УДК 512.554.3

В. Е. Миронов

Максимальные стабильные порядки в алгебре Ли sp $(2n)$

Изучены свойства стабильных максимальных порядков в алгебре Ли sp $(2n)$ и получена их классификация.

Вивчені властивості стабільних максимальних порядків в алгебрі Лі sp $(2n)$ та одержана їх класифікація.

В настоящее время достаточно хорошо изучены целочисленные представления в ассоциативных алгебрах (см., например, [1—4]). Среди работ, посвященных порядкам в неассоциативных алгебрах, отметим работы [5, 6], в которых исследуются порядки в йордановых и лиевых алгебрах соответственно. В случае алгебр Ли порядки описаны полностью только для алгебры sl (2) [7]. Настоящая работа посвящена изучению одного класса порядков в алгебрах Ли sp $(2n)$.

Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо главных идеалов характеристики 0, K — его поле частных, $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Обозначим через V конечномерное векторное пространство над K. Согласно [7], конечнопорожденный $\mathfrak{O}$-подмодуль L в V называется $\mathfrak{O}$-решеткой, если L содержит базис V.

Пусть A — конечномерная алгебра над K. Решетку Λ в A называют порядком, если для любых элементов u и v из Λ uv принадлежит Λ.

Далее будем считать, что A — полупростая алгебра Ли, расщепимая над K. Согласно [6], в A существуют элементы $h_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и $x_\alpha \in A_\alpha$, образующие базис A, причем структурные константы лежат в $\mathfrak{O}$ (здесь H — подалгебра Картана, A_α — корневые подпространства). Указанный базис называется базисом Шевалле. Очевидно, что он определяет порядок, называемый порядком Шевалле.

Будем говорить, что порядок Λ является стабильным, если в любом конечномерном A-модуле V существует Λ-инвариантная решетка L, т. е. $\Lambda L \subset L$. Заметим, что любой порядок обладает инвариантной решеткой в присоединенном представлении. Порядок Шевалле является стабильным [6].

Цель настоящей работы — описать максимальные стабильные порядки в алгебре Ли

$$\mathrm{sp}(2n, K) = \{X \in M_{2n}(K) \mid X^t J + JX = 0\},$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее через A будем обозначать именно эту алгебру. Отметим, что всякий максимальный стабильный порядок в алгебре Ли $\mathrm{sl}(n)$ изоморфен порядку Шевалле [7]. В работе [7] описаны также все максимальные (нестабильные) порядки в $\mathrm{sl}(2, K)$.

Рассмотрим в пространстве $V = K^{2n}$ произвольную $\mathfrak{O}$-решетку L. Обозначим $\Lambda_L = \{X \in A \mid XL \subset L\}$. Очевидно, что Λ_L является порядком в A и любой порядок, сохраняющий L, лежит в Λ_L. Следующее предложение показывает, что такие порядки являются стабильными.

Предложение 1. *Порядок Λ в A является стабильным тогда и только тогда, когда Λ обладает инвариантной решеткой в V.*

Это утверждение непосредственно следует из описания конечномерных A-модулей [8].

Решетки L и L' в пространстве V назовем эквивалентными, если найдется матрица $S \in \mathrm{SP}(2n, K)$ и число $\lambda \in \overline{K}$ такие, что $L' = \lambda SL$. Отсюда очевидно следует $\lambda S \in \mathrm{GL}(2n, K)$ и $\lambda^2 \in K$. Кроме того, $\Lambda_{L'} = S\Lambda S^{-1}$. Напомним, что всякий автоморфизм алгебры Ли $\mathrm{sp}(2n, K)$ имеет вид $X \to$ $\to S \times S^{-1}$ для некоторой матрицы $S \in \mathrm{SP}(2n, K)$ [9].

Предложение 2. 1. *Порядок $\Lambda \subset A$ — максимальный стабильный тогда и только тогда, когда существует решетка $L \subset V$ такая, что $\Lambda = \Lambda_L$.*

2. *Всякий порядок, изоморфный Λ_L, имеет вид $\Lambda_{L'}$, где L' эквивалентна L.*

Доказательство очевидно.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в V.

Предложение 3. *Любая решетка в V эквивалентна решетке, порожденной базисом вида $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, d_1 e_{n+1}, d_2 e_{n+2}, \ldots, d_n e_{2n}\}$, где все $d_i \in \mathfrak{O}$ и $d_1 | d_2 | d_3 | \ldots | d_n$.*

Доказательство. Обозначим через $[L]$ матрицу решетки L в стандартном базисе. Тогда матрица эквивалентной решетки L' имеет вид $[L'] = \lambda S [L] G$, где $S \in \mathrm{SP}(2n, K)$, $G \in \mathrm{GL}(2n, \mathfrak{O})$, $\lambda^2 \in \mathfrak{O}$. Из симплектичности S следует $[L']^t J [L'] = \lambda^2 G^t [L]^t J [L] G$.

Заметим что, $[L]^t J [L]$ является матрицей невырожденной симплектической формы, которую обозначим J_L. Окончательно получим $J_{L'} =$ $= \lambda^2 G^t J_L G$. Последнее равенство означает, что две симплектические формы с точностью до скаляра из K эквивалентны над $\mathfrak{O}$. Нетрудно показать что матрица невырожденной симплектической формы приводится над $\mathfrak{O}$ к следующему виду: $J_L = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$, где $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, все $d_i \in \mathfrak{O}$ и $d_i \mid d_j$ при $i < j$. Отсюда и следует утверждение.

Обозначим решетку, полученную в предложении 3, через $L(d_1, \ldots, d_n)$, а наибольший сохраняющий ее порядок — через $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$. Нетрудно показать, что базис этого порядка имеет следующий вид:

$$\{e_{ii} - e_{i+n, i+n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$d_i/d_j (e_{ij} - e_{j+n, i+n}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$e_{ij} - e_{j+n, i+n}, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n,$$
$$1/d_j e_{j+n, j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 1/d_i e_{i, i+n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$1/d_j (e_{i, j+n} + e_{j, i+n}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$d_i (e_{i+n, j} + e_{j+n, i}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

где e_{ij} — матричные единицы.

Предложение 4. *Пусть L — произвольная $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$ — инвариантная решетка в V. Тогда в L существует базис вида*

$$\{x_1 e_1, x_2 e_2, \ldots, x_n e_n, x_1 d_1 e_{n+1}, \ldots, x_n d_n e_{2n}\},$$

где $x_i \mid x_j$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$, $x_i d_i \mid x_j d_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Утверждение получается непосредственной проверкой.

Предложение 5. *Порядок $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$ максимален тогда и только тогда, когда отношения d_j/d_i свободны от квадратов для любых $i < j$.*

Доказательство. Предположим, что существуют такие i и j, $i < j$, что d_j/d_i делится на квадрат $k^2 \in \mathfrak{O}$. Выберем среди таких пар индексов ту, для которой i — наибольшее, а j — наименьшее возможное. Тогда $\Lambda(d_i, \ldots, d_n)$ сохраняет решетку L' матрица которой имеет вид

$$[L'] = \operatorname{diag}(k, k, \ldots, 1, 1, kd_1, kd_2, \ldots, d_n),$$

k стоит вплоть до i-го места. Легко видеть, что $1/k(e_{i, j+n} + e_{j, i+n})$ принадлежит $\Lambda_{L'}$ и не принадлежит $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$, т. е. $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$ не максимален.

Наоборот, если все отношения d_j/d_i, $i < j$, свободны от квадратов, то, как нетрудно убедиться, $\Lambda(d_1, \ldots, d_n) = \Lambda_{\mathscr{L}'}$ для любой решетки L', инвариантной относительно $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$, т. е. $\Lambda(d_1, \ldots, d_n)$ — максимальный стабильный порядок.

Чтобы описать изоморфные максимильные стабильные порядки, рассмотрим локальный случай. Пусть p — простой элемент $\mathfrak{O}$. Обозначим через $\mathfrak{O}_p$ локализацию кольца $\mathfrak{O}$ по простому идеалу $p\mathfrak{O}$. Если Λ — порядок в A, положим $\Lambda_p = \mathfrak{O}_p \Lambda$. Поскольку $\mathfrak{O}_p$ содержит единственный простой элемент p, из предложения 5 следует, что всякий максимальный стабильный $\mathfrak{O}_p$-порядок в A изоморфен порядку $\Lambda_p^i = \Lambda_p(1, 1, \ldots, 1, p, \ldots, p)$ (здесь p стоит, начиная с $n + 1 - i$-го места), в частности, $\Lambda_p^0 = \Lambda_p(1, \ldots, 1)$.

Предложение 6. *$\Lambda_p^i \simeq \Lambda_p^j$, $i \neq j$, тогда и только тогда, когда $i + j = n$.*

Доказательство. Заметим, что ввиду предложения 4, с точностью до скалярного множителя, существует две Λ_p^i-инвариантные решетки: $L_p^i = L_p(1, \ldots, 1, p, \ldots, p)$ и решетка L' с базисом $\{pe_1, \ldots, pe_i, e_{i+1}, \ldots, e_n, pe_{n+1}, \ldots, pe_{2n}\}$. Очевидно, L' эквивалентна L^{n-i}, а значит, $\Lambda_p^i \simeq \Lambda_p^{n-i}$. С другой стороны, если решетки L и L' эквивалентны, то $\det[L'] = \varepsilon\mu \det[L]$, где ε — обратимый элемент из $\mathfrak{O}_p$, $\mu \in K$. Так как $\det[L_p^i] =$

$= p^i$, решетки L_p^i при разных i не эквивалентны. Ввиду предложения 2.2, Λ_p^i и Λ_p^j, где $i \neq j$ и $i \neq n - j$, не изоморфны.

Следствие. *С точностью до изоморфизма существует ровно* $1 + [n/2]$ *максимальных стабильных* $\mathfrak{O}_p$*-порядков: это порядки* Λ_p^i *при* $0 \leqslant i \leqslant n/2$.

Теорема. 1. *Пусть* Λ *и* Λ' *— максимальные стабильные порядки в* sp $(2n, K)$. $\Lambda \simeq \Lambda'$ *тогда и только тогда, когда* $\Lambda_p \simeq \Lambda'_p$ *для любого простого* $p \in \mathfrak{O}$.

2. *Всякий максимальный стабильный порядок в* sp $(2n, K)$ *изоморфен порядку вида* $\Lambda(1, 1, \ldots, 1, a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2 \ldots a_m)$, *где* $m = [n/2]$, *все* $a_i \in \mathfrak{O}$ *и свободны от квадратов.*

3. *Порядки* $\Lambda(1, \ldots, 1, a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2 \ldots a_m)$ *и* $\Lambda(1, \ldots, 1, b_1, b_1b_2 \ldots \ldots b_m)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда для любого* i *элементы* a_i *и* b_i *ассоциированы в* $\mathfrak{O}$.

Доказательство. 1. Можно считать, что $\Lambda = \Lambda(d_1, \ldots, d_n)$ и $\Lambda' = \Lambda(d'_1, \ldots, d'_n)$, причем отношения d_i/d_j и d'_i/d'_j при $j < i$ свободны от квадратов. Тогда $\Lambda_p = \Lambda_p^k$ и $\Lambda'_p = \Lambda_p^{k'}$, где $k(k')$ — наименьший номер, для которого $p \mid d_i$ $(p \mid d'_i)$. Если Λ и Λ' сопряжены, но $\Lambda_p \neq \Lambda'_p$, то $k' = n - k$. Пусть, например, $k' > k$. Тогда Λ имеет инвариантную решетку M с базисом вида

$$\{pe_1, pe_2, \ldots, pe_{n-k}, e_{n-k+1}, pd_1e_{n+1}, \ldots, pd_ne_{2n}\}.$$

Но M эквивалентна решетке $L(d''_1, \ldots, d''_n)$, где $d''_i = pd_i$ при $n - k' + 1 \leqslant i \leqslant n - k + 1$ и $d''_i = d_i$ — в остальных случаях. Поэтому $\Lambda = \Lambda_M$ изоморфен порядку $\Lambda'' = \Lambda(d''_1, \ldots, d''_n)$. Очевидно, $\Lambda''_p = \Lambda'_p$ и $\Lambda''_q = \Lambda_q$ при $q \neq p$. Так как все локализации Λ и Λ', кроме конечного числа, совпадают, отсюда следует изоморфизм Λ и Λ'.

Утверждения 2 и 3 теоремы вытекают из утверждения 1 и следствия предположения 6.

Замечание. Очевидно, в п. 1 теоремы локализацию можно заменить на p-адическое пополнение.

1. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
2. *Roggenkamp K. W., Huber-Dyson V.* Lattices cver orders. I // Lect. Notes Math.— 1970.— **115**.— 311 p.
3. *Roggenkamp K. W., Haber-Dyson V.* Lattices over orders. II // Ibid.— **142**.— 294 p.
4. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* О квазибассовых порядках // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— **36**, № 2.— С. 328—370.
5. *Racine M.* The arithmetics of quadratic Jordan algebras // Mem. Amer. Math. Soc.— 1973.— **136**.— 125 p.
6. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.— М. : Мир, 1975.— 261 с.
7. *Нуми Г. А.* Максимальные порядки в алгебре Ли sl (2): Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1986.— 65 с.
8. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. — М. : Мир, 1981.— 336 с.
9. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Мир, 1971.— 707 с.

Киев. ун-т — Получено 13.04.88