, x_n(k))\xrightarrow{P} A(\lambda, t)$ при $\beta_n^2 = o(\gamma_n)$, то согласно теореме Хелли

$$M\exp\{i\lambda\zeta_n(t)\}\to M\exp\{i\lambda\zeta_0(t)\},\quad n\to\infty.$$

Таким образом, сходимость одномерных распределений доказана. Аналогично доказывается сходимость конечномерных распределений.

З а м е ч а н и е 1. Если для некоторого $\delta>0$ выполняется условие (2) либо более слабое

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant N}\{\alpha_n(k)\}^{\frac{\delta}{2+\delta}} = 0$$

и при каждом $\lambda\in R^1$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant[\gamma_n^{-1}T]}\|b_n(\lambda, k)\|_{2+\delta} < C_4(\lambda)<\infty,$$

то $\gamma_n^2 q_n(\lambda, \delta)\to 0$ при $n\to\infty$.

З а м е ч а н и е 2. Если $x_n(k)$, $k\geqslant 1$, — цепь Маркова с фазовым пространством (X, B_X) и переходными вероятностями $p_n(k, x, k+m, A)$, $x\in X$, $A\in B_X$, то справедлива оценка [9]

$$\alpha_n(m)\leqslant\alpha_n'(m)\sup_{k\geqslant 1}\int_X\pi_n^k(dx)\sup_{A\in B_X}|p_n(k, x, k+m, A) - \pi_n^{k+m}(A)|,$$

где $\pi_n^k(A) = P\{x_n(k)\in A\}$, $A\in B_X$ и, следовательно, теоремы 1—3 можно применять для неоднородных цепей Маркова с произвольным пространством состояний при соответствующих условиях на $\alpha_n'(m)$, $m\geqslant 1$.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 351 с.
2. *Yoshihara K.* Moment inequalities for mixing sequences // Kodai Math. J.— 1978.— **1**, N 2.— P. 316—328.

3. *Утев С. А.* Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Предельные теоремы для сумм случайных величин.— Новосибирск : Наука, 1984.— С. 50—77.
4. *Yokoyama R.* Moment bounds for stationary mixing sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1980.— **52**.— P. 45—57.
5. *Анисимов В. В.* Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы.— Киев : Вища шк., 1988.— 183 с.
6. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для неоднородных слабозависимых схем суммирования // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1982.— **27**.— С. 10—22.
7. *Черняк А. И.* Предельные теоремы для схем суммирования на стационарной последовательности в схеме серий // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 4.— С. 351—535.
8. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— **13**, № 4.— С. 730—737.
9. *Давыдов Ю. А.* Условия перемешивания для цепей Маркова // Там же.— 1973.— **18**, № 2.— С. 321—338.

Киев. ун-т Получено 31.05.88